TOÁN TỪ TÂM

VECTƠ
HỆ TỌA ĐỘ
TRONG KHÔNG GIAN

TÁC GIẢ
TOÁN TỪ TÂM

MỤC LỤC

Bài 1. VECTO & CÁC PHÉP TOÁN TRONG KHÔNG GIAN

A. Lý thuyết

1. Khái niệm vectơ trong không gian; hai vectơ cùng phương, cùng hướng, bằng nhau; vectơ-không 3
2. Tổng và hiệu của hai vectơ 4
3. Tích của một số với một vectơ 5
4. Tích vô hướng của hai vectơ 5

B. Các dạng bài tập

Dạng 1. Sử dụng các định nghĩa 6
Dạng 2. Tổng và hiệu của hai vectơ 8
Dạng 3. Tích của một số với một vectơ 10
Dạng 4. Tích vô hướng và góc của hai vectơ 12

C. Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm 14
B. Câu hỏi – Trả lời Đúng/sai 17
C. Câu hỏi – Trả lời ngắn 20

Bài 2. TỌA ĐỘ CỦA VECTO TRONG KHÔNG GIAN

A. Lý thuyết

1. Hệ tọa độ trong không gian. 23
2. Tọa độ của điểm và vectơ. 23

B. Các dạng bài tập

Dạng 1. Tọa độ điểm 24
Dạng 2. Tọa độ vectơ 26
Dạng 3. Bài toán thực tế 28

C. Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm 29
B. Câu hỏi – Trả lời đúng/sai 31
C. Câu hỏi – Trả lời ngắn 33

Bài 3. BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTO

A. Lý thuyết

1. Biểu thức tọa độ của tổng, hiệu hai vectơ và tích của một số với một vectơ 37
2. Biểu thức tọa độ của tích vô hướng 37
3. Vận dụng 37

B. Các dạng bài tập

Dạng 1. Tọa độ tổng hiệu vectơ 39
Dạng 2. Tọa độ điểm – vectơ thỏa điều kiện 40

Dạng 3. Độ dài vectơ 42
Dạng 4. Sự cùng phương của hai vectơ 44
Dạng 5. Tích vô hướng và ứng dụng 46
Dạng 6. Tâm tỷ cự 48

C. Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm 50
B. Câu hỏi – Trả lời đúng/sai 51
C. Câu hỏi – Trả lời ngắn 52

Chương 02

Bài 1. VECTO & CÁC PHÉP TOÁN TRONG KHÔNG GIAN

A. Lý thuyết

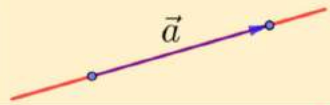
1. Khái niệm vectơ trong không gian; hai vectơ cùng phương, cùng hướng, bằng nhau; vectơ-không.

Định nghĩa:

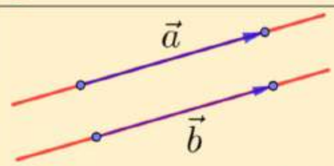
» *Vectơ trong không gian* là một đoạn thẳng có hướng.

» *Độ dài của vectơ* là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vectơ. Kí hiệu: $|\vec{a}|$.

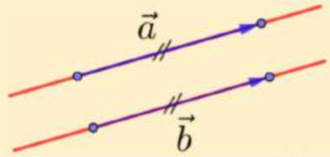
» *Giá* của vectơ là đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó.



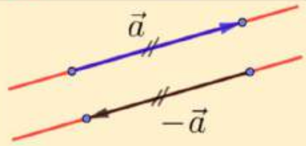
» Hai vectơ *cùng phương* nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau.



» Hai vectơ *bằng nhau* nếu chúng có cùng độ dài và cùng hướng. Nếu hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ bằng nhau thì ta viết là $\vec{a}=\vec{b}$.



» Hai vectơ *đối nhau* nếu chúng có cùng độ dài và ngược hướng. Vectơ đối của $\vec{a}$ được kí hiệu là $-\vec{a}$.



» *Vectơ - không* có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau, kí hiệu là $\vec{0}$.

Quy ước vectơ-không có độ dài bằng 0 và cùng phương, cùng hướng với mọi vectơ.

Chú ý

» Kí hiệu $\overrightarrow{AB}$ chỉ vectơ có điểm đầu A, điểm cuối B.

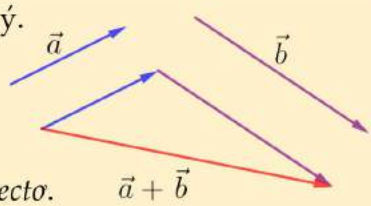
» Nếu không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối thì vectơ còn được kí hiệu là $\vec{u},\vec{v},\vec{x},\vec{y},\dots$.

2. Tổng và hiệu của hai vectơ

Định nghĩa tổng hai vectơ:

Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$. Lấy một điểm A tùy ý.

- Vẽ $\overrightarrow{AB}=\vec{a},\overrightarrow{BC}=\vec{b}$. Vectơ $\overrightarrow{AC}$ là ***tổng của hai vectơ*** $\vec{a},\vec{b}$.
- Ký hiệu là $\vec{a}+\vec{b}$.
- Phép lấy tổng của hai vectơ còn được gọi là *phép cộng vectơ*.



Nhận xét: Phép cộng vectơ trong không gian cũng có các tính chất như phép cộng vectơ trong mặt phẳng.

» Tính chất giao hoán: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.

» Tính chất kết hợp: $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$.

» Với mọi vectơ $\vec{a}$, ta luôn có: $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}$.

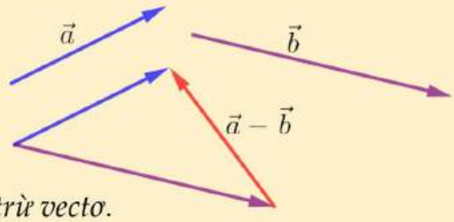
Chú ý

» Từ tính chất kết hợp, ta xác định được tổng ba vectơ $\vec{a};\vec{b};\vec{c}$ là $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}$.

Định nghĩa hiệu hai vectơ:

Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$.

- Hiệu của hai vectơ $\vec{a};\vec{b}$ là vectơ $\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$.
- Kí hiệu là $\vec{a}-\vec{b}$.
- Phép lấy hiệu của hai vectơ còn được gọi là *phép trừ vectơ*.

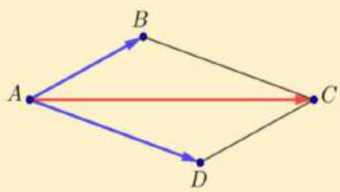


Các quy tắc

✓ Quy tắc ba điểm và quy tắc hình bình hành:

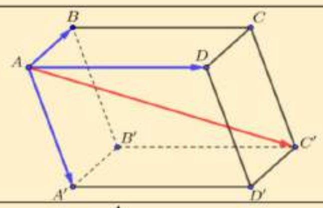
» Với ba điểm A,B,C bất kì, ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ (Quy tắc ba điểm phép cộng).

» Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ (Quy tắc hình bình hành).



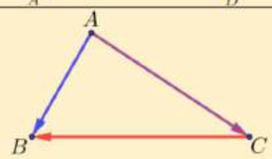
✓ Quy tắc hình hộp:

» Nếu $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp thì $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$.



✓ Quy tắc hiệu:

» Với ba điểm A,B,C bất kì, ta có $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$.



3. Tích của một số với một vectơ

Định nghĩa:

Trong không gian, cho số $k \neq 0$ và vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$.

- Tích của số k với vectơ $\vec{a}$ là một vectơ.
- Ký hiệu là $k\vec{a}$.
- Phép lấy tích của một số với một vectơ được gọi là *phép nhân một số với một vectơ.*
  - » Cùng hướng với $\vec{a}$ nếu $k > 0$,
  - » Ngược hướng với $\vec{a}$ nếu $k < 0$
  - » Có độ dài bằng $|k|.|\vec{a}|$.

4. Tích vô hướng của hai vectơ

Góc giữa hai vectơ trong không gian

Trong không gian, cho $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là hai vectơ khác $\vec{0}$.

- Lấy một điểm A bất kì, gọi B và C là hai điểm sao cho $\overrightarrow{AB} = \vec{u}, \overrightarrow{AC} = \vec{v}$.

  Ta gọi $\widehat{BAC}$ là góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$.
- Kí hiệu là $(\vec{u}, \vec{v})$.

Tích vô hướng hai vectơ

Trong không gian, cho $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là hai vectơ khác $\vec{0}$.

- Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là một số
- Kí hiệu là $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Được xác định bởi công thức: $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$

Chú ý

» Trong trường hợp $\vec{u} = \vec{0}$ hoặc $\vec{v} = \vec{0}$, ta quy ước $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

» $\vec{u}.\vec{u} = \vec{u}^2 = |\vec{u}|^2 ; \vec{u}^2 \geq 0, \vec{u}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$

» Với hai vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ khác $\vec{0}$, ta có $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$.

» Với hai vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ khác $\vec{0}$, ta có $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

B. Các dạng bài tập

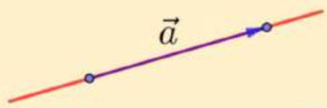
Dạng 1. Sử dụng các định nghĩa

Phương pháp

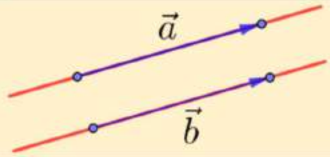
» ***Vectơ trong không gian*** là một đoạn thẳng có hướng.

» ***Độ dài của vectơ*** là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vectơ. Kí hiệu: $\left|\vec{a}\right|$.

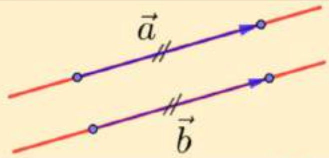
» ***Giá*** của vectơ là đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó.



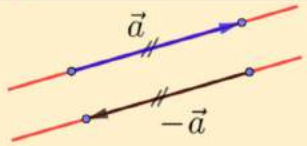
» Hai vectơ ***cùng phương*** nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau.



» Hai vectơ ***bằng nhau*** nếu chúng có cùng độ dài và cùng hướng. Nếu hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ bằng nhau thì ta viết là $\vec{a}=\vec{b}$.



» Hai vectơ ***đối nhau*** nếu chúng có cùng độ dài và ngược hướng. Vectơ đối của $\vec{a}$ được kí hiệu là $-\vec{a}$.



» ***Vectơ - không*** có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau, kí hiệu là $\vec{0}$.

Quy ước vectơ-không có độ dài bằng 0 và cùng phương, cùng hướng với mọi vectơ.

Ví dụ 1.1.

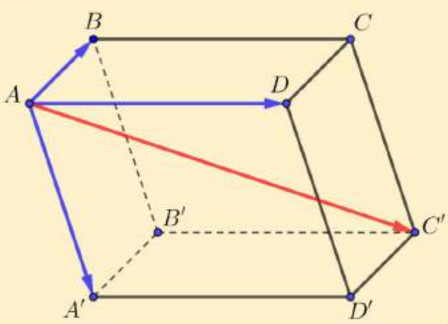
Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

Trong các vectơ khác $\vec{0}$, có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình hộp. Hãy chỉ ra những vectơ:

(1) Cùng phương với vectơ $\overrightarrow{AB}$;

(2) Bằng vectơ $\overrightarrow{AB}$;

(3) Ngược hướng với vectơ $\overrightarrow{AA'}$.



Lời giải

....

....

....

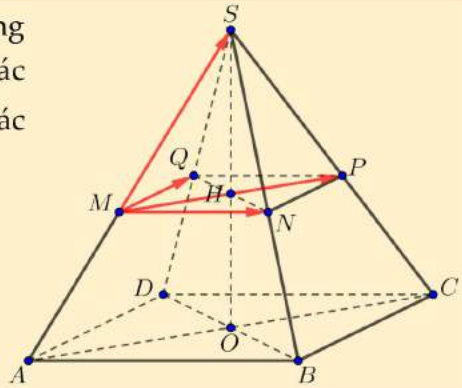
....

....

Ví dụ 1.2.

Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy a và đường cao h. Gọi M,N,P,Q lần lượt là trung điểm của các cạnh bên SA,SB,SC,SD và O,H lần lượt là tâm của các hình vuông $ABCD,MNPQ$.

Tính độ dài các vectơ $\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP},\overrightarrow{MS}$ theo a và h.



Lời giải

....

....

....

....

....

Dạng 2. Tổng và hiệu của hai vectơ

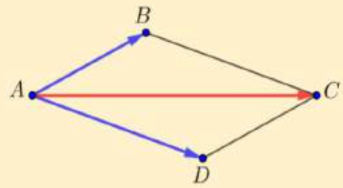
Phương pháp

Các quy tắc:

✓ ***Quy tắc ba điểm và quy tắc hình bình hành:***

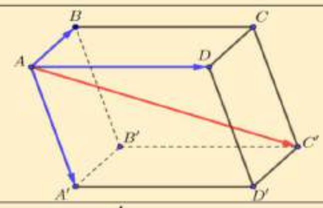
» Với ba điểm A, B, C bất kì, ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ (Quy tắc ba điểm phép cộng).

» Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ (Quy tắc hình bình hành).



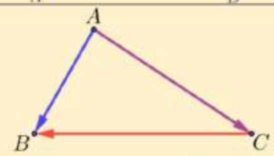
✓ ***Quy tắc hình hộp:***

» Nếu $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp thì $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$.



✓ ***Quy tắc hiệu:***

» Với ba điểm A, B, C bất kì, ta có $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$.



Ví dụ 2.1.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 2. Tìm độ dài của các vectơ sau:

(1) $\vec{a}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB'}$; (2) $\vec{b}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{C'A}$

Lời giải

....

....

....

....

....

Ví dụ 2.2.

Cho tứ diện $ABCD$. Chứng minh $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$.

Lời giải

....

....

....

....

....

Ví dụ 2.3.

Cho hình hộp $ABCD.EFGH$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{GB}=\vec{0}$.

Lời giải

....

....

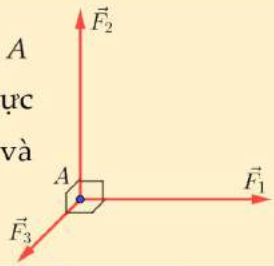
....

....

....

Ví dụ 2.4.

Một chất điểm chịu tác động bởi 3 lực $\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2},\overrightarrow{F_3}$ có chung điểm đặt A và có giá vuông góc nhau từng đôi một. Biết cường độ của các lực $\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2},\overrightarrow{F_3}$ lần lượt là $10\,\text{N}$, $8\,\text{N}$ và $5\,\text{N}$. Xác định hợp lực của 3 lực và tính cường độ của hợp lực (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



Lời giải

....

....

....

....

....

Dạng 3. Tích của một số với một vectơ

Phương pháp

Trong không gian, cho số $k \neq 0$ và vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$.

- Tích của số k với vectơ $\vec{a}$ là một vectơ. Ký hiệu là $k\vec{a}$. Có độ dài bằng $|k|.|\vec{a}|$.

  » Cùng hướng với $\vec{a}$ nếu $k > 0$, » Ngược hướng với $\vec{a}$ nếu $k < 0$

⁂ Với hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bất kì, với mọi số h và k, ta luôn có

(1) $k\left(\vec{a}+\vec{b}\right) = k\vec{a} + k\vec{b}$ (2) $\left(h+k\right)\vec{a} = h\vec{a} + k\vec{a}$ (3) $h\left(k\vec{a}\right) = \left(hk\right)\vec{a}$

(4) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$ (5) $\left(-1\right) \cdot \vec{a} = -\vec{a}$

(6) Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ $\left(\vec{b} \neq \vec{0}\right)$ cùng phương khi và chỉ khi có số k sao cho $\vec{a} = k\vec{b}$.

(7) Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi có số $k \neq 0$ để $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$..

⁂ **Hệ quả:**

(1) I là trung điểm của đoạn thẳng AB $\Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, với mọi điểm O.

(2) G là trọng tâm ΔABC $\Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, với mọi điểm O.

Ví dụ 3.1.

Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác BCD và O là trung điểm đoạn thẳng AG. Chứng minh rằng:

(1) $3\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$;

(2) $3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 6\overrightarrow{MO}$ (M là điểm bất kì trong không gian).

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 3.2.

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Giả sử điểm M thuộc AC, điểm N thuộc DC' và $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DN} = y\overrightarrow{DC'}$

(1) Biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{BD'}$, $\overrightarrow{MN}$ theo $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{BB'} = \vec{c}$.;

(2) Tìm x và y sao cho $MN//BD'$, khi đó tính tỉ số $\dfrac{MN}{BD'}$.

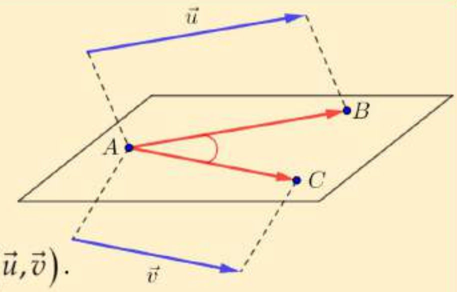
Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Dạng 4. Tích vô hướng và góc của hai vectơ

Phương pháp

Góc giữa hai vectơ:



Trong không gian, cho $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là hai vectơ khác $\vec{0}$.

- Lấy một điểm A bất kì,

  Gọi B và C là hai điểm sao cho $\overrightarrow{AB}=\vec{u}, \overrightarrow{AC}=\vec{v}$.

  Ta gọi $\widehat{BAC}$ là góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$. Kí hiệu là $(\vec{u},\vec{v})$.

Tích vô hướng hai vectơ:

Trong không gian, cho $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là hai vectơ khác $\vec{0}$.

- Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là một số. Kí hiệu là $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

  Được xác định bởi công thức: $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos(\vec{u},\vec{v})$

Chú ý:

(1) $0^\circ \le (\vec{u},\vec{v}) \le 180^\circ$

(2) Nếu $(\vec{u},\vec{v})=90^\circ$ thì ta nói $\vec{u}$ và $\vec{v}$ vuông góc với nhau, kí hiệu $\vec{u}\perp\vec{v}$.

(3) Khi $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng hướng thì $(\vec{u},\vec{v})=0^\circ$.

(4) Khi $\vec{u}$ và $\vec{v}$ ngược hướng thì $(\vec{u},\vec{v})=180^\circ$.

Ví dụ 4.1.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Xác định các góc:

(1) $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'D'})$ (2) $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'C'})$

(3) $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{D'C'})$ (4) $(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{C'B'})$

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 4.2.

Cho tứ diện đều $ABCD$ có H là trung điểm của AB. Hãy tính góc giữa các cặp vectơ

(1) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ (2) $\overrightarrow{CH}$ và $\overrightarrow{AC}$

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 4.3.

Cho tứ diện $ABCD$ có AC và BD cùng vuông góc với AB. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của hai cạnh AB, CD. Chứng minh rằng $IJ \perp AB$.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

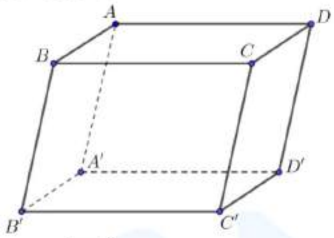
....

....

C Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm

» Câu 1. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$.



Vectơ nào sau đây cùng phương với $\overrightarrow{BC}$?

A. $\overrightarrow{DC}$ **B.** $\overrightarrow{DA}$ **C.** $\overrightarrow{BB'}$ **D.** $\overrightarrow{C'C}$

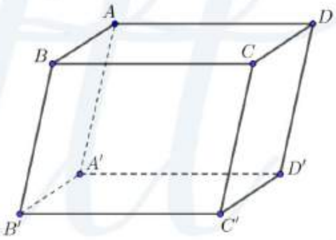
» Câu 2. Trong các vectơ sau, vectơ nào sau đây có điểm đầu là A, điểm cuối là B?

A. $\overrightarrow{AA}$ **B.** $\overrightarrow{BA}$ **C.** $\overrightarrow{AB}$ **D.** $\overrightarrow{BB}$

» Câu 3. Trong không gian cho 3 điểm phân biệt A, B, C. Vectơ nào trong các vec tơ sau đây là vectơ - không?

A. $\overrightarrow{BB}$ **B.** $\overrightarrow{BA}$ **C.** $\overrightarrow{BA}$ **D.** $\overrightarrow{CA}$

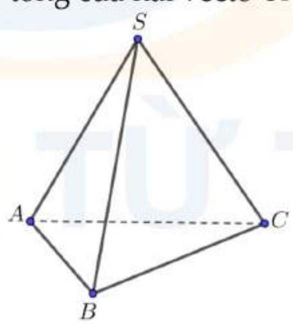
» Câu 4. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$.



Vectơ $\overrightarrow{BA}$ bằng với vectơ nào sau đây?

A. $\overrightarrow{A'B'}$ **B.** $\overrightarrow{CD}$ **C.** $\overrightarrow{BC}$ **D.** $\overrightarrow{AB}$

» Câu 5. Cho hình chóp $S.ABC$. Tìm vectơ tổng của hai vectơ $\overrightarrow{SA}$ và $\overrightarrow{AB}$?

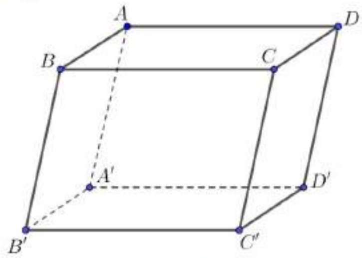


A. $\overrightarrow{BS}$ **B.** $\overrightarrow{BA}$ **C.** $\overrightarrow{SB}$ **D.** $\overrightarrow{SC}$

» Câu 6. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Tìm vectơ tổng của hai vectơ $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{AB}$.

A. $\overrightarrow{DB}$ **B.** $\overrightarrow{BD}$ **C.** $\overrightarrow{AC}$ **D.** $\overrightarrow{CA}$

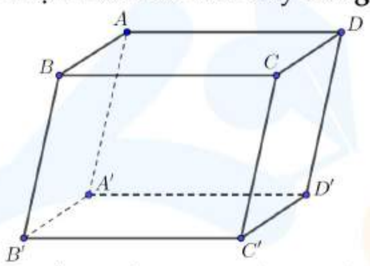
» Câu 7. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Mệnh đề nào sau đây ***đúng***?



A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$. **B.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AD}$.
C. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC'}$. **D.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AC}$.

» Câu 8. Cho hình chóp $S.ABC$. Mệnh đề nào sau đây ***đúng***?
A. $\overrightarrow{SA}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{SB}$. **B.** $\overrightarrow{SA}-\overrightarrow{SB}=\overrightarrow{AB}$. **C.** $\overrightarrow{SA}-\overrightarrow{SB}=\overrightarrow{BA}$. **D.** $\overrightarrow{SA}-\overrightarrow{SB}=\overrightarrow{SC}$.

» Câu 9. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Mệnh đề nào sau đây ***đúng***?

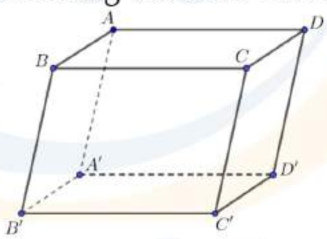


A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A'D'}=\overrightarrow{AC}$. **B.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A'D'}=\overrightarrow{BD}$. **C.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A'D'}=\overrightarrow{AC'}$. **D.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A'D'}=\overrightarrow{CA}$.

» Câu 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O. Tính tổng $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}$.
A. $2\overrightarrow{SO}$ **B.** $4\overrightarrow{SO}$ **C.** $3\overrightarrow{SO}$ **D.** $\vec{0}$

» Câu 11. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Tổng $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$ bằng
A. $\vec{0}$ **B.** $2\overrightarrow{AD}$ **C.** $2\overrightarrow{NM}$ **D.** $2\overrightarrow{MN}$

» Câu 12. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Tính tổng $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{A'C'}$.



A. $2\overrightarrow{AA'}$ **B.** $\vec{0}$ **C.** $2.\overrightarrow{AC}$. **D.** $2\overrightarrow{C'A'}$

» Câu 13. Cho khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Khi đó, góc giữa vecto $\overrightarrow{AB}$ và vecto $\overrightarrow{AD}$ là:
A. $90°$ **B.** $60°$ **C.** $45°$ **D.** $30°$

» Câu 14. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$. Đáy là tam giác ABC vuông tại B. Khi đó góc giữa vecto $\overrightarrow{BA}$ và vecto $\overrightarrow{B'C'}$ bằng bao nhiêu?
A. $45°$ **B.** $120°$ **C.** $90°$ **D.** $30°$

» Câu 15. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Khi đó, vecto bằng vecto $\overrightarrow{AB}$ là vecto nào dưới đây?
A. $\overrightarrow{D'C'}$ **B.** $\overrightarrow{BA}$ **C.** $\overrightarrow{CD}$ **D.** $\overrightarrow{B'A'}$

» Câu 16. Cho hình lăng trụ tam giác $ABCA'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AA'}=\vec{a},\overrightarrow{AB}=\vec{b},\overrightarrow{AC}=\vec{c},\overrightarrow{BC}=\vec{d}$. Trong các biểu thức véctơ sau đây, biểu thức nào **đúng**?

A. $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{d}$ **B.** $\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}$ **C.** $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$ **D.** $\vec{b}-\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$

» Câu 17. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vectơ: $\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{D'D}-\overrightarrow{B'D'}=k\overrightarrow{BB'}$

A. $k=4$ **B.** $k=1$ **C.** $k=0$ **D.** $k=2$

» Câu 18. Cho tứ diện $ABCD$, gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD; Đẳng thức nào **sai**?

A. $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right)$ **B.** $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right)$

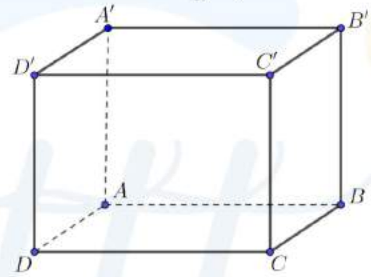
C. $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BD}\right)$ **D.** $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BD}\right)$

» Câu 19. Cho hình hộp $ABCD.EFGH$. Gọi O là trung điểm CH. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. $\overrightarrow{BO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BF}$ **B.** $\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BF}$.

C. $\overrightarrow{BO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BF}$. **D.** $\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BF}$.

» Câu 20. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Khẳng định nào sau đây là sai?



A. $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{A'D'}\right)=90°$. **B.** $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{A'C'}\right)=45°$.

C. $\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{B'D'}\right)=90°$. **D.** $\left(\overrightarrow{A'A};\overrightarrow{CB'}\right)=45°$.

» Câu 21. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. Tính góc $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)$.

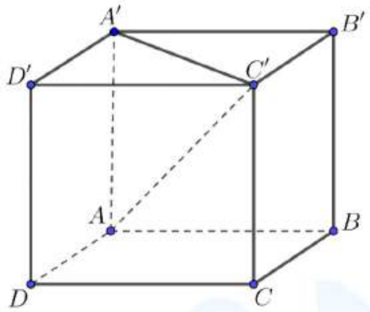
A. $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)=60°$. **B.** $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)=90°$.

C. $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)=120°$. **D.** $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)=180°$.

» Câu 22. Theo định luật II Newton: Gia tốc của một vật có cùng hướng với lực tác dụng lên vật. Độ lớn của gia tốc tỉ lệ thuận với độ lớn của lực và tỉ lệ nghịch với khối lượng của vật: $\vec{F}=m\vec{a}$, trong đó $\vec{a}$ là vectơ gia tốc $\left(\mathrm{m/s^2}\right)$, $\vec{F}$ là vectơ lực (N) tác dụng lên vật, $m(\mathrm{kg})$ là khối lượng của vật. Muốn truyền cho quả bóng có khối lượng $0{,}5\,\mathrm{kg}$ một gia tốc $20\ \mathrm{m/s^2}$ thì cần một lực đá có độ lớn là bao nhiêu?

A. $100(N)$. **B.** $20(N)$. **C.** $25(N)$. **D.** $10(N)$.

» Câu 23. Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$, trong đó mặt đáy là hình bình hành với $DAB = 120^\circ$. Biết độ dài các cạnh $AB = 25cm, AD = 12cm$ và $AA' = 12cm$. Tính $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}\right|$.



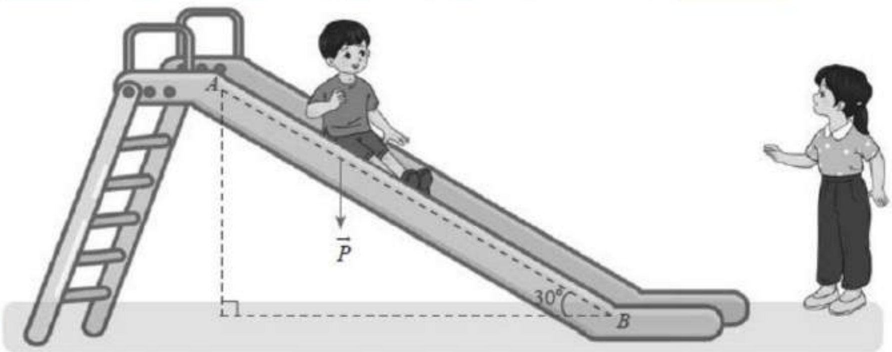
A. $12(cm)$. **B.** $\sqrt{469}(cm)$. **C.** $\sqrt{613}(cm)$. **D.** $25(cm)$.

» Câu 24. Một em nhỏ cân nặng $m = 25(kg)$ trượt trên cầu trượt dài $3,5(m)$ (như trong hình dưới đây). Biết rằng, cầu trượt có góc nghiêng so với phương nằm ngang là 30°. Trong các khẳng định sau, có bao nhiêu khẳng định đúng?

» Với gia tốc rơi tự do $\vec{g}$ có độ lớn là $g = 9,8\left(\text{m/s}^2\right)$ thì độ lớn của trọng lực $\vec{P} = m\vec{g}$ tác dụng lên em nhỏ có độ lớn là $245(N)$.

» Góc giữa độ dịch chuyển $\vec{d}$ so với trọng lực $\vec{P}$ là 30°.

» Công $A(J)$ sinh bởi một lực $\vec{F}$ có độ dịch chuyển $\vec{d}$ được tính bởi công thức $A = \left|\vec{F}\right|.\left|\vec{d}\right|.\cos\left(\vec{F};\vec{d}\right)$ thì công sinh bởi trọng lực $\vec{P}$ khi em nhỏ trượt hết chiều dài cầu trượt là $428,75(J)$.



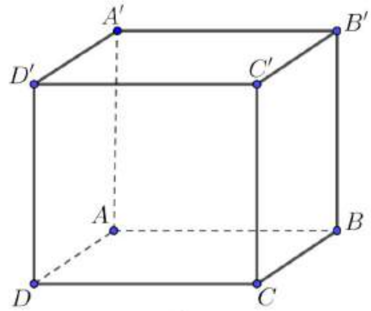
A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 0.

B. *Câu hỏi – Trả lời Đúng/sai*

» Câu 25. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 2, AD = 3, A'A = 4$.

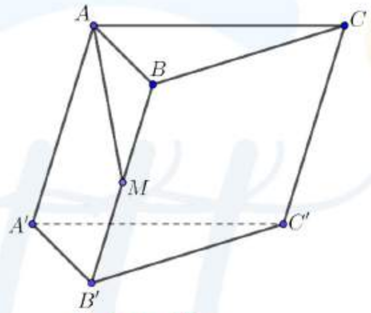
	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Vectơ $\overrightarrow{BA'}$ bằng vectơ $\overrightarrow{CD'}$.		
(b)	$\left\|\overrightarrow{BA'}\right\| = \left\|\overrightarrow{A'D}\right\| = \left\|\overrightarrow{DB}\right\|$		
(c)	Số các vectơ khác $\vec{0}$ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình hộp là A_8^2.		
(d)	Độ dài của vectơ $\overrightarrow{BD'}$ bằng $3\sqrt{3}$.		

» Câu 26. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.



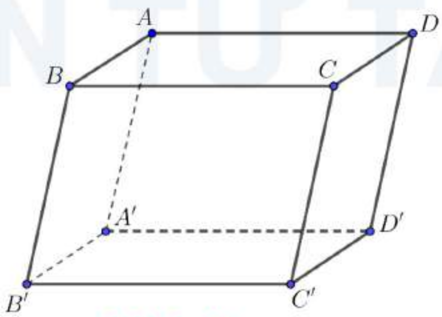
	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A'D'}+\overrightarrow{B'B}=\overrightarrow{A'C}$		
(b)	$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{B'A}$		
(c)	$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{D'B'}$		
(d)	$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DC}$		

» Câu 27. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M là trung điểm của BB' và G là trọng tâm tam giác ABC.



	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BB'}$		
(b)	$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{B'B}$		
(c)	$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB'}$		
(d)	$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$		

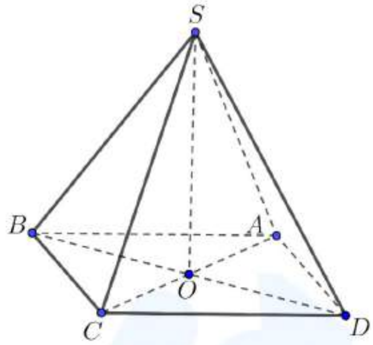
» Câu 28. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Khi đó



	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{C'D'}$ bằng nhau		
(b)	Hai vectơ $\overrightarrow{A'D}$ và $\overrightarrow{CB'}$ đối nhau		

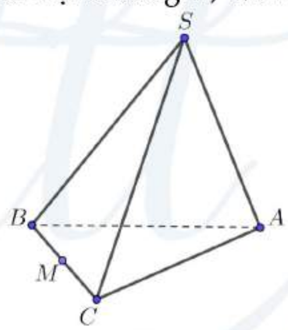
(c)	Hai vectơ $\overrightarrow{A'B'}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương với nhau		
(d)	Có 3 vectơ khác vectơ $\vec{0}$ bằng vectơ $\overrightarrow{BC}$		

» Câu 29. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có O là tâm của đáy $ABCD$, cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $2a$ (tham khảo hình bên).



	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{CB}$ là $0°$.		
(b)	Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{BD}$ và $\overrightarrow{BO}$ là $180°$.		
(c)	Cosin của góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{CS}$ bằng $\frac{1}{4}$.		
(d)	Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AO}$ và $\overrightarrow{SD}$ bằng $60°$.		

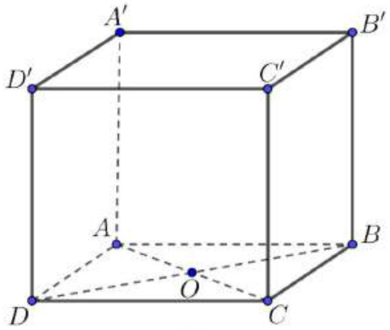
» Câu 30. Cho tứ diện đều $S.ABC$ có tất cả các cạnh bằng a, M là trung điểm của cạnh BC.



	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB}=\overrightarrow{SB}.\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC}$		
(b)	$\overrightarrow{AM}=-\overrightarrow{SA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{SB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{SC}$		
(c)	Góc giữa $\overrightarrow{SA}$ và $\overrightarrow{BC}$ bằng $90°$		
(d)	$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{SC}=0$		

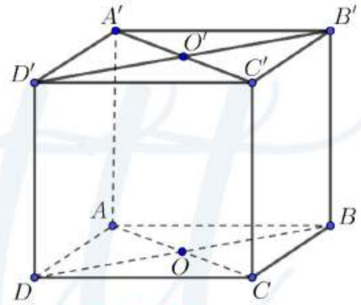
» Câu 31. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh a và $AA'=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Gọi O là giao điểm của AC và BD.



	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{C'A'}\right)=\left(AC,C'A'\right)$		
(b)	Gọi $\vec{u}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$, $\vec{v}=\overrightarrow{B'C'}$. Ta có $\left(\vec{u};\vec{v}\right)=60°$.		
(c)	Gọi $\vec{x}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$, $\vec{y}=\overrightarrow{A'C'}$. Ta có $\left(\vec{x};\vec{y}\right)=90°$.		
(d)	$\left(\overrightarrow{OA'},\overrightarrow{OC'}\right)=90°$		

» Câu 32. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi O,O' lần lượt là tâm của hình vuông $ABCD$ và $A'B'C'D'$.



	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC'}=\dfrac{a^2}{2}$		
(b)	$\overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{B'D'}=-\dfrac{a^2}{2}$		
(c)	$\left\|\overrightarrow{D'A'}+\overrightarrow{C'C}+\overrightarrow{AB}\right\|=a\sqrt{3}$		
(d)	$\left\|\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{OC'}+\overrightarrow{OD'}\right\|=4a$		

C. Câu hỏi – Trả lời ngắn

» Câu 33. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, từ các đỉnh của hình hộp đã cho, có bao nhiêu vectơ đối (khác vectơ không) của vectơ $\overrightarrow{AB}$?

Điền đáp số:

» Câu 34. Cho tứ diện $ABCD$, gọi M,N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Biết rằng $\overrightarrow{MN}=a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC}+c\overrightarrow{AD}$. Giá trị của biểu thức $a+b+c$ bằng:

Điền đáp số:

» Câu 35. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Giá trị tan của góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AD'}$ và $\overrightarrow{A'C'}$ bằng (làm tròn tới hàng phần nghìn).

✍ **Điền đáp số:**

» Câu 36. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ tạo với nhau một góc 120°, đồng thời $|\vec{a}| = 2$ và $|\vec{b}| = 5$. Đặt $\vec{u} = k\vec{a} - \vec{b}$ và $\vec{v} = \vec{a} + 2\vec{b}$. Để $\vec{u} \perp \vec{v}$ thì giá trị của k là

✍ **Điền đáp số:**

» Câu 37. Cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng. Xét $\vec{x} = 2\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$, $\vec{y} = -\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}$, $\vec{z} = \vec{a} + 4\vec{b} + m\vec{c}$. Giá trị của m để các vectơ $\vec{x}; \vec{y}; \vec{z}$ đồng phẳng bằng?

✍ **Điền đáp số:**

» Câu 38. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ như hình vẽ. Đặt một vật tại đỉnh A, khi đó tác động vào vật bởi những lực $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \vec{F_3}$ có giá lần lượt nằm trên các cạnh AB, AD, AA' và $|\vec{F_1}| = 2N, |\vec{F_2}| = 3N, |\vec{F_3}| = 4N$. Hãy xác định độ lớn của hợp lực $\vec{F}$ tác động lên vật (làm tròn đến hàng phần nghìn).

✍ **Điền đáp số:**

» Câu 39. Cho tứ diện $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$ gọi G là trọng tâm của tam giác BCD. Tìm giá trị thích hợp của k thỏa đẳng thức vectơ $\overrightarrow{AG} = k.\left(\vec{c} + \vec{b} + \vec{a}\right)$. (làm tròn tới hàng phần nghìn).

✍ **Điền đáp số:**

» Câu 40. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Tìm giá trị thích hợp của k thỏa đẳng thức vectơ: $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = k.\overrightarrow{DG}$?

✍ **Điền đáp số:**

» Câu 41. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$ và $ASB = BSC = CSA$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{SC}$ và $\overrightarrow{AB}$?

✍ **Điền đáp số:**

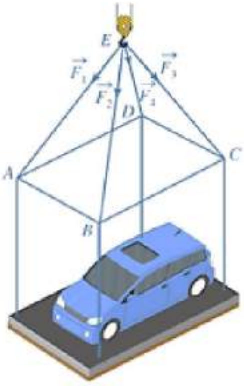
» Câu 42. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh bằng a và các cạnh bên đều bằng a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và SD. Số đo của góc (MN, SC) bằng bao nhiêu?

✍ **Điền đáp số:**

» Câu 43. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB$ và $CA = CB$. Tính số đo của góc giữa hai đường thẳng chéo nhau SC và AB.

✍ **Điền đáp số:**

» Câu 44. Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới của một khung sắt có dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình chữ nhật $ABCD$, mặt phẳng $(ABCD)$ song song với mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được buộc vào móc E của chiếc cần cẩu sao cho các đoạn dây cáp EA, EB, EC, ED có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc bằng $60°$. Chiếc cần cẩu kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng.



Tính trọng lượng của chiếc xe ô tô (làm tròn đến hàng đơn vị), biết rằng các lực căng $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}, \overrightarrow{F_4}$ đều có cường độ là $4700N$ và trọng lượng của khung sắt là $3000N$.

Điền đáp số:

» Câu 45. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD$ và $BAC = BAD = 60^\circ, CAD = 90^\circ$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{IJ}$ và $\overrightarrow{CD}$.

Điền đáp số:

-------------------- Hết --------------------

Chương 02

Bài 2. TỌA ĐỘ CỦA VECTO TRONG KHÔNG GIAN

A Lý thuyết

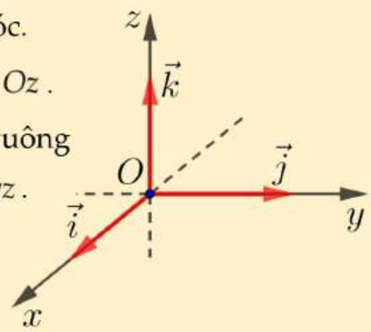
1. Hệ tọa độ trong không gian.

Định nghĩa:

Trong không gian, cho ba trục Ox, Oy, Oz đôi một vuông góc.

» Gọi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lần lượt là ba vectơ đơn vị trên các trục Ox, Oy, Oz.

» Hệ ba trục như vậy được gọi là hệ trục tọa độ Descartes vuông góc $Oxyz$ trong không gian hay gọi đơn giản hệ tọa độ $Oxyz$.



2. Tọa độ của điểm và vectơ.

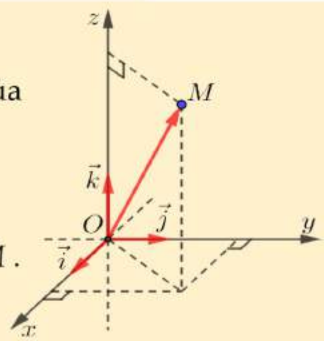
Tọa độ điểm

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm M.

» Nếu $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ thì ta gọi bộ ba số $(x;y;z)$ là tọa độ của điểm M đối với hệ trục toạ độ $Oxyz$.

» Viết $M = (x;y;z)$ hoặc $M(x;y;z)$;

Trong đó x là hoành độ, y là tung độ, z là cao độ của điểm M.



Tọa độ vecto

Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{a}$.

» Nếu $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ thì ta gọi bộ ba số $(a_1;a_2;a_3)$ là tọ độ của vectơ $\vec{a}$ đối với hệ toạ độ $Oxyz$

» Viết $\vec{a} = (a_1;a_2;a_3)$ hoặc $\vec{a}(a_1;a_2;a_3)$;.

Trong đó a_1 là hoành độ, a_2 là tung độ, a_3 là cao độ của vectơ $\vec{a}$.

B. Các dạng bài tập

Dạng 1. Tọa độ điểm

Phương pháp

» Nếu $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$ thì $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$.

» Nếu $\overrightarrow{OM}=m_1\vec{i}+m_2\vec{j}+m_3\vec{k}$ thì $\overrightarrow{OM}=(m_1;m_2;m_3)\Rightarrow M(m_1;m_2;m_3)$.

» Nếu $\overrightarrow{MO}=m_1\vec{i}+m_2\vec{j}+m_3\vec{k}$ thì $\overrightarrow{MO}=(m_1;m_2;m_3)\Rightarrow M(-m_1;-m_2;-m_3)$.

(1) M thuộc các trục tọa độ: .... $\left[\begin{array}{l} M\in Ox\to M(x;0;0)\\ M\in Oy\to M(0;y;0)\\ M\in Oz\to M(0;0;z)\end{array}\right.$

(2) M thuộc các mặt phẳng tọa độ: .... $\left[\begin{array}{l} M\in (Oxy)\to M(x;y;0)\\ M\in (Oxz)\to M(x;0;z)\\ M\in (Oyz)\to M(0;y;z)\end{array}\right.$

Ví dụ 1.1.

Xác định tọa độ điểm M trong các trường hợp sau

(1) $\overrightarrow{MO}=2\vec{i}-3\vec{k}$ (2) $\overrightarrow{OM}=2\overrightarrow{OA}+\vec{i}$ với $A(2;-3;1)$

Lời giải

....
....
....
....
....

Ví dụ 1.2.

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(-4;3;-1)$ và $N(2;-1;-3)$. Tìm tọa độ của các vectơ $\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}$.

Lời giải

....
....
....
....
....

Ví dụ 1.3.

Cho điểm $M(-2;5;3)$. Tìm hình chiếu vuông góc của điểm M trên các trục tọa độ.

Lời giải

....
....
....
....
....

Ví dụ 1.4.

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;-3)$ và vectơ $\vec{u}=(3;-4;2)$. Hãy biểu diễn theo các vectơ $\vec{i},\vec{j}$ và $\vec{k}$ mỗi vectơ sau:

(1) $\overrightarrow{OA}$

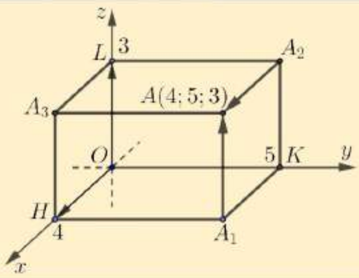
(2) $\vec{u}$

Lời giải

....
....
....
....
....

Ví dụ 1.4.

Trong không gian $Oxyz$, cho tọa độ $A(4;5;3)$ và vị trí các điểm $L;K;H;A_1;A_2;A_3$ như hình vẽ bên. Xác định tọa độ của các vectơ $\overrightarrow{A_1A},\overrightarrow{A_2A}$



Lời giải

....
....
....
....
....

Dạng 2. Tọa độ vectơ

Phương pháp

Xét hai véctơ $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ và $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$ ta có:

(1) Hai véctơ bằng nhau: .... $\vec{a}=\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1=b_1 \\ a_2=b_2 \\ a_3=b_3 \end{cases}$.

(2) $ABCD$ là hình bình hành .... $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

Ví dụ 2.1.

Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}=3\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$

(1) Xác định tọa độ vectơ $\vec{a}$.

(2) Tìm $x;y;z$ để $\vec{b}=(x+2y-z-1;x-y+3z+1;3x-y-z-6)$ bằng $\vec{a}$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 2.2.

Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $M(1;1;1), N(2;3;4), P(7;7;5)$. Tìm tọa độ điểm Q để tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành .

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 2.3.

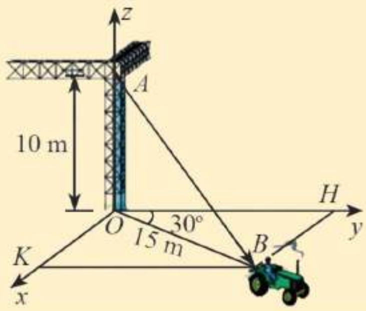
Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(1;3;-2), B(3;-2;4)$, $D(5;2;4), D'(4;1;2)$. Tìm tọa độ đỉnh C'.

Lời giải

Dạng 3. Bài toán thực tế

Ví dụ 3.1.

Một chiếc xe đang kéo căng sợi dây cáp AB trong công trường xây dựng, trên đó đã thiết lập hệ toạ độ $Oxyz$ như hình bên dưới với độ dài đơn vị trên các trục toạ độ bằng 1m. Tìm tọa độ của vecto $\overrightarrow{AB}$.

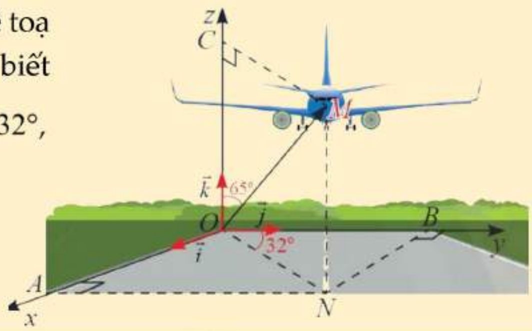


Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 3.2.

Một máy bay đang cất cánh từ phi trường. Với hệ toạ độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên dưới , cho biết M là vị trí của máy bay, $OM = 14$, $\widehat{NOB} = 32°$, $\widehat{MOC} = 65°$. Tìm tọa độ điểm M.



Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

C Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm

» Câu 1. Trong không gian $Oxyz$ giả sử $\overrightarrow{OM}=2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$, khi đó tọa độ điểm M là

A. $(-2;3;1)$. **B.** $(2;-3;-1)$. **C.** $(2;3;-1)$. **D.** $(2;3;1)$.

» Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho $\overrightarrow{AO}=\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}$. Tọa độ của điểm A là

A. $(-1;2;-3)$. **B.** $(2;-3;-1)$. **C.** $(-3;2;-1)$. **D.** $(2;-1;-3)$.

» Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào sau đây thuộc trục Oy?

A. $M(0;5;0)$ **B.** $N(4;0;0)$ **C.** $P(0;0;6)$ **D.** $Q(4;5;0)$

» Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào sau đây nằm trên mặt phẳng tọa độ (Oyz)?

A. $N(0;4;-1)$ **B.** $P(-2;0;3)$ **C.** $M(3;4;0)$. **D.** $Q(2;0;0)$

» Câu 5. Trong không gian $Oxyz$ với $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ lần lượt là các vecto đơn vị trên các trục Ox, Oy, Oz. Tính tọa độ của vecto $\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$.

A. $\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}=(-1;-1;1)$ **B.** $\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}=(1;1;-1)$

C. $\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}=(-1;1;1)$ **D.** $\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}=(1;-1;1)$

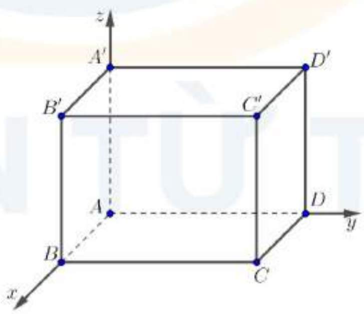
» Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(2;-1;0)$ và $B(1;1;-3)$. Vecto $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ là

A. $(-1;2;-3)$ **B.** $(1;-2;3)$ **C.** $(-1;-2;3)$. **D.** $(1;-2;3)$

» Câu 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm A thỏa $\overrightarrow{OA}=2\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k}$ và $B(2;1;4)$. Tọa độ của véctơ $\overrightarrow{BA}$ là

A. $(0;-4;0)$. **B.** $(4;-2;8)$. **C.** $(-1;-1;2)$. **D.** $(-2;-2;4)$.

» Câu 8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài cạnh bằng 1 như hình vẽ.



Tọa độ của véctơ $\overrightarrow{AC}$ là

A. $(1;1;0)$. **B.** $(0;1;1)$. **C.** $(1;0;1)$. **D.** $(1;1;1)$.

» Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, tọa độ hình chiếu của $M(2;1;4)$ lên trục Ox là

A. $(2;0;0)$. **B.** $(0;1;0)$. **C.** $(0;0;4)$. **D.** $(0;1;4)$.

» Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, tọa độ hình chiếu của $M(-2;1;4)$ lên Oyz là

A. $(-2;0;0)$. **B.** $(0;1;0)$. **C.** $(0;0;4)$. **D.** $(0;1;4)$.

» Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$, $C(-3;5;1)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

A. $D(-2;8;-3)$. **B.** $D(-2;2;5)$. **C.** $D(-4;8;-5)$. **D.** $D(-4;8;-3)$.

» Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(1;0;1)$, $B(2;1;2)$, $D(1;-1;1)$, $C'(4;5;-5)$. Tính tọa độ đỉnh A' của hình hộp.

A. $A'(3;4;-6)$. **B.** $A'(4;6;-5)$. **C.** $A'(2;0;2)$. **D.** $A'(3;5;-6)$.

» Câu 13. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MO}=3\vec{k}-2\vec{i}+4\vec{j}$. Tọa độ điểm M bằng

A. $(3;-2;4)$. **B.** $(-2;4;3)$. **C.** $(2;-4;-3)$. **D.** $(3;2;4)$.

» Câu 14. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{OM}=(2x-4)\vec{i}-4\vec{j}+(y-1)\vec{k}$. Khi điểm $M\in Oy$ thì giá trị $x+2y$ bằng?

A. 2. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 3.

» Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm A thỏa $\overrightarrow{AO}=4\vec{k}-2\vec{j}$ và $B(1;2;-1)$. Tọa độ của véctơ $\overrightarrow{AB}$ là

A. $(1;0;3)$. **B.** $(0;2;4)$. **C.** $(0;-2;-4)$. **D.** $(-1;0;-3)$.

» Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}=(2;-2;1)$ và $\vec{b}=(x-1)\vec{i}+(x^2-3)\vec{j}+y\vec{j}$. Khi $\vec{a}=\vec{b}$ thì giá trị $x-y$ bằng?

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** -1.

» Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{b}=4\vec{j}-\vec{i}$. Tọa độ $\vec{b}$ bằng?

A. $(-1;4;0)$. **B.** $(1;4;0)$. **C.** $(0;-1;4)$. **D.** $(4;-1;0)$.

» Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$; $M(x-1;2y-2;7)$. Gọi M' là hình chiếu của M trên mặt phẳng (Oxy). Khi tứ giác $OBM'A$ là hình bình hành thì giá trị $x+y$ bằng?

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** -1.

» Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $A(1;2;3)$ trên mặt phẳng (Oxz) là

A. $P(0;2;3)$. **B.** $M(1;0;3)$. **C.** $N(0;2;0)$. **D.** $Q(1;2;0)$.

» Câu 20. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1;2;3)$. Điểm đối xứng với A qua trục Oz có tọa độ là

A. $(1;2;-3)$. **B.** $(-1;-2;3)$. **C.** $(0;0;3)$. **D.** $(-1;2;3)$.

» Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1;0;3)$; $B(2;3;-4)$; $C(-3;1;2)$. Điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành có tọa độ là

A. $D(-4;-2;9)$. **B.** $D(4;2;9)$. **C.** $D(6;2;-3)$. **D.** $D(-2;4;5)$.

Dùng dữ liệu sau để trả lời các câu hỏi 22, 23, 24.

Cần trục chân đế là kiểu cột quay được sử dụng để phục vụ công việc xếp dỡ hàng hóa chủ yếu ngoài các cảng bến, bãi (hình ảnh minh họa). Ta chọn hệ trục $Oxyz$ thỏa trục Ox trùng với trục chân đế, trục Oy vuông góc với trục Ox và trục Oz trùng với trục cần cẩu (theo đơn vị mét, như hình vẽ). Gọi M là vị trí tại đỉnh cần cẩu, H là hình chiếu của M lên (Oxy). Biết tay cần KM của cần trục dài $50m$, trục cần OK dài $50m$, $(\vec{k};\overrightarrow{KM})=60°;(\vec{i};\overrightarrow{OH})=45°$.

» Câu 22. Điểm M có cao độ z_M là bao nhiêu

A. $\frac{100\sqrt{3}}{2}$. **B.** $93,3$. **C.** 75. **D.** 60.

» Câu 23. Điểm H có tọa độ là bao nhiêu

A. $(25\sqrt{2};25\sqrt{2},0)$. **B.** $(25;25,0)$.

C. $\left(\frac{25\sqrt{6}}{2};\frac{25\sqrt{6}}{2},0\right)$. **D.** $\left(\frac{5\sqrt{2}}{2};\frac{5\sqrt{2}}{2},0\right)$.

» Câu 24. Vectơ $\overrightarrow{KM}$ có tọa độ là bao nhiêu

A. $(25\sqrt{2};25\sqrt{2},25)$. **B.** $(25;25,25)$.

C. $\left(\frac{25\sqrt{2}}{2};\frac{25\sqrt{2}}{2},25\right)$. **D.** $\left(\frac{25\sqrt{6}}{2};\frac{25\sqrt{6}}{2},25\right)$.

B. Câu hỏi – Trả lời đúng/sai

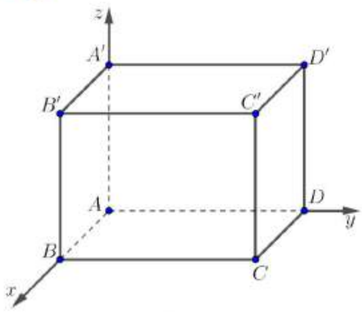
» Câu 25. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2;4;6)$ và $\overrightarrow{ON}=2\vec{i}+\vec{k}$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Tọa độ điểm $N(2;1;0)$		
(b)	Hình chiếu vuông góc của M trên trục Oz là điểm $M'(0;0;6)$		
(c)	Hình chiếu vuông góc của M trên mặt (Oxy) là điểm $N(2;4;0)$		
(d)	Đối xứng với điểm M qua mặt (Oyz) là điểm $K(-2;0;0)$		

» Câu 26. Trong không gian $Oxyz$, cho hình bình hành $OABC$ với $A(1;2;3)$, $B(5;0;-1)$, và $C(a;b;c)$

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Tọa độ điểm $O(0;0;1)$.		
(b)	Tọa độ vectơ $\overrightarrow{OA}=(1;2;3)$		
(c)	$\overrightarrow{OB}=5.\vec{i}-\vec{k}$		
(d)	Nếu $OABC$ hình bình hành, thì $a+b+c=2$		

» Câu 27. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0;0;0)$, $B(3;0;0)$, $D(0;3;0)$, $D'(0;3;3)$.



Hãy xác định tính đúng sai của các mệnh đề

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\overrightarrow{AB} = 3\vec{i} + \vec{j}$		
(b)	$A'(0;0;3)$		
(c)	M là trung điểm DD'. Khi đó, tọa độ điểm $M(0;3;-3)$		
(d)	Tọa độ điểm $C'(3;\ 3;\ 0)$		

» Câu 28. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{OM} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Tọa độ của điểm M là: $(2;1;1)$		
(b)	Hình chiếu của điểm M lên trục Ox là: $(2;1;0)$		
(c)	Hình chiếu của điểm M lên trục Oy là: $(0;1;0)$		
(d)	Hình chiếu của điểm M lên mặt phẳng Oxy là: $(2;0;1)$		

» Câu 29. Trong không gian $Oxyz$, cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 4, đỉnh A trùng với gốc O, các điểm B, D, A' lần lượt nằm trên các tia Ox, Oy, Oz.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Tọa độ của điểm D là: $(4;0;0)$		
(b)	Tọa độ của vec tơ C là: $(0;4;0)$		
(c)	Tọa độ của vec tơ A' là: $(0;0;4)$		
(d)	Tọa độ của vec tơ C' là: $(4;4;4)$		

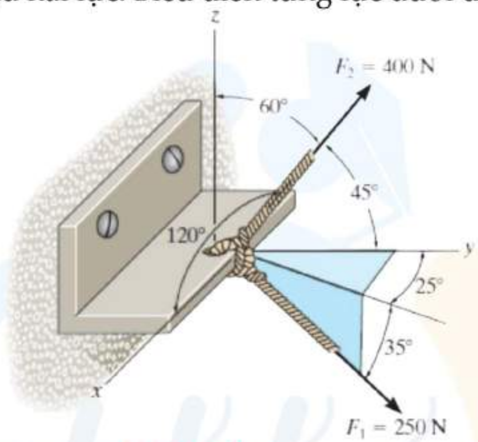
» Câu 30. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đỉnh A trùng với gốc O, các vec tơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'}$ theo thứ tự cùng hướng với $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ và có $AB = 3$, $AC = 5; AA' = 6$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Tọa độ của vec tơ $\overrightarrow{AB}$ là: $(3;0;0)$		
(b)	Tọa độ của vec tơ $\overrightarrow{AC}$ là: $(3;4;6)$		
(c)	Tọa độ của vec tơ $\overrightarrow{AC'}$ là: $(3;-4;6)$		
(d)	Tọa độ của vec tơ $\overrightarrow{AM}$ là: $\left(\frac{3}{2};4;6\right)$, với M là trung điểm của $C'D'$.		

» **Câu 31.** Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(1;0;1)$, $B(2;1;2)$, $D(1;-1;1)$, $D'(3;4;-6)$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Tọa độ $\overrightarrow{AB}=(1;1;1)$		
(b)	Tọa độ $C(2;1;2)$		
(c)	Tọa độ $A'(3;5;-6)$		
(d)	Toạ độ trọng tâm tam giác $A'B'C$ là $G(3;4;-3)$		

» **Câu 32.** Dưới đây là một giá đỡ chịu hai lực. Biểu diễn từng lực dưới dạng vecto Descartes



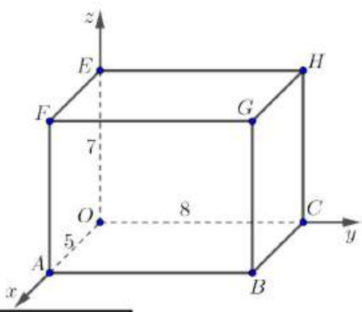
	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\overrightarrow{F_2}=-200\vec{i}+281\vec{j}+200\vec{k}$		
(b)	$\overrightarrow{F_1}=86,547\vec{i}+185,601\vec{j}-143,394\vec{k}$		
(c)	Độ lớn lực tổng hợp lên giá đỡ bằng $485,297N$		
(d)	Góc tạo bởi lực tổng hợp lên trục Oy là $16,145°$		

C. *Câu hỏi – Trả lời ngắn*

» **Câu 33.** Trong không gian $Oxyz$, cho $\overrightarrow{OA}=3\vec{i}+4\vec{j}-5\vec{k}$. Tọa độ điểm $A(x;y;z)$. Giá trị biểu thức $S=100x+1000y+10z$ bằng bao nhiêu?

Điền đáp số:

» **Câu 34.** Trong không gian $Oxyz$ cho hình hộp chữ nhật $OABC.EFGH$ có các cạnh $OA=5$, $OC=8$, $OE=7$ (xem hình vẽ dưới đây). Tọa độ $H(x;y;z)$. Tính giá trị biểu thức $P=50x+75y+1000z$



Điền đáp số:

» **Câu 35.** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(4;2;1)$, $B(-2;-1;4)$. Gọi M là điểm thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{MB}$. Tìm độ dài vectơ $\overrightarrow{OM}$.

Điền đáp số:

» **Câu 36.** Trong không gian $Oxyz$, cho $A(3;2;-1)$, $B(-1;0;5)$. Điểm $M(a;b;c)$ thay đổi thuộc mặt phẳng (Oxy). Tính giá trị của biểu thức $T=a+b+c$ khi $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|$ nhỏ nhất.

Điền đáp số:

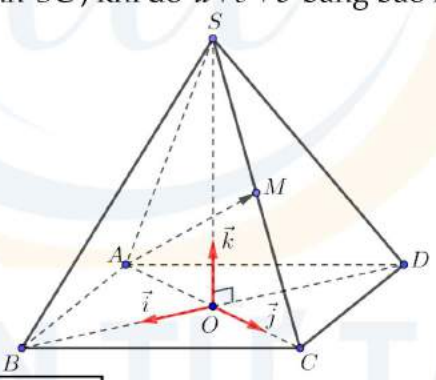
» **Câu 37.** Trong không gian $Oxyz$ cho $A(1;0;2)$, $B(-1;2;2)$, $C(3;1;1)$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm thuộc mặt phẳng (Oxz) sao cho biểu thức $S=2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}+3\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó $T=6a-5b+3c$ có giá trị là

Điền đáp số:

» **Câu 38.** Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0;0;0)$, $B(3;0;0), D(0;3;0), D'(0;3;-3)$. Gọi G là trọng tâm tam giác $A'B'C$ và tọa độ vecto $\overrightarrow{AG}=(a;b;c)$. Tính $S=a+b+c$.

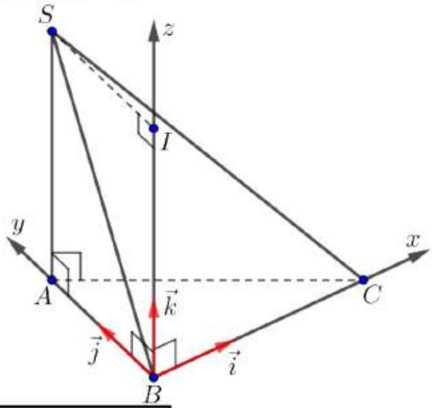
Điền đáp số:

» **Câu 39.** Trong không gian $Oxyz$, cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh bằng 5, giao điểm hai đường chéo AC và BD trùng với gốc O. Các vectơ $\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OS}$ lần lượt cùng hướng với $\vec{i}$, $\vec{j}, \vec{k}$ và $OA=OS=4$ như hình bên dưới. Toạ độ vecto $\overrightarrow{AM}=(a;b;c)$ với M là trung điểm của cạnh SC, khi đó $a+b+c$ bằng bao nhiêu?



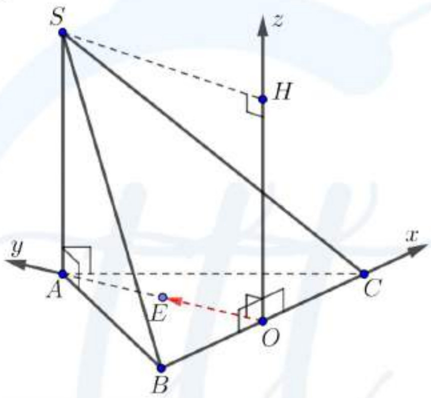
Điền đáp số:

» **Câu 40.** Cho tứ diện $SABC$ có ABC là tam giác vuông tại B, $BC=3$, $BA=2$, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và có độ dài bằng 2. Chọn hệ trục tọa độ như hình bên dưới. Điểm $D(a;b;c)$ sao cho $SBCD$ là hình bình hành. Khi đó $a+b+c$ bằng bao nhiêu?



✍ **Điền đáp số:**

» **Câu 41.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng 2, SA vuông góc với đáy và SA bằng 1. Thiết lập hệ tọa độ như hình vẽ bên dưới, tọa độ điểm $S\left(a;\sqrt{b};c\right)$. Khi đó $a+b+c$ bằng bao nhiêu?



✍ **Điền đáp số:**

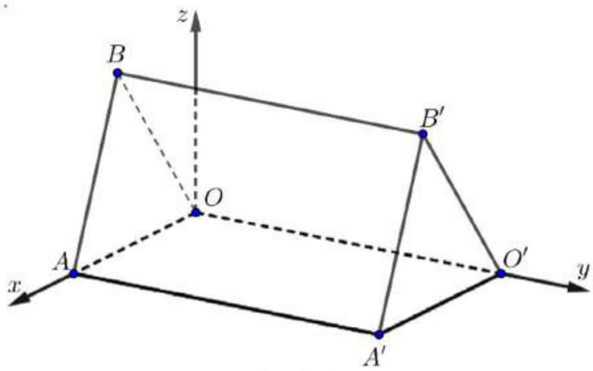
» **Câu 42.** Trong không gian với một hệ trục toạ độ cho trước (đơn vị đo lấy theo kilômét), ra đa phát hiện một chiếc máy bay di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $A\left(800;500;7\right)$ đến điểm $B\left(940;550;9\right)$ trong 10 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì toạ độ của máy bay sau 5 phút tiếp theo là $C(x;y;z)$. Tính $x+y+z$.

✍ **Điền đáp số:**

» **Câu 43.** Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $OABC.O'A'B'C'$ và các điểm $A\left(2;3;1\right)$, $C\left(-1;2;3\right)$ và $O'\left(1;-2;2\right)$. Vecto $\vec{d}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}$ có tọa độ là $\left(a;b;c\right)$. Tính $a+b+c$.

» **Câu 44.** Những căn nhà gỗ trong *Hình 1* được phác thảo dưới dạng một hình lăng trụ đứng tam giác $OAB.O'A'B'$ như trong *Hình 2*. Với hệ trục toạ độ $Oxyz$ thể hiện như *Hình 2* (đơn vị đo lấy theo centimét), hai điểm A' và B' có tọa độ lần lượt là $\left(240;450;0\right)$ và $\left(120;450;300\right)$. Mỗi căn nhà gỗ có chiều dài là a cm, chiều rộng là b cm, mỗi cạnh bên của mặt tiền có độ dài là c cm. Tính $a+b+c$ (Làm tròn đến hàng đơn vị).

Hình 1



Hình 2

Điền đáp số:

--------------------Hết--------------------

Chương 02

Bài 3. BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTƠ

A. Lý thuyết

1. Biểu thức tọa độ của tổng, hiệu hai vectơ và tích của một số với một vectơ

Định nghĩa:

Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ và $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$ và số k. Khi đó:

» $\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1;a_2+b_2;a_3+b_3)$

» $\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1;a_2-b_2;a_3-b_3)$

» $k\vec{a}=(ka_1;ka_2;ka_3)$

⁂ ***Nhận xét:*** Hai vectơ $\vec{a};\vec{b}$ với $\vec{b}\neq\vec{0}$ cùng phương $\vec{a}=k.\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1=k.b_1 \\ a_2=k.b_2 \end{cases}$

Chú ý

» Từ nay, các bài tập liên quan đến toạ độ đều được xét trong không gian $Oxyz$.

2. Biểu thức tọa độ của tích vô hướng

Định nghĩa:

Trong không gian $Oxyz$, tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ và $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$ được xác định bởi công thức

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3.$$

3. Vận dụng

Tọa độ điểm đầu cuối:

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(x_A;y_A;z_A), B(x_B;y_B;z_B)$.

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A)$.

Tọa độ trung điểm đoạn thẳng

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(x_A;y_A;z_A), B(x_B;y_B;z_B)$.

Toạ độ trung điểm M của đoạn thẳng AB là: $M\left(\dfrac{x_A+x_B}{2};\dfrac{y_A+y_B}{2};\dfrac{z_A+z_B}{2}\right)$

Tọa độ trọng tâm tâm giác

Trong không gian $Oxyz$, cho ΔABC có $A\left(x_A;y_A;z_A\right), B\left(x_B;y_B;z_B\right)$ và $C\left(x_C;y_C;z_C\right)$.

Tọa độ trọng tâm G của ΔABC là: $G\left(\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3};\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3};\dfrac{z_A+z_B+z_C}{3}\right)$.

B. Các dạng bài tập

Dạng 1. Tọa độ tổng hiệu vectơ

Phương pháp

Trong không gian $Oxyz$, hai vectơ $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ và $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$ và số thực k.

(1) $\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1;a_2+b_2;a_3+b_3)$

(2) $\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1;a_2-b_2;a_3-b_3)$

(3) $k\vec{a}=(ka_1;ka_2;ka_3)$

(4) $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương $\Leftrightarrow \begin{cases} a_1=kb_1 \\ a_2=kb_2 \\ a_3=kb_3 \end{cases}$

Ví dụ 1.1.

Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}=(2;-1;5)$ và $\vec{b}=(0;-2;-4)$. Tìm tọa độ của các vectơ sau: $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$, $5\vec{a}$, $2\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$.

Lời giải

....
....
....
....
....

Ví dụ 1.2.

Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1;-3;-2)$, $B(2;3;4)$ và $C(3;5;7)$.
Chứng minh rằng ba điểm A,B,C tạo thành tam giác.

Lời giải

....
....
....
....
....

Dạng 2. Tọa độ điểm – vectơ thỏa điều kiện

Phương pháp

(1) Tích vô hướng của hai vectơ: $\vec{a}.\vec{b} = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2$.

(2) $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc $\Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$

(3) I là trung điểm AB: $I\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}; \dfrac{y_A + y_B}{2}; \dfrac{z_A + z_B}{2}\right)$

$$\to \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0} \Rightarrow \forall M: \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$$

(4) G là trọng tâm ΔABC: $G\left(\dfrac{x_A + x_B + x_C}{3}; \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3}; \dfrac{z_A + z_B + z_C}{3}\right)$

$$\to \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Rightarrow \forall M: \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$$

(5) G là trọng tâm chóp $ABCD$: $G\left(\dfrac{x_A + x_B + x_C + x_D}{4}; \dfrac{y_A + y_B + y_C + y_D}{4}; \dfrac{z_A + z_B + z_C + z_D}{4}\right)$

$$\to \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0} \Rightarrow \forall M: \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG}$$

Ví dụ 2.1.

Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;2;1)$, $B(1;-1;2)$ và $C(1;2;-1)$. Tìm tọa độ vectơ $\vec{u}$ thỏa $\vec{u} = \overrightarrow{BC} - 3\overrightarrow{AO}$.

Lời giải

....
....
....
....
....

Ví dụ 2.2.

Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$ và $C(-3;5;1)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{DC}$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 2.3.

Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;2)$ và $D(2;2;2)$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm AB và CD. Xác định Tọa độ trung điểm I của MN

Lời giải

....

....

....

....

....

Ví dụ 2.4.

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;-1)$ và $B(0;-2;3)$. Tìm tọa độ chân đường cao kẻ từ đỉnh O của tam giác OAB.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 2.5.

Trong không gian $Oxyz$, cho ΔABC biết $A(2;4;-3)$ có trọng tâm $G(2;1;0)$. Khi đó xác định tọa độ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Dạng 3. Độ dài vectơ

Phương pháp

(1) $\overrightarrow{AB}=\left(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A\right)\to AB=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2+\left(z_B-z_A\right)^2}$

(2) Độ dài véctơ $\vec{a}$: $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{\left(a_1\right)^2+\left(a_2\right)^2+\left(a_3\right)^2}\longrightarrow\left|\vec{a}\right|^2=\vec{a}^2=\left(a_1\right)^2+\left(a_2\right)^2+\left(a_3\right)^2$

Ví dụ 3.1.

Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1;2;-1)$ và $B(0;3;1)$. Tính độ dài đoạn thẳng AB.

Lời giải

....

....

Ví dụ 3.2.

Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC biết $A(1;0;-2), B(2;1;-1)$, $C(1;-2;2)$. Tìm chu vi của ΔABC.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 3.3.

Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1;2;-1)$, $B(0;3;1)$; $C(3;2;0)$. Tính diện tích ΔABC (nếu có).

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 3.4.

Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;0;0)$, $B(0;3;1)$, $C(-3;6;4)$. Tìm điểm M thuộc đoạn BC sao cho $MC=2MB$. Tìm độ dài đoạn AM.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Dạng 4. Sự cùng phương của hai vectơ

Phương pháp

Xét hai véctơ $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ và $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$ ta có:

(1) Hai véctơ bằng nhau: $\vec{a}=\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1=b_1 \\ a_2=b_2 \\ a_3=b_3 \end{cases}$

(2) Véctơ $\vec{a}$ cùng phương véctơ $\vec{b}$: $\vec{a}=k.\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1=k.b_1 \\ a_2=k.b_2 \\ a_3=k.b_3 \end{cases}$

Ví dụ 4.1.

Trong không gian $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a}=(4;1;-2)$; $\vec{b}=(1;-2;-1)$; $\vec{c}=(8;2;-4)$; $\vec{d}=(-4;-1;2)$. Vectơ $\vec{a}=(4;1;-2)$ cùng phương với vectơ nào đã cho?

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 4.2.

Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}=(1;1;5)$ và $\vec{b}=(m+1;2n;10)$. Tìm m,n để hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 4.3.

Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;-1;5), B(5;-5;7), M(x;y;1)$. Với giá trị nào của x, y thì A, B, M thẳng hàng.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 4.4.

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2;3;1)$ và $B(5;\ 6;\ 2)$. Đường thẳng AB cắt mặt phẳng (Oxz) tại điểm M. Tính tỉ số $\dfrac{AM}{BM}$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....

Dạng 5. Tích vô hướng và ứng dụng

Phương pháp

Xét hai véctơ $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ và $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$ ta có:

(1) Tích vô hướng hai véctơ: $\left[\begin{array}{l}\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a};\vec{b})\\ \vec{a}.\vec{b}=a_1.b_1+a_2.b_2+a_3.b_3\end{array}\right.$

$\longrightarrow$ Góc giữa 2 véctơ: $\cos(\vec{a};\vec{b})=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}=\dfrac{a_1.b_1+a_2.b_2+a_3.b_3}{\sqrt{(a_1)^2+(a_2)^2+(a_3)^2}.\sqrt{(b_1)^2+(b_2)^2+(b_3)^2}}$

Chú ý: Khi $\vec{a}.\vec{b}>0$ thì $\cos(\vec{a};\vec{b})>0\Rightarrow(\vec{a};\vec{b})$ là góc nhọn,

Khi $\vec{a}.\vec{b}<0$ thì $\cos(\vec{a};\vec{b})<0\Rightarrow(\vec{a};\vec{b})$ là góc tù.

(2) Véctơ $\vec{a}$ vuông góc véctơ $\vec{b}$: $\vec{a}.\vec{b}=0\Leftrightarrow a_1.b_1+a_2.b_2+a_3.b_3=0$

▶ Bài toán liên quan giữa độ dài và tích vô hướng:

Cho hai vecto $\vec{u}$ và $\vec{v}$ có $|\vec{u}|=m$; $|\vec{v}|=n$ và tạo với nhau một góc α. Tính $|\vec{u}+\vec{v}|$ hoặc $|\vec{u}-\vec{v}|$ hoặc tùy vào yêu cầu bài toán.

Hướng giải quyết

» ***Bước 1:*** Biến đổi $(|\vec{u}+\vec{v}|)^2=(\vec{u}+\vec{v})^2=\vec{u}^2+2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2$

» ***Bước 2:*** Áp dụng: $\begin{cases}\vec{u}^2=|\vec{u}|^2\\ \vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a};\vec{b})\end{cases}$

Để biến đổi: $\vec{u}^2+2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2=|\vec{u}|^2+2|\vec{u}|.|\vec{v}|\cos(\vec{u};\vec{v})+|\vec{v}|^2\quad(*)$

» ***Bước 3:*** Lắp các dữ kiện giả thiết vào $(*)\Rightarrow|\vec{u}+\vec{v}|=?$

Ví dụ 5.1.

Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}=(-3;4;0),\vec{b}=(5;0;12)$. Tính côsin của góc giữa $\vec{a};\vec{b}$.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 5.2.

Trong không gian $Oxyz$, cho $A(-1;-2;3)$, $B(0;3;1)$, $C(4;2;2)$. Côsin của $\widehat{BAC}$ bằng

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 5.3.

Trong không gian $Oxyz$, cho hai véc tơ $\vec{a}=(2;1;-2)$, $\vec{b}=\left(0;-\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$. Tìm tất cả giá trị của m để hai véc tơ $\vec{u}=2\vec{a}+3m\vec{b}$ và $\vec{v}=m\vec{a}-\vec{b}$ vuông góc với nhau.

Lời giải

....
....
....
....
....
....

Ví dụ 5.4.

Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{u}=(1;1;-2)$, $\vec{v}=(1;0;m)$. Tìm m để góc giữa hai vectơ $\vec{u},\vec{v}$ bằng $45°$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....

Ví dụ 5.5.

Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ tạo với nhau một góc $120°$ và $|\vec{u}|=2$, $|\vec{v}|=5$. Tính $|\vec{u}+\vec{v}|$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....

Dạng 6. Tâm tỷ cự

Phương pháp

▶ Bài toán cực trị độ dài vecto:

Cho n điểm $A_1;A_2;\ldots;A_n$ và các hệ số $k_1;k_2;\ldots;k_n$ sao cho $k=k_1+k_2+\ldots+k_n\neq 0$ và đường thẳng d hoặc mặt phẳng (P). Tìm điểm M trên đường thẳng d hoặc mặt phẳng (P), sao cho $\left|k_1.\overrightarrow{MA_1}+k_2.\overrightarrow{MA_2}+\ldots+k_n.\overrightarrow{MA_n}\right|$ nhỏ nhất.

Hướng giải quyết

» ***Bước 1:*** Gọi I là điểm thỏa mãn $k_1.\overrightarrow{IA_1}+k_2.\overrightarrow{IA_2}+\ldots+k_n.\overrightarrow{IA_n}=\vec{0}$.

» ***Bước 2:*** Áp dụng quy tắc ba điểm biến đổi:

$$\left|k_1.\overrightarrow{MA_1}+k_2.\overrightarrow{MA_2}+\ldots+k_n.\overrightarrow{MA_n}\right|=\left|(k_1+k_2+\ldots k_n)\overrightarrow{MI}\right|=|k|\left|\overrightarrow{MI}\right|$$

» ***Bước 3:*** Tìm độ dài nhỏ nhất của các vecto đã cho xảy ra khi M xảy ra ở vị trí nào?

▶ Bài toán cực trị độ dài bình phương vecto:

Cho đa giác $A_1A_2\ldots A_n$ và các hệ số $k_1;k_2;\ldots;k_n$ sao cho $k=k_1+k_2+\ldots+k_n>0$. Tìm điểm M trên đường thẳng d hoặc mặt phẳng (P), sao cho tổng $S=k_1\cdot MA_1^2+k_2\cdot MA_2^2+\ldots+k_n\cdot MA_n^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Hướng giải quyết

» ***Bước 1:*** Gọi I là điểm thỏa mãn $k_1.\overrightarrow{IA_1}+k_2.\overrightarrow{IA_2}+\ldots+k_n.\overrightarrow{IA_n}=\vec{0}$.

» ***Bước 2:*** Thấy rằng $MA_1^2=\left|\overrightarrow{MA_1}\right|^2=\left(\overrightarrow{MA_1}\right)^2=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA_1}\right)^2=\left(\overrightarrow{MI}\right)^2+2\left(\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA_1}\right)+\left(\overrightarrow{IA_1}\right)^2$

Áp dụng quy tắc ba điểm biến đổi:

$$S=k_1\cdot MA_1^2+k_2\cdot MA_2^2+\ldots+k_n\cdot MA_n^2$$

$$=k_1\left[\left(\overrightarrow{MI}\right)^2+2\left(\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA_1}\right)+\left(\overrightarrow{IA_1}\right)^2\right]+\ldots+k_n\left[\left(\overrightarrow{MI}\right)^2+2\left(\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA_n}\right)+\left(\overrightarrow{IA_n}\right)^2\right]$$

$$=(k_1+k_2+\ldots+k_n)MI^2+\left(k_1\cdot IA_1^2+\ldots+k_n\cdot IA_n^2\right)+\ldots+2\overrightarrow{MI}\left(\underbrace{k_1.\overrightarrow{IA_1}+\ldots+k_n.\overrightarrow{IA_n}}_{=\vec{0}}\right)$$

$$=(k_1+k_2+\ldots+k_n)MI^2+\left(k_1\cdot IA_1^2+\ldots+k_n\cdot IA_n^2\right)$$

» ***Bước 3:*** Do $k>0$, để $S=k_1\cdot MA_1^2+k_2\cdot MA_2^2+\ldots+k_n\cdot MA_n^2$ đạt giá trị nhỏ nhất thì ta xác định vị trí điểm M cần tìm.

▶ ***Chú ý:*** Cho đa giác $A_1A_2\ldots A_n$ và các hệ số $k_1;k_2;\ldots;k_n$ sao cho $k=k_1+k_2+\ldots+k_n<0$. Tìm điểm M trên d hoặc (P), sao cho tổng $S=k_1\cdot MA_1^2+k_2\cdot MA_2^2+\ldots+k_n\cdot MA_n^2$ đạt giá trị lớn nhất. Ta cũng thực hiện tương tự.

Ví dụ 6.1.

Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2;-3;7), B(0;4;1), C(3;0;5)$ và $D(3;3;3)$. Gọi M là điểm nằm trên mặt phẳng (Oyz) sao cho biểu thức $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó xác định tọa độ điểm M.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 6.2.

Trong không gian $Oxyz$, cho $\overrightarrow{OA}=\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k}, B(2;2;1)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc trục tung sao cho MA^2+MB^2 nhỏ nhất.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

C Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm

» Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u}=(-1;5;0)$ và $\vec{v}=(1;-5;-3)$, tọa độ của vectơ $\vec{u}+\vec{v}$ là

A. $(2;-10;3)$. **B.** $(2;10;3)$. **C.** $(0;0;-3)$. **D.** $(2;0;3)$.

» Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}=(-2;5;2)$ và $\vec{b}=(1;-3;-1)$, vectơ $\vec{a}-\vec{b}$ có tọa độ là

A. $(1;-2;3)$. **B.** $(-3;8;3)$. **C.** $(-1;2;1)$. **D.** $(3;-8;-3)$.

» Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{a}=(-2;6;2)$, vectơ $\frac{3}{2}\vec{a}$ có tọa độ là

A. $(-6;9;6)$. **B.** $(-3;9;3)$. **C.** $(6;9;6)$. **D.** $(-3;6;3)$.

» Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a}=(2;-1;0)$, $\vec{b}=(-1;-3;2)$, $\vec{c}=(-2;-4;-3)$, tọa độ của $\vec{u}=2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}$ là

A. $(5;\ 3;\ -9)$ **B.** $(-5;\ -3;\ 9)$ **C.** $(-3;\ -7;\ -9)$ **D.** $(3;\ 7;\ 9)$

» Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho hai véctơ $\vec{a}=(3;0;1)$, $\vec{c}=(1;1;0)$. Tìm tọa độ của véc tơ $\vec{b}$ thỏa mãn đẳng thức $\vec{b}-\vec{a}+2\vec{c}=\vec{0}$?

A. $\vec{b}=(-1;2;-1)$. **B.** $\vec{b}=(-2;1;-1)$. **C.** $\vec{b}=(1;-2;1)$. **D.** $\vec{b}=(1;2;1)$.

» Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(2;-2;1)$ trên mặt phẳng (Oxy) có tọa độ là

A. $(2;0;1)$. **B.** $(2;-2;0)$. **C.** $(0;-2;1)$. **D.** $(0;0;1)$.

» Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(1;-2;2)$ và $N(1;0;4)$. Toạ độ trung điểm của đoạn thẳng MN là

A. $(1;-1;3)$. **B.** $(0;2;2)$. **C.** $(2;-2;6)$. **D.** $(1;0;3)$.

» Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;-2)$ và $B(2;2;1)$. Vectơ $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ là

A. $(-1;-1;-3)$. **B.** $(3;1;1)$. **C.** $(1;1;3)$. **D.** $(3;3;-1)$.

» Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;-3;5)$. Tìm tọa độ A' là điểm đối xứng với A qua trục Oy.

A. $A'(2;3;5)$. **B.** $A'(2;-3;-5)$. **C.** $A'(-2;-3;5)$. **D.** $A'(-2;-3;-5)$.

» Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;3;2)$ và $B(3;-1;4)$. Tọa độ vectơ $\vec{u}=2\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{OB}$ là

A. $\vec{u}=(-7;7;-8)$. **B.** $\vec{u}=(-7;3;-8)$. **C.** $\vec{u}=(-7;5;-8)$. **D.** $\vec{u}=(-7;9;-8)$.

» Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;2;1)$ và $B(3;-2;1)$. Độ dài đoạn thẳng AB bằng

A. 5. **B.** 3. **C.** 25. **D.** 9.

» **Câu 12.** Trong không gian $Oxyz$, cho hình bình hành $MNPQ$ có $M(-4;3;3), N(4;-4;2)$ và $P(3;6;-1)$. Biết chu vi của hình bình hành $MNPQ$ bằng $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ với $a,b\in\mathbb{N}^*$ và $a>b$. Tính $a-b$.

A. 4. **B.** 8. **C.** 16. **D.** 32.

» **Câu 13.** Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{u}=(1;-2;3)$. Vectơ nào sau đây cùng phương với vectơ $\vec{u}$?

A. $\vec{a}=(2;4;6)$. **B.** $\vec{b}=(-3;6;-9)$. **C.** $\vec{c}=\left(\frac{1}{2};-2;\frac{3}{2}\right)$. **D.** $\vec{d}=(-1;2;-3)$.

» **Câu 14.** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;3;-1)$ và $B(-1;-6;2)$. Tìm giao điểm C của đường thẳng AB và trục Ox.

A. $C\left(-\frac{1}{3};0;0\right)$. **B.** $C\left(\frac{1}{3};0;0\right)$. **C.** $C(3;0;0)$. **D.** $C(-3;0;0)$.

» **Câu 15.** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;3)$ và $B(-1;4;1)$. Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AB. Tính $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{BA}$.

A. 4. **B.** 6. **C.** –4. **D.** –6.

B. *Câu hỏi – Trả lời đúng/sai*

» **Câu 16.** Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}=(2;-1;3),\vec{b}=(-1;5;2)$

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\vec{a}+\vec{b}=(-3;6;-1)$		
(b)	$\vec{a}-\vec{b}=(3;-6;1)$		
(c)	$3\vec{b}=(-3;15;6)$		
(d)	$2\vec{a}-\vec{b}=(5;-7;4)$		

» **Câu 17.** Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}=(2;1;0),\vec{b}=(-1;0;-2),\vec{c}=(m;-2;4)$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$-2\vec{a}+\vec{b}=(-5;-2;-2)$		
(b)	$\vec{b}\perp\vec{c}\Leftrightarrow m=8$		
(c)	$\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{2}{5}$		
(d)	$\lvert\vec{c}\rvert=2\lvert\vec{a}\rvert\Leftrightarrow m=0$		

» **Câu 18.** Trong không gian $Oxyz$, cho ΔABC, biết $A(-1;0;3),B(4;2;0),C(3;1;-3)$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$G(2;1;0)$ là trọng tâm tam giác ABC		
(b)	$D(-2;-1;0)$ là một đỉnh của hình bình hành $ABCD$		
(c)	$M(a;b;c)$ thoả mãn $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{CB}$. Khi đó $a+b+c=-13$		
(d)	$M(a;b;c)\in Ox$ sao cho BM vuông góc với đường thẳng AC. Khi đó $4a^2+b^2+c^2=162$		

» Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;3)$, $B(2;5;4)$, $C(0;2;0)$.Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng ? Khẳng định nào sai ?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Khi vectơ $\vec{v}=(1;3;-2n)$ cùng phương với $\overrightarrow{AB}$ thì n có giá trị là $-\frac{1}{2}$		
(b)	Khi $ABCD$ là hình bình hành thì điểm $D(-1;-1;-1)$		
(c)	Với điểm $E(x;y;-2)$ để A,B,E thẳng hàng thì $x+y=-\frac{1}{2}$		
(d)	Điểm $M\in(Oxy)$ sao cho A,B,M thẳng hàng có toạ độ là $M(-2;7;0)$		

» Câu 20. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;-1;1)$, $B(-1;3;-1)$, $C(5;-3;4)$.Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng ? Khẳng định nào sai ?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Tích vô hướng của hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ bằng -52		
(b)	Góc ABC là góc tù		
(c)	Côsin giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ bằng $\frac{-23}{\sqrt{638}}$		
(d)	Điểm $D(1;2;x)$ với ΔABD vuông tại B thì giá trị $x=-6$		

C. Câu hỏi – Trả lời ngắn

» Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tọa độ các điểm $A(1;2;-1),C(3;-4;1),B'(2;-1;3),D'(0;3;5)$. Giả sử tọa độ điểm $A'(x;y;z)$ thì $x+y+z$ là

Điền đáp số:

» Câu 22. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $B(1;2;-3)$ và $C(7;4;-2)$. Gọi $E(x;y;z)$ là điểm thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{CE}=2\overrightarrow{EB}$ khi đó $x+y+z$ bằng

Điền đáp số:

» Câu 23. Trong không gian $Oxyz$ cho 3 điểm $A(2;0;0),B(0;3;1),C(-3;6;4)$. Gọi M là điểm nằm trên đoạn BC sao cho $MC=2MB$. Tính độ dài đoạn AM (Kết quả được làm tròn ở chữ số thập phân thứ nhất)

Điền đáp số:

» Câu 24. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(2;2;1),N\left(-\frac{8}{3};\frac{4}{3};\frac{8}{3}\right),E(2;2;3)$. Gọi $I(a,b,c)$ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác OMN. Tính độ dài IE.

Điền đáp số:

» Câu 25. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2;3;1)$ và $B(5;6;2)$. Đường thẳng AB cắt mặt phẳng (Oxz) tại điểm M. Tính tỉ số $\frac{AM}{BM}$

» Câu 26. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u}=(1;1;-2)$ và $\vec{v}=(1;0;m)$. Gọi S là tập hợp các giá trị m để hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ tạo với nhau một góc $45°$. Số phần tử của S là bao nhiêu?

✍ **Điền đáp số:**

-------------------- **Hết** --------------------

Chương 02

Bài 1. VECTO & CÁC PHÉP TOÁN TRONG KHÔNG GIAN

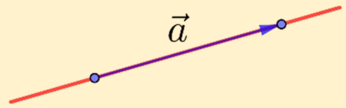
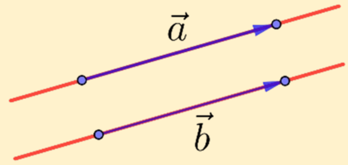
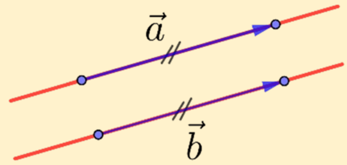
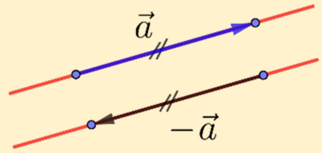
A Lý thuyết

1. Khái niệm vectơ trong không gian; hai vectơ cùng phương, cùng hướng, bằng nhau; vectơ-không.

Định nghĩa:

» ***Vectơ trong không gian*** là một đoạn thẳng có hướng.

» ***Độ dài của vectơ*** là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vectơ. Kí hiệu: $|\vec{a}|$.

» ***Giá*** của vectơ là đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó.	
» Hai vectơ ***cùng phương*** nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau.	
» Hai vectơ ***bằng nhau*** nếu chúng có cùng độ dài và cùng hướng. Nếu hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ bằng nhau thì ta viết là $\vec{a}=\vec{b}$.	
» Hai vectơ ***đối nhau*** nếu chúng có cùng độ dài và ngược hướng. Vectơ đối của $\vec{a}$ được kí hiệu là $-\vec{a}$.	

» ***Vectơ - không*** có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau, kí hiệu là $\vec{0}$.

Quy ước vectơ-không có độ dài bằng 0 và cùng phương, cùng hướng với mọi vectơ.

Chú ý

» Kí hiệu $\overrightarrow{AB}$ chỉ vectơ có điểm đầu A, điểm cuối B.

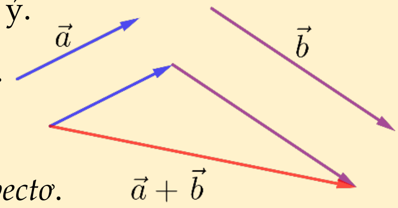
» Nếu không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối thì vectơ còn được kí hiệu là $\vec{u},\vec{v},\vec{x},\vec{y},....$

2. Tổng và hiệu của hai vectơ

Định nghĩa tổng hai vectơ:

Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$. Lấy một điểm A tùy ý.

- Vẽ $\overrightarrow{AB}=\vec{a},\overrightarrow{BC}=\vec{b}$. Vectơ $\overrightarrow{AC}$ là ***tổng của hai vectơ*** $\vec{a},\vec{b}$.
- Ký hiệu là $\vec{a}+\vec{b}$.
- Phép lấy tổng của hai vectơ còn được gọi là *phép cộng vectơ*.



Nhận xét: Phép cộng vectơ trong không gian cũng có các tính chất như phép cộng vectơ trong mặt phẳng.

» Tính chất giao hoán: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.

» Tính chất kết hợp: $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$.

» Với mọi vectơ $\vec{a}$, ta luôn có: $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$.

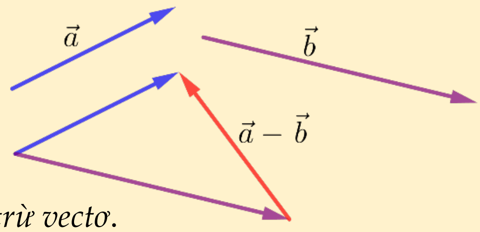
Chú ý

» Từ tính chất kết hợp, ta xác định được tổng ba vectơ $\vec{a};\vec{b};\vec{c}$ là $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}$.

Định nghĩa hiệu hai vectơ:

Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$.

- Hiệu của hai vectơ $\vec{a};\vec{b}$ là vectơ $\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$.
- Kí hiệu là $\vec{a}-\vec{b}$.
- Phép lấy hiệu của hai vectơ còn được gọi là *phép trừ vectơ*.

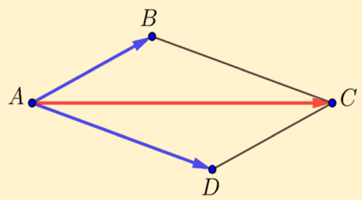


Các quy tắc

✓ ***Quy tắc ba điểm và quy tắc hình bình hành:***

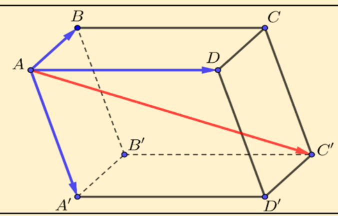
» Với ba điểm A,B,C bất kì, ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ (Quy tắc ba điểm phép cộng).

» Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ (Quy tắc hình bình hành).



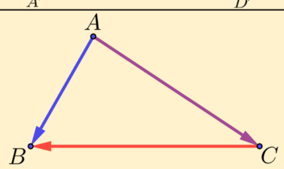
✓ ***Quy tắc hình hộp:***

» Nếu $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp thì $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$.



✓ ***Quy tắc hiệu:***

» Với ba điểm A,B,C bất kì, ta có $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$.



3. Tích của một số với một vectơ

Định nghĩa:

Trong không gian, cho số $k \neq 0$ và vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$.

- Tích của số k với vectơ $\vec{a}$ là một vectơ.
- Ký hiệu là $k\vec{a}$.
- Phép lấy tích của một số với một vectơ được gọi là *phép nhân một số với một vectơ*.

» Cùng hướng với $\vec{a}$ nếu $k > 0$,

» Ngược hướng với $\vec{a}$ nếu $k < 0$

» Có độ dài bằng $|k|.|\vec{a}|$.

4. Tích vô hướng của hai vectơ

Góc giữa hai vectơ trong không gian

Trong không gian, cho $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là hai vectơ khác $\vec{0}$.

- Lấy một điểm A bất kì, gọi B và C là hai điểm sao cho $\overrightarrow{AB} = \vec{u}, \overrightarrow{AC} = \vec{v}$.

  Ta gọi $\widehat{BAC}$ là góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$.
- Kí hiệu là $(\vec{u}, \vec{v})$.

Tích vô hướng hai vectơ

Trong không gian, cho $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là hai vectơ khác $\vec{0}$.

- Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là một số
- Kí hiệu là $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Được xác định bởi công thức: $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$

Chú ý

» Trong trường hợp $\vec{u} = \vec{0}$ hoặc $\vec{v} = \vec{0}$, ta quy ước $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

» $\vec{u}.\vec{u} = \vec{u}^2 = |\vec{u}|^2; \vec{u}^2 \geq 0, \vec{u}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$

» Với hai vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ khác $\vec{0}$, ta có $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$.

» Với hai vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ khác $\vec{0}$, ta có $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

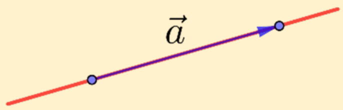
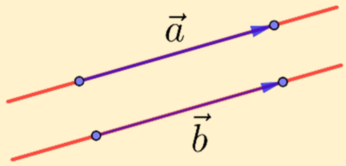
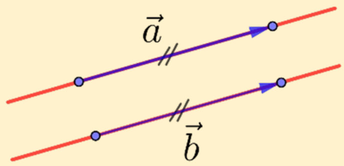
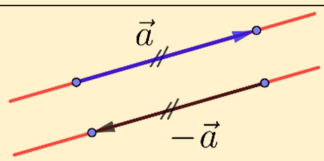
B Các dạng bài tập

Dạng 1. Sử dụng các định nghĩa

Phương pháp

» ***Vectơ trong không gian*** là một đoạn thẳng có hướng.

» ***Độ dài của vectơ*** là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vectơ. Kí hiệu: $\left|\vec{a}\right|$.

» ***Giá*** của vectơ là đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó.	
» Hai vectơ ***cùng phương*** nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau.	
» Hai vectơ ***bằng nhau*** nếu chúng có cùng độ dài và cùng hướng. Nếu hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ bằng nhau thì ta viết là $\vec{a}=\vec{b}$.	
» Hai vectơ ***đối nhau*** nếu chúng có cùng độ dài và ngược hướng. Vectơ đối của $\vec{a}$ được kí hiệu là $-\vec{a}$.	

» ***Vectơ - không*** có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau, kí hiệu là $\vec{0}$.

Quy ước vectơ-không có độ dài bằng 0 và cùng phương, cùng hướng với mọi vectơ.

Ví dụ 1.1.

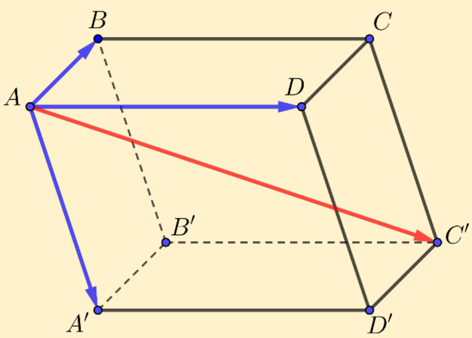
Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

Trong các vectơ khác $\vec{0}$, có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình hộp. Hãy chỉ ra những vectơ:

(1) Cùng phương với vectơ $\overrightarrow{AB}$;

(2) Bằng vectơ $\overrightarrow{AB}$;

(3) Ngược hướng với vectơ $\overrightarrow{AA'}$.



Lời giải

(1) Cùng phương với vectơ $\overrightarrow{AB}$;

Các vectơ cùng phương với $\overrightarrow{AB}$ là: $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{B'A'}$, $\overrightarrow{C'D'}$, $\overrightarrow{D'C'}$.

(2) Bằng vectơ $\overrightarrow{AB}$;

Các vectơ bằng với $\overrightarrow{AB}$ là: $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{D'C'}$.

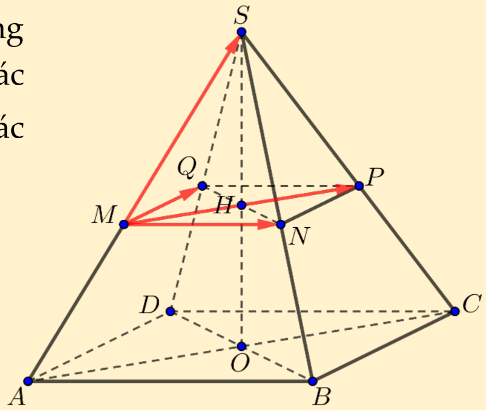
(3) Ngược hướng với vectơ $\overrightarrow{AA'}$.

Các vectơ ngược hướng với $\overrightarrow{AA'}$ là: $\overrightarrow{A'A}, \overrightarrow{B'B}, \overrightarrow{C'C}, \overrightarrow{D'D}$.

Ví dụ 1.2.

Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy a và đường cao h. Gọi M,N,P,Q lần lượt là trung điểm của các cạnh bên SA,SB,SC,SD và O,H lần lượt là tâm của các hình vuông $ABCD, MNPQ$.

Tính độ dài các vectơ $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MS}$ theo a và h.



Lời giải

Ta có

$$\left|\overrightarrow{MN}\right| = MN = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2};$$

$$\left|\overrightarrow{MP}\right| = MP = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} = AO.$$

Tính $SA = \sqrt{OA^2 + SO^2} = \sqrt{\frac{a^2}{2} + h^2}$. Suy ra $\left|\overrightarrow{MS}\right| = MS = \frac{SA}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2}{2} + h^2}$.

Dạng 2. Tổng và hiệu của hai vectơ

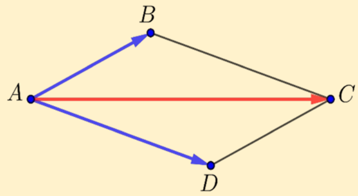
Phương pháp

Các quy tắc:

✓ *Quy tắc ba điểm và quy tắc hình bình hành:*

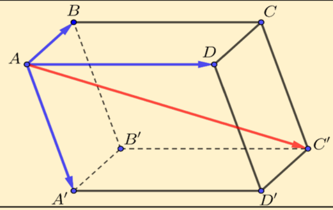
» Với ba điểm A, B, C bất kì, ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ (Quy tắc ba điểm phép cộng).

» Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ (Quy tắc hình bình hành).



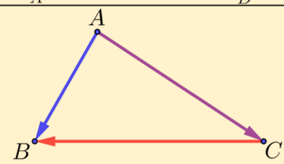
✓ *Quy tắc hình hộp:*

» Nếu $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp thì $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$.



✓ *Quy tắc hiệu:*

» Với ba điểm A, B, C bất kì, ta có $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$.



Ví dụ 2.1.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 2. Tìm độ dài của các vectơ sau:

(1) $\vec{a}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB'}$; (2) $\vec{b}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{C'A}$

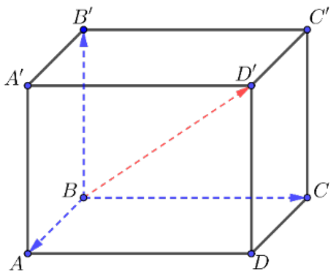
Lời giải

(1) $\vec{a}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB'}$;

$$\vec{a}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{BD'}\Rightarrow|\vec{a}|=\left|\overrightarrow{BD'}\right|=BD'=2\sqrt{3}.$$

(2) $\vec{b}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{C'A}$

$$\vec{b}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{C'A}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{C'A}=\overrightarrow{C'C}\Rightarrow\left|\vec{b}\right|=\left|\overrightarrow{C'C}\right|=C'C=2.$$



Ví dụ 2.2.

Cho tứ diện $ABCD$. Chứng minh $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$.

Lời giải

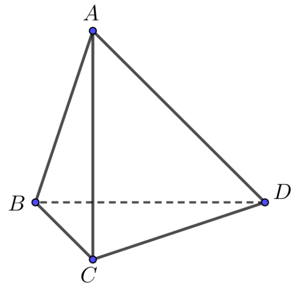
Ta có:

$VT=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$

$=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$

$=\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right)+\left(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CD}\right)=\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right)+\overrightarrow{DD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=VP$

(Đpcm).



Ví dụ 2.3.

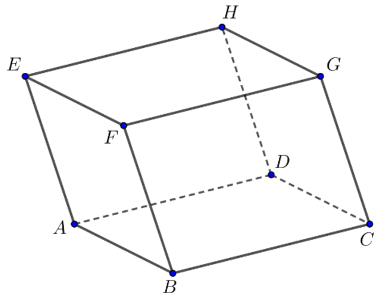
Cho hình hộp $ABCD.EFGH$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{GB}=\vec{0}$.

Lời giải

heo quy tắc hình hộp ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AG}\ (1)$.

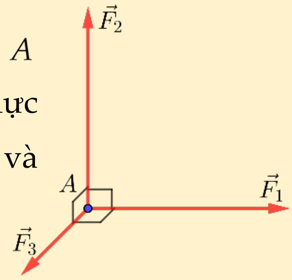
Theo quy tắc hình bình hành ta có: $\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{GA}\ (2)$.

$\xrightarrow{(1)\&(2)} \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$ (đpcm).

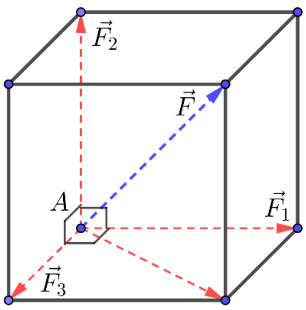


Ví dụ 2.4.

Một chất điểm chịu tác động bởi 3 lực $\vec{F_1},\vec{F_2},\vec{F_3}$ có chung điểm đặt A và có giá vuông góc nhau từng đôi một. Biết cường độ của các lực $\vec{F_1},\vec{F_2},\vec{F_3}$ lần lượt là $10\,\text{N}$, $8\,\text{N}$ và $5\,\text{N}$. Xác định hợp lực của 3 lực và tính cường độ của hợp lực (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



Lời giải



Tổng hợp lực của 3 lực $\vec{F_1},\vec{F_2},\vec{F_3}$ là lực $\vec{F}$ được dựng theo qui tắc hình hộp chữ nhật.

Vậy cường độ tổng hợp lực là $\left|\vec{F}\right|=\sqrt{10^2+8^2+5^2}=3\sqrt{21}\,N\approx 14\,\text{N}$.

Dạng 3. Tích của một số với một vectơ

Phương pháp

Trong không gian, cho số $k \neq 0$ và vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$.

- Tích của số k với vectơ $\vec{a}$ là một vectơ. Ký hiệu là $k\vec{a}$. Có độ dài bằng $|k|.|\vec{a}|$.

  » Cùng hướng với $\vec{a}$ nếu $k>0$, » Ngược hướng với $\vec{a}$ nếu $k<0$

⁂ Với hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bất kì, với mọi số h và k, ta luôn có

(1) $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$ (2) $(h+k)\vec{a}=h\vec{a}+k\vec{a}$ (3) $h(k\vec{a})=(hk)\vec{a}$

(4) $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$ (5) $(-1)\cdot\vec{a}=-\vec{a}$

(6) Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ $(\vec{b}\neq\vec{0})$ cùng phương khi và chỉ khi có số k sao cho $\vec{a}=k\vec{b}$.

(7) Ba điểm phân biệt A,B,C thẳng hàng khi và chỉ khi có số $k\neq 0$ để $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$..

⁂ **Hệ quả:**

(1) I là trung điểm của đoạn thẳng AB $\Leftrightarrow \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{OI}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$, với mọi điểm O.

(2) G là trọng tâm ΔABC $\Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$, với mọi điểm O.

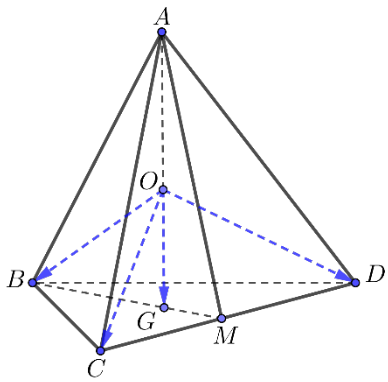
Ví dụ 3.1.

Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác BCD và O là trung điểm đoạn thẳng AG. Chứng minh rằng:

(1) $3\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$;

(2) $3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=6\overrightarrow{MO}$ (M là điểm bất kì trong không gian).

Lời giải



(1) $3\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$;

Vì G là trọng tâm của ΔBCD nên $3\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$.

Vì O là trung điểm đoạn thẳng AG nên $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OG}=\vec{0}$.

Do đó: $3\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=3(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OG})=\vec{0}$.

(2) $3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=6\overrightarrow{MO}$ (M là điểm bất kì trong không gian).

Theo quy tắc ba điểm, ta có:

$3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}$

$=3(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA})+\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OD}$

$=6\overrightarrow{MO}+3\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=6\overrightarrow{MO}$

Ngoài ra, có thể giải cách khác:

Do G là trọng tâm $\triangle BCD$ nên $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=3\overrightarrow{MG}$.

Do đó: $3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=3\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MG}=3(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MG})=3.2\overrightarrow{MO}=6\overrightarrow{MO}$.

Ví dụ 3.2.

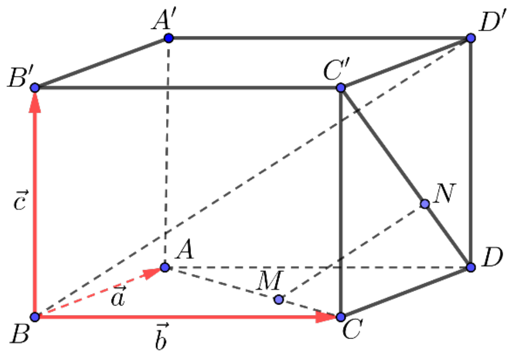
Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Giả sử điểm M thuộc AC, điểm N thuộc DC' và $\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DN}=y\overrightarrow{DC'}$

(1) Biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{BD'}$, $\overrightarrow{MN}$ theo $\overrightarrow{BA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$, $\overrightarrow{BB'}=\vec{c}$.;

(2) Tìm x và y sao cho $MN//BD'$, khi đó tính tỉ số $\dfrac{MN}{BD'}$.

Lời giải

(1) Biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{BD'}$, $\overrightarrow{MN}$ theo $\overrightarrow{BA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$, $\overrightarrow{BB'}=\vec{c}$.;



Ta có: $\overrightarrow{BA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$, $\overrightarrow{BB'}=\vec{c}$.

Khi đó, theo quy tắc hình hộp ta có: $\overrightarrow{BD'}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.

Ta có: $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{BN}-\overrightarrow{BM}$.

Từ $\overrightarrow{DN}=y\overrightarrow{DC'}$, ta có $\overrightarrow{BN}-\overrightarrow{BD}=y\left(\overrightarrow{BC'}-\overrightarrow{BD}\right)$, suy ra:

$\overrightarrow{BN}-\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=y\left(\vec{b}+\vec{c}-\vec{a}-\vec{b}\right)$.

$\overrightarrow{BN}=\left(1-y\right)\vec{a}+\vec{b}+y\vec{c}$.

Từ $\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AC}$, suy ra $\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{BA}=x\left(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}\right)$.

Vậy $\overrightarrow{BM}-\vec{a}=x\left(\vec{b}-\vec{a}\right)\Rightarrow\overrightarrow{BM}=\left(1-x\right)\vec{a}+x\vec{b}$.

Do đó: $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{BN}-\overrightarrow{BM}=\left(1-y\right)\vec{a}+\vec{b}+y\vec{c}-\left(1-x\right)\vec{a}-x\vec{b}=\left(x-y\right)\vec{a}+\left(1-x\right)\vec{b}+y\vec{c}$.

(2) Tìm x và y sao cho $MN//BD'$, khi đó tính tỉ số $\dfrac{MN}{BD'}$.

Điều kiện để $MN//BD'$ là $\overrightarrow{MN}=k\overrightarrow{BD'}$ hay

$\left(x-y\right)\vec{a}+\left(1-x\right)\vec{b}+y\vec{c}=k\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$

$\left(x-y\right)\vec{a}+\left(1-x\right)\vec{b}+y\vec{c}=k\vec{a}+k\vec{b}+k\vec{c}\quad(*)$

Do $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ không cùng phương nên từ (*) suy ra:

$$\begin{cases}k=x-y\\k=1-x\\k=y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-2y=0\\x+y=1\\k=y\end{cases}\Leftrightarrow\left(x;y;k\right)=\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right).$$

Vậy M và N được xác định bởi bởi $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DC'}$ và

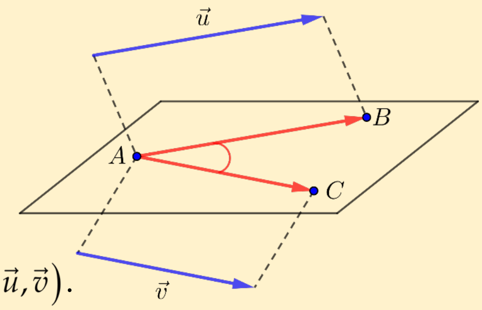
$$\overrightarrow{MN}=\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)\vec{a}+\left(1-\frac{2}{3}\right)\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}=\frac{1}{3}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)=\frac{1}{3}\overrightarrow{BD'}.$$

Lúc này $\dfrac{MN}{BD'}=\left|k\right|=\dfrac{1}{3}$.

Dạng 4. Tích vô hướng và góc của hai vectơ

Phương pháp

⁂ Góc giữa hai vectơ:



Trong không gian, cho $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là hai vectơ khác $\vec{0}$.

- Lấy một điểm A bất kì,

  Gọi B và C là hai điểm sao cho $\overrightarrow{AB}=\vec{u}, \overrightarrow{AC}=\vec{v}$.

  Ta gọi $\widehat{BAC}$ là góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$. Kí hiệu là $\left(\vec{u},\vec{v}\right)$.

⁂ Tích vô hướng hai vectơ:

Trong không gian, cho $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là hai vectơ khác $\vec{0}$.

- Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là một số. Kí hiệu là $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

  Được xác định bởi công thức: $\vec{u}\cdot\vec{v}=\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|\cdot\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)$

⁂ Chú ý:

(1) $0°\le\left(\vec{u},\vec{v}\right)\le 180°$

(2) Nếu $\left(\vec{u},\vec{v}\right)=90°$ thì ta nói $\vec{u}$ và $\vec{v}$ vuông góc với nhau, kí hiệu $\vec{u}\perp\vec{v}$.

(3) Khi $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng hướng thì $\left(\vec{u},\vec{v}\right)=0°$.

(4) Khi $\vec{u}$ và $\vec{v}$ ngược hướng thì $\left(\vec{u},\vec{v}\right)=180°$.

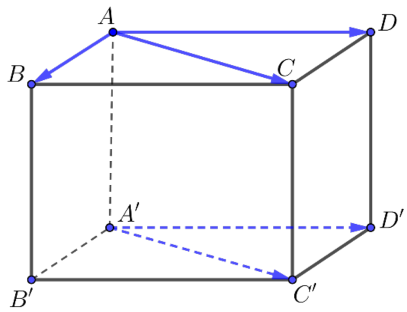
Ví dụ 4.1.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Xác định các góc:

(1) $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'D'}\right)$ (2) $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'C'}\right)$

(3) $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{D'C'}\right)$ (4) $\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{C'B'}\right)$

Lời giải



(1) $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'D'}\right)$

Ta có $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{A'D'}$, suy ra $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'D'}\right)=\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)=\widehat{BAD}=90°$.

(2) $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'C'}\right)$

Ta có $\overrightarrow{A'C'}=\overrightarrow{AC}$, suy ra $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'C'}\right)=\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\widehat{BAC}=45°$.

(3) $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{D'C'}\right)$

Ta có $\overrightarrow{D'C'}=\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$, suy ra $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{D'C'}\right)=\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC}\right)=\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AB}\right)=0°$.

(4) $\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{C'B'}\right)$

Ta có $\overrightarrow{C'B'}=\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DA}$, suy ra $\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{C'B'}\right)=\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{DA}\right)=180°$ (do $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{DA}$ đối nhau nên ngược hướng).

Ví dụ 4.2.

Cho tứ diện đều $ABCD$ có H là trung điểm của AB. Hãy tính góc giữa các cặp vecto

(1) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ (2) $\overrightarrow{CH}$ và $\overrightarrow{AC}$

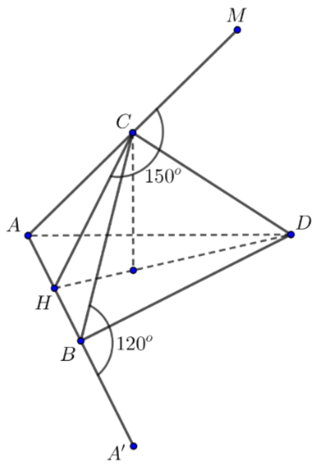
Lời giải

(1) $\overrightarrow{AB}$ *và* $\overrightarrow{BC}$.

Gọi A' là điểm đối xứng với A qua B

$\Rightarrow \left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=\left(\overrightarrow{BA'},\overrightarrow{AC}\right)=\widehat{CBA'}$

Ta có ΔABC đều $\Rightarrow \widehat{ABC}=60° \Rightarrow \widehat{A'BC}=120° \Rightarrow \left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=120°$.



(2) $\overrightarrow{CH}$ *và* $\overrightarrow{AC}$.

Gọi M là điểm đối xứng với C qua A

$\Rightarrow \left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CH}\right)=\left(\overrightarrow{CM},\overrightarrow{CH}\right)=\widehat{MCH}$

Ta có ΔABC đều $\Rightarrow \widehat{ACH}=30° \Rightarrow \widehat{MCH}=150° \Rightarrow \left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CH}\right)=150°$.

Ví dụ 4.3.

Cho tứ diện $ABCD$ có AC và BD cùng vuông góc với AB. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của hai cạnh AB, CD. Chứng minh rằng $IJ \perp AB$.

Lời giải

Từ giả thiết ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}=0$.

I là trung điểm của AB nên $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

J là trung điểm của CD nên $\overrightarrow{CJ}+\overrightarrow{DJ}=\vec{0}$

Ta lại có:

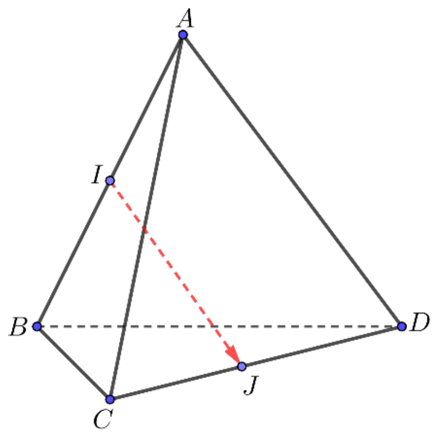
$\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CJ}$

$\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DJ}$

Suy ra $2\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$ hay $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right)$

Do đó, $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right).\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AB}=0$

Suy ra $\overrightarrow{IJ}\perp\overrightarrow{AB}$ hay $IJ \perp AB$.



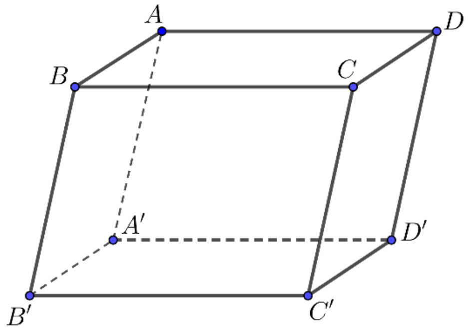
Chương 02

Bài 1. VECTO & CÁC PHÉP TOÁN TRONG KHÔNG GIAN

C Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm

» Câu 1. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$.



Vectơ nào sau đây cùng phương với $\overrightarrow{BC}$?

A. $\overrightarrow{DC}$ **B.** $\overrightarrow{DA}$ **C.** $\overrightarrow{BB'}$ **D.** $\overrightarrow{C'C}$

Lời giải

Chọn B

Vì $BC // DA$ nên $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DA}$ là hai vectơ cùng phương.

» Câu 2. Trong các vectơ sau, vectơ nào sau đây có điểm đầu là A, điểm cuối là B?

A. $\overrightarrow{AA}$ **B.** $\overrightarrow{BA}$ **C.** $\overrightarrow{AB}$ **D.** $\overrightarrow{BB}$

Lời giải

Chọn C

Vectơ nào có điểm đầu A, điểm cuối B là $\overrightarrow{AB}$

» Câu 3. Trong không gian cho 3 điểm phân biệt A, B, C. Vectơ nào trong các vec tơ sau đây là vectơ - không?

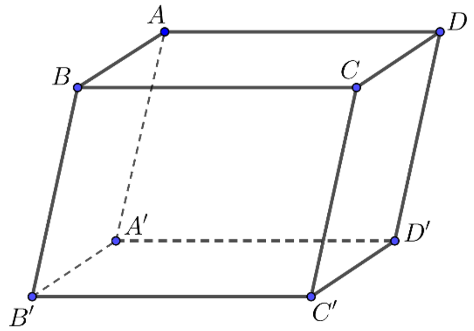
A. $\overrightarrow{BB}$ **B.** $\overrightarrow{BA}$ **C.** $\overrightarrow{BA}$ **D.** $\overrightarrow{CA}$

Lời giải

Chọn A

Vì vectơ - không là vectơ có điểm đầu điểm cuối trùng nhau nên $\overrightarrow{BB}=\vec{0}$.

» Câu 4. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$.



Vectơ $\overrightarrow{BA}$ bằng với vectơ nào sau đây?

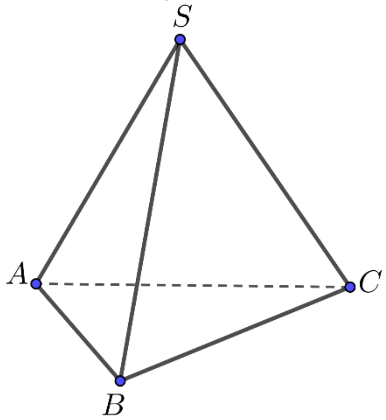
A. $\overrightarrow{A'B'}$ **B.** $\overrightarrow{CD}$ **C.** $\overrightarrow{BC}$ **D.** $\overrightarrow{AB}$

Lời giải

Chọn B

Vì $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CD}$ là hai vectơ cùng hướng và $BA = CD$ nên $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CD}$ là hai vectơ bằng nhau

» Câu 5. Cho hình chóp $S.ABC$. Tìm vectơ tổng của hai vectơ $\overrightarrow{SA}$ và $\overrightarrow{AB}$?



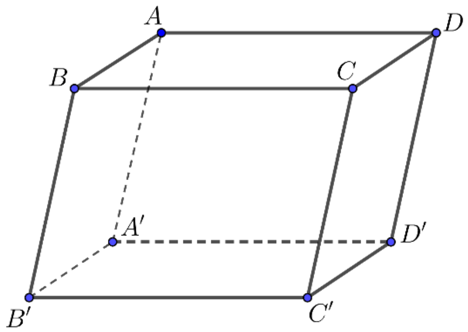
A. $\overrightarrow{BS}$ **B.** $\overrightarrow{BA}$ **C.** $\overrightarrow{SB}$ **D.** $\overrightarrow{SC}$

Lời giải

Chọn C

Theo quy tắc 3 điểm ta có, $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{SB}$

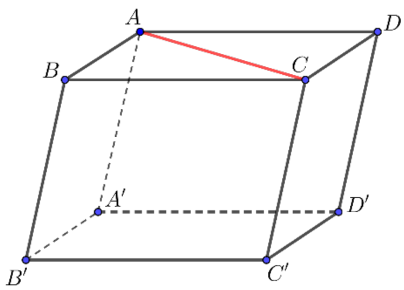
» Câu 6. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Tìm vectơ tổng của hai vectơ $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{AB}$.



A. $\overrightarrow{DB}$ **B.** $\overrightarrow{BD}$ **C.** $\overrightarrow{AC}$ **D.** $\overrightarrow{CA}$

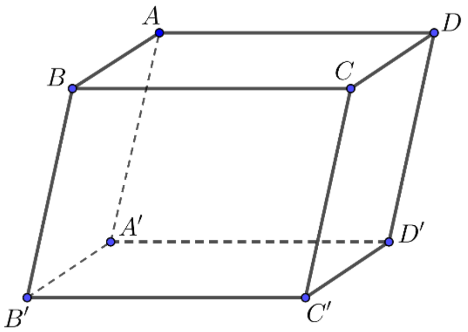
Lời giải

Chọn C



Theo quy tắc hình bình hành ta có, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$

» Câu 7. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Mệnh đề nào sau đây ***đúng***?



A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$.
B. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AD}$.
C. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC'}$.
D. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AC}$.

Lời giải

Chọn A

Theo quy tắc hình hộp ta có : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$.

» Câu 8. Cho hình chóp $S.ABC$. Mệnh đề nào sau đây ***đúng***?

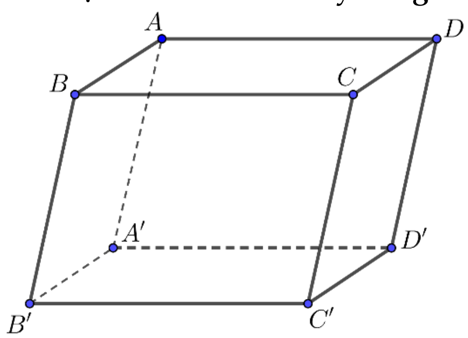
A. $\overrightarrow{SA}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{SB}$.
B. $\overrightarrow{SA}-\overrightarrow{SB}=\overrightarrow{AB}$.
C. $\overrightarrow{SA}-\overrightarrow{SB}=\overrightarrow{BA}$.
D. $\overrightarrow{SA}-\overrightarrow{SB}=\overrightarrow{SC}$.

Lời giải

Chọn C

Theo quy tắc hiệu ta có: $\overrightarrow{SA}-\overrightarrow{SB}=\overrightarrow{BA}$.

» Câu 9. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Mệnh đề nào sau đây ***đúng***?



A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A'D'}=\overrightarrow{AC}$.
B. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A'D'}=\overrightarrow{BD}$.
C. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A'D'}=\overrightarrow{AC'}$.
D. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A'D'}=\overrightarrow{CA}$.

Lời giải

Chọn A

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A'D'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ (quy tắc hình bình hành).

» Câu 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O. Tính tổng $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}$.

A. $2\overrightarrow{SO}$
B. $4\overrightarrow{SO}$
C. $3\overrightarrow{SO}$
D. $\vec{0}$

Lời giải

Chọn B

Vì O là trung điểm của AC, BD nên $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=2\overrightarrow{SO}$, $\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=2\overrightarrow{SO}$.

Do đó $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}=4\overrightarrow{SO}$.

» Câu 11. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Tổng $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$ bằng

A. $\vec{0}$
B. $2\overrightarrow{AD}$
C. $2\overrightarrow{NM}$
D. $2\overrightarrow{MN}$

Lời giải

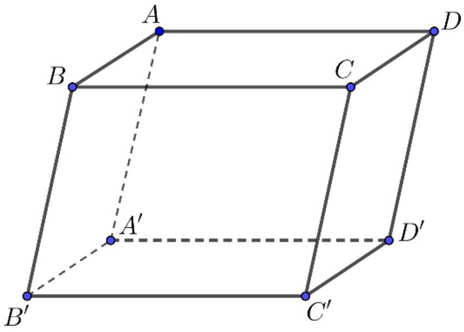
Chọn C

Ta có:

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{DM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NC}=\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{DM}\right)+2\overrightarrow{MN}+\left(\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}\right)=2\overrightarrow{MN}$

(vì M,N lần lượt là trung điểm của AD và BC nên $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{DM}=\vec{0},\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}=\vec{0}$).

» Câu 12. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Tính tổng $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{A'C'}$.



A. $2\overrightarrow{AA'}$ **B.** $\vec{0}$ **C.** $2.\overrightarrow{AC}$. **D.** $2\overrightarrow{C'A'}$

Lời giải

Chọn C

Theo quy tắc hình bình hành ta có, $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$.

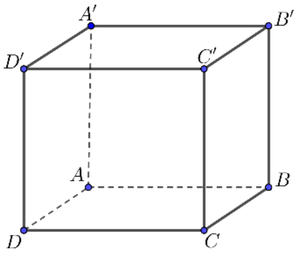
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{A'C'}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{A'C'}=2.\overrightarrow{AC}$.

» Câu 13. Cho khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Khi đó, góc giữa vecto $\overrightarrow{AB}$ và vecto $\overrightarrow{AD}$ là:

A. $90°$ **B.** $60°$ **C.** $45°$ **D.** $30°$

Lời giải

Chọn A



Ta có $\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}}\right)=\widehat{DAB}$

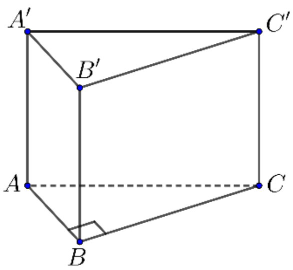
Ta thấy $AB\perp AD\Rightarrow\widehat{DAB}=90°$. Vậy $\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}}\right)=90°$

» Câu 14. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$. Đáy là tam giác ABC vuông tại B. Khi đó góc giữa vecto $\overrightarrow{BA}$ và vecto $\overrightarrow{B'C'}$ bằng bao nhiêu?

A. $45°$ **B.** $120°$ **C.** $90°$ **D.** $30°$

Lời giải

Chọn C



Ta có $\overrightarrow{B'C'}=\overrightarrow{BC}$

Do đó $\left(\widehat{\overrightarrow{BA};\overrightarrow{B'C'}}\right)=\left(\widehat{\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}}\right)=\widehat{ABC}$

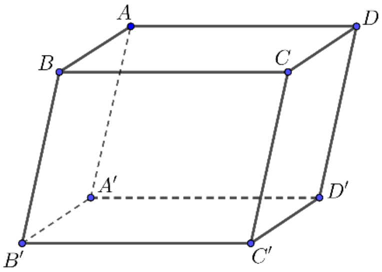
Mà tam giác ABC vuông tại B. Nên $\widehat{ABC}=90°\Rightarrow\left(\widehat{\overrightarrow{BA};\overrightarrow{B'C'}}\right)=90°$

» **Câu 15.** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Khi đó, vectơ bằng vectơ $\overrightarrow{AB}$ là vectơ nào dưới đây?

A. $\overrightarrow{D'C'}$ **B.** $\overrightarrow{BA}$ **C.** $\overrightarrow{CD}$ **D.** $\overrightarrow{B'A'}$

Lời giải

Chọn A



Do $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp chữ nhật nên $AB=DC=D'C'$

Và $\overrightarrow{AB};\overrightarrow{D'C'}$ cùng phương, cùng chiều

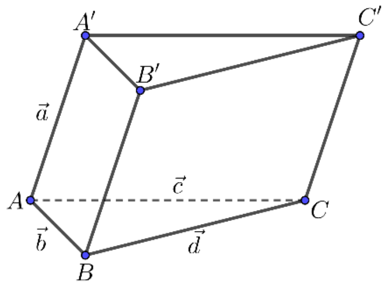
Từ đó $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{D'C'}$

» **Câu 16.** Cho hình lăng trụ tam giác $ABCA'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AA'}=\vec{a},\overrightarrow{AB}=\vec{b},\overrightarrow{AC}=\vec{c},\overrightarrow{BC}=\vec{d}$. Trong các biểu thức véctơ sau đây, biểu thức nào **đúng**?

A. $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{d}$ **B.** $\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}$ **C.** $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$ **D.** $\vec{b}-\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$

Lời giải

Chọn D



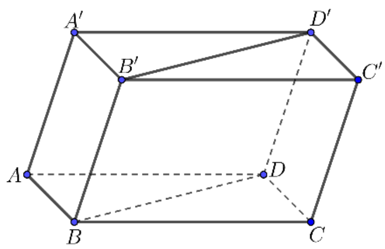
Ta thấy: $\vec{b}-\vec{c}+\vec{d}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BC}=\vec{0}$.

» **Câu 17.** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vectơ: $\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{D'D}-\overrightarrow{B'D'}=k\overrightarrow{BB'}$

A. $k=4$ **B.** $k=1$ **C.** $k=0$ **D.** $k=2$

Lời giải

Chọn B



Đặt $VT=\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{D'D}-\overrightarrow{B'D'}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DD'}+\overrightarrow{D'B'}=\overrightarrow{BD'}+\overrightarrow{D'B'}=\overrightarrow{BB'}$

Vậy $k=1$

» Câu 18. Cho tứ diện $ABCD$, gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD; Đẳng thức nào **sai**?

A. $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right)$

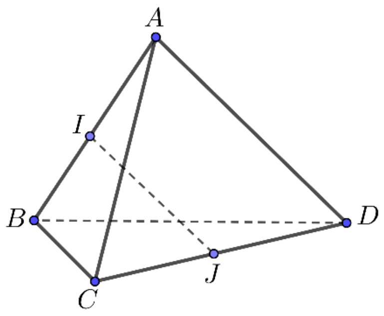
B. $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right)$

C. $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BD}\right)$

D. $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BD}\right)$

Lời giải

Chọn D



Ta có: $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AJ}$

$=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+2\overrightarrow{BC}\right)$.

Vậy đẳng thức **sai** là $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}\right)$.

» Câu 19. Cho hình hộp $ABCD.EFGH$. Gọi O là trung điểm CH. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. $\overrightarrow{BO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BF}$

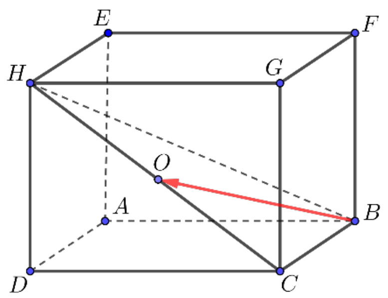
B. $\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BF}$.

C. $\overrightarrow{BO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BF}$.

D. $\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BF}$.

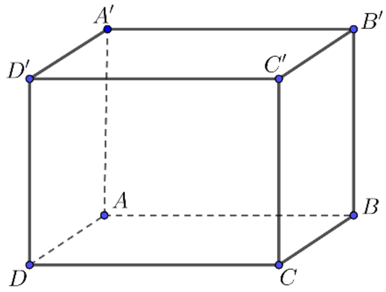
Lời giải

Chọn A



Ta có $\overrightarrow{BO}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BH}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BF}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BF}$.

» Câu 20. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Khẳng định nào sau đây là sai?



A. $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{A'D'}\right)=90^\circ$.

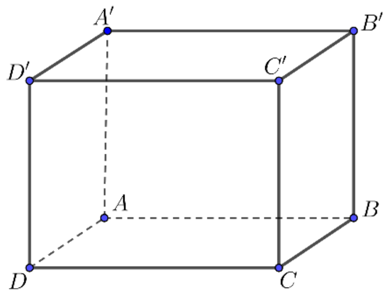
B. $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{A'C'}\right)=45^\circ$.

C. $\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{B'D'}\right)=90^\circ$.

D. $\left(\overrightarrow{A'A};\overrightarrow{CB'}\right)=45^\circ$.

Lời giải

Chọn D



$\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{A'D'}\right)=\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right)=\widehat{BAD}=90^\circ$

$\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{A'C'}\right)=\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\widehat{BAC}=45^\circ$

$\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{B'D'}\right)=\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{BD}\right)=90^\circ$

$\left(\overrightarrow{A'A};\overrightarrow{CB'}\right)=\left(\overrightarrow{C'C};\overrightarrow{CB'}\right)=\left(\overrightarrow{CE};\overrightarrow{CB'}\right)=135^\circ$ trong đó E là điểm đối xứng với C' qua C.

» **Câu 21.** Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. Tính góc $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)$.

A. $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)=60^\circ$.

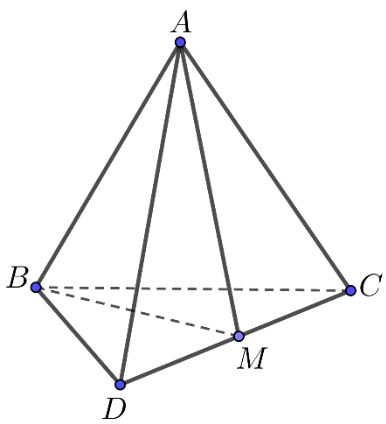
B. $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)=90^\circ$.

C. $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)=120^\circ$.

D. $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)=180^\circ$.

Lời giải

Chọn B



Gọi M là trung điểm CD.

Khi đó, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}\right).\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CD}$

Do tam giác ACD đều nên $AM\perp CD\Rightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CD}=0$

Và tam giác BCD đều nên $BM\perp CD\Rightarrow \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{CD}=0$

Vậy $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}\right).\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CD}=0\Rightarrow \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CD}$.

Kết luận $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)=90°$.

» Câu 22. Theo định luật II Newton: Gia tốc của một vật có cùng hướng với lực tác dụng lên vật. Độ lớn của gia tốc tỉ lệ thuận với độ lớn của lực và tỉ lệ nghịch với khối lượng của vật: $\vec{F}=m\vec{a}$, trong đó $\vec{a}$ là vecto gia tốc $\left(\mathrm{m/s^2}\right)$, $\vec{F}$ là vecto lực (N) tác dụng lên vật, $m(\mathrm{kg})$ là khối lượng của vật. Muốn truyền cho quả bóng có khối lượng $0{,}5\,\mathrm{kg}$ một gia tốc $20\ \mathrm{m/s^2}$ thì cần một lực đá có độ lớn là bao nhiêu?

A. $100(N)$. **B.** $20(N)$. **C.** $25(N)$. **D.** $10(N)$.

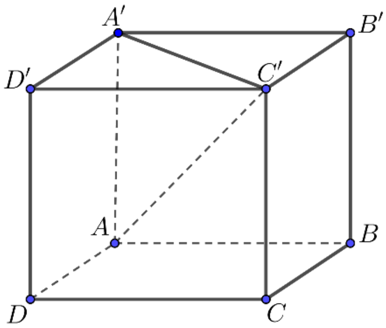
Lời giải

Chọn D

Ta có $\vec{F}=m\vec{a}\Rightarrow\left|\vec{F}\right|=m\left|\vec{a}\right|=0{,}5.20=10(N)$.

Vậy muốn truyền cho quả bóng có khối lượng $0{,}5\,\mathrm{kg}$ một gia tốc $20\ \mathrm{m/s^2}$ thì cần một lực đá có độ lớn là $10(N)$.

» Câu 23. Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$, trong đó mặt đáy là hình bình hành với $\widehat{DAB}=120°$. Biết độ dài các cạnh $AB=25cm, AD=12cm$ và $AA'=12cm$. Tính $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right|$.



A. $12(cm)$. **B.** $\sqrt{469}(cm)$. **C.** $\sqrt{613}(cm)$. **D.** $25(cm)$.

Lời giải

Chọn C

Theo quy tắc hình hộp, ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$, Vậy $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right|=\left|\overrightarrow{AC'}\right|=AC'$

Với $AC'=\sqrt{AC^2+AA'^2}$

Trong đó: $AA'=12(cm)$

Do tổng hai góc kề của một hình bình hành là $180°$ nên ta có góc $\widehat{ABC}=60°$

Áp dụng định lý cosin trong tam giác ABC, ta có

$AC^2=AB^2+BC^2-2AB.BC.\cos\widehat{ABC}=25^2+12^2-2.25.12.\cos 60°=469$.

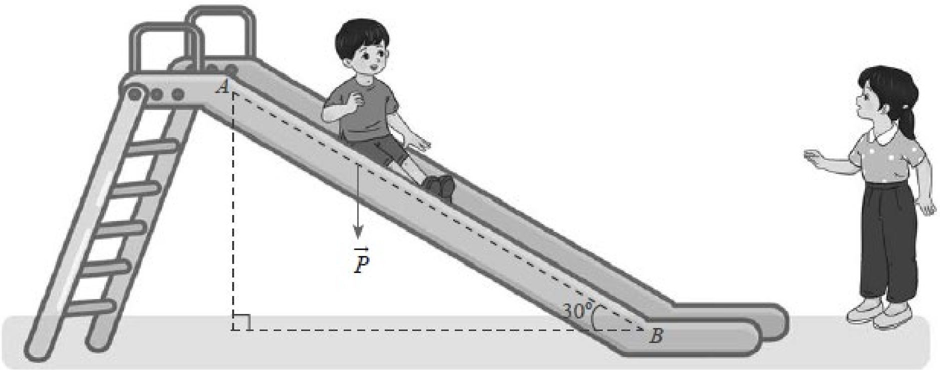
Vậy $AC'=\sqrt{AC^2+AA'^2}=\sqrt{469+144}=\sqrt{613}(cm)$.

» Câu 24. Một em nhỏ cân nặng $m=25(kg)$ trượt trên cầu trượt dài $3,5(m)$ (như trong hình dưới đây). Biết rằng, cầu trượt có góc nghiêng so với phương nằm ngang là $30°$. Trong các khẳng định sau, có bao nhiêu khẳng định đúng?

» Với gia tốc rơi tự do $\vec{g}$ có độ lớn là $g=9,8(\text{m/s}^2)$ thì độ lớn của trọng lực $\vec{P}=m\vec{g}$ tác dụng lên em nhỏ có độ lớn là $245(N)$.

» Góc giữa độ dịch chuyển $\vec{d}$ so với trọng lực $\vec{P}$ là $30°$.

» Công $A(J)$ sinh bởi một lực $\vec{F}$ có độ dịch chuyển $\vec{d}$ được tính bởi công thức $A=\left|\vec{F}\right|.\left|\vec{d}\right|.\cos\left(\vec{F};\vec{d}\right)$ thì công sinh bởi trọng lực $\vec{P}$ khi em nhỏ trượt hết chiều dài cầu trượt là $428,75(J)$.



A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

» Với gia tốc rơi tự do $\vec{g}$ có độ lớn là $g=9,8(\text{m/s}^2)$ thì độ lớn của trọng lực $\vec{P}=m\vec{g}$ tác dụng lên em nhỏ có độ lớn là $\left|\vec{P}\right|=m\left|\vec{g}\right|=25.9,8=245(N)$.

» Em nhỏ trượt từ điểm A tới điểm B nên khi đó góc giữa độ dịch chuyển $\vec{d}$ so với trọng lực $\vec{P}$ là $\left(\vec{d},\vec{P}\right)=\left(\overrightarrow{AB},\vec{P}\right)=60°$.

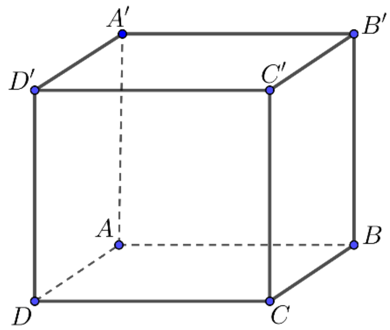
» Ta có độ lớn của trọng lực $\vec{P}=m\vec{g}$ tác dụng lên em nhỏ có độ lớn là $\left|\vec{P}\right|=m\left|\vec{g}\right|=25.9,8=245(N)$ nên công sinh bởi trọng lực $\vec{P}$ khi em nhỏ trượt hết chiều dài cầu trượt là $A=\left|\vec{P}\right|.\left|\vec{d}\right|.\cos\left(\vec{P},\vec{d}\right)=245.3,5.\cos 60°=428,75(J)$.

B. Câu hỏi – Trả lời Đúng/sai

» **Câu 25.** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=2, AD=3, A'A=4$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Vectơ $\overrightarrow{BA'}$ bằng vectơ $\overrightarrow{CD'}$.		
(b)	$\left\|\overrightarrow{BA'}\right\|=\left\|\overrightarrow{A'D}\right\|=\left\|\overrightarrow{DB}\right\|$		
(c)	Số các vectơ khác $\vec{0}$ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình hộp là A_8^2.		
(d)	Độ dài của vectơ $\overrightarrow{BD'}$ bằng $3\sqrt{3}$.		

Lời giải



(a) Vectơ $\overrightarrow{BA'}$ bằng vectơ $\overrightarrow{CD'}$.

Vectơ $\overrightarrow{BA'}$ bằng vectơ $\overrightarrow{CD'}$ vì chúng cùng hướng và cùng độ dài.

» **Chọn** ĐÚNG.

(b) $\left|\overrightarrow{BA'}\right|=\left|\overrightarrow{A'D}\right|=\left|\overrightarrow{DB}\right|$.

Ta có $\left|\overrightarrow{BA'}\right|=BA'=\sqrt{BA^2+BB'^2}=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}$ và $\left|\overrightarrow{BD}\right|=BD=\sqrt{BC^2+BA^2}=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$

nên $\left|\overrightarrow{BA'}\right|\neq\left|\overrightarrow{DB}\right|$.

» **Chọn** SAI.

(c) Số các vectơ khác $\vec{0}$ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình hộp là A_8^2.

Số các vectơ khác $\vec{0}$ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình hộp là A_8^2.

» **Chọn** ĐÚNG.

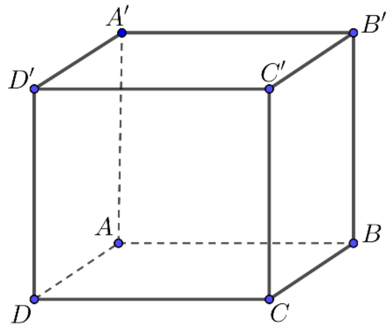
(d) Độ dài của vectơ $\overrightarrow{BD'}$ bằng $3\sqrt{3}$.

Độ dài của vectơ $\overrightarrow{BD'}$ bằng $3\sqrt{3}$.

Ta có $\left|\overrightarrow{BD'}\right|=\sqrt{BA^2+BC^2+BB'^2}=\sqrt{4+9+16}=\sqrt{29}$.

» **Chọn** SAI.

» **Câu 26.** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.



	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A'D'}+\overrightarrow{B'B}=\overrightarrow{A'C}$		
(b)	$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{B'A}$		
(c)	$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{D'B'}$		
(d)	$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DC}$		

Lời giải

(a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A'D'}+\overrightarrow{B'B}=\overrightarrow{A'C}$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(b) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{B'A}$.

Ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AB'}$.

» **Chọn** SAI.

(c) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{D'B'}$.

$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{D'B'}$

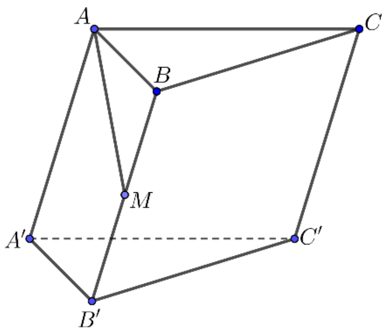
» **Chọn** ĐÚNG.

(d) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DC}$.

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CD}$.

» **Chọn** SAI.

» **Câu 27.** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M là trung điểm của BB' và G là trọng tâm tam giác ABC.



	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BB'}$		
(b)	$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{B'B}$		
(c)	$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB'}$		

(d)	$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$		

Lời giải

(a) $\overrightarrow{BM}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BB'}$.

» Chọn ĐÚNG.

(b) $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{B'B}$.

$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BB'}$.

» Chọn SAI.

(c) $\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB'}$

$\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB'}$

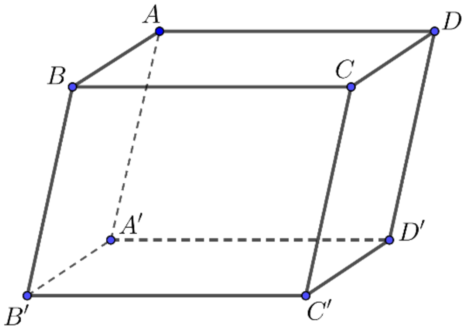
» Chọn ĐÚNG.

(d) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$.

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$

» Chọn ĐÚNG.

» Câu 28. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Khi đó



	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{C'D'}$ bằng nhau		
(b)	Hai vectơ $\overrightarrow{A'D}$ và $\overrightarrow{CB'}$ đối nhau		
(c)	Hai vectơ $\overrightarrow{A'B'}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương với nhau		
(d)	Có 3 vectơ khác vectơ $\vec{0}$ bằng vectơ $\overrightarrow{BC}$		

Lời giải

(a) Hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{C'D'}$ bằng nhau.

Hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{C'D'}$ ngược hướng và có độ dài bằng nhau.

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{C'D'}$ đối nhau.

» Chọn SAI.

(b) Hai vectơ $\overrightarrow{A'D}$ và $\overrightarrow{CB'}$ đối nhau.

Ta có vectơ $\overrightarrow{A'D}$ và $\overrightarrow{CB'}$ cùng độ dài và ngược hướng nhau

$\Rightarrow \overrightarrow{A'D}$ và $\overrightarrow{CB'}$ đối nhau.

» Chọn ĐÚNG.

(c) Hai vectơ $\overrightarrow{A'B'}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương với nhau.

Ta có $A'B'$ không song song với AC nên hai vectơ $\overrightarrow{A'B'}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương với nhau.

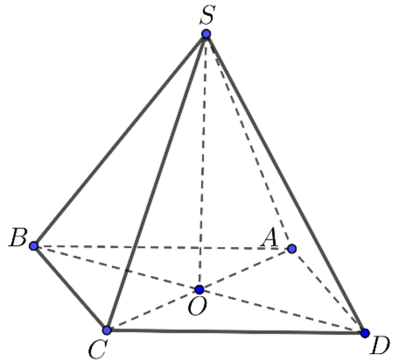
» Chọn SAI.

(d) Có 3 vectơ khác vectơ $\vec{0}$ bằng vectơ $\overrightarrow{BC}$.

Ta có các vectơ khác $\vec{0}$ bằng với vectơ $\overrightarrow{BC}$ là $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{A'D'}, \overrightarrow{B'C'}$

» Chọn ĐÚNG.

» Câu 29. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có O là tâm của đáy $ABCD$, cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $2a$ (tham khảo hình bên).



	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{CB}$ là $0°$.		
(b)	Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{BD}$ và $\overrightarrow{BO}$ là $180°$.		
(c)	Cosin của góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{CS}$ bằng $\frac{1}{4}$.		
(d)	Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AO}$ và $\overrightarrow{SD}$ bằng $60°$.		

Lời giải

(a) Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{CB}$ là $0°$.

Hai vectơ $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{CB}$ là hai vectơ ngược hướng nên góc giữa chúng bằng $180°$.

» Chọn SAI.

(b) Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{BD}$ và $\overrightarrow{BO}$ là $180°$.

Hai vectơ $\overrightarrow{BD}$ và $\overrightarrow{BO}$ là hai vectơ cùng hướng nên góc giữa chúng là $0°$.

» Chọn SAI.

(c) Cosin của góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{CS}$ bằng $\frac{1}{4}$.

- $\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CS}\right) = \left(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CS}\right) = \widehat{SCD}.$
- Áp dụng định lý cosin cho tam giác SCD có

$$\cos\widehat{SCD} = \frac{SC^2 + CD^2 - SD^2}{2SC.CD} = \frac{(2a)^2 + a^2 - (2a)^2}{2.2a.a} = \frac{1}{4}$$

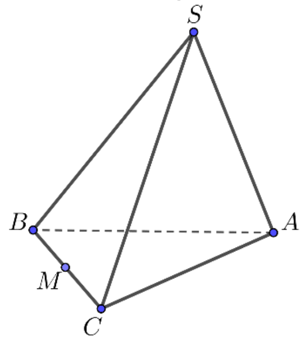
» Chọn ĐÚNG.

(d) Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AO}$ và $\overrightarrow{SD}$ bằng $60°$.

Ta có $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{SD}=-\overrightarrow{OA}.\left(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OS}\right)=-\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OS}=0$ nên góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AO}$ và $\overrightarrow{SD}$ bằng $90°$.

» Chọn SAI.

» Câu 30. Cho tứ diện đều $S.ABC$ có tất cả các cạnh bằng a, M là trung điểm của cạnh BC.



	Mệnh đề	**Đúng**	**Sai**
(a)	$\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB}=\overrightarrow{SB}.\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC}$		
(b)	$\overrightarrow{AM}=-\overrightarrow{SA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{SB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{SC}$		
(c)	Góc giữa $\overrightarrow{SA}$ và $\overrightarrow{BC}$ bằng $90°$		
(d)	$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{SC}=0$		

Lời giải

(a) $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB}=\overrightarrow{SB}.\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC}$.

Ta có $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB}=SA.SB.\cos\widehat{ASB}=a.a.\cos 60°=\frac{a^2}{2}$.

Tương tự, $\overrightarrow{SB}.\overrightarrow{SC}=\frac{a^2}{2};\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC}=\frac{a^2}{2}$ nên $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB}=\overrightarrow{SB}.\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC}$.

» Chọn ĐÚNG.

(b) $\overrightarrow{AM}=-\overrightarrow{SA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{SB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{SC}$.

Ta có: $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{SM}-\overrightarrow{SA}=-\overrightarrow{SA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{SB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{SC}$.

» Chọn ĐÚNG.

(c) Góc giữa $\overrightarrow{SA}$ và $\overrightarrow{BC}$ bằng $90°$.

Góc giữa $\overrightarrow{SA}$ và $\overrightarrow{BC}$ bằng $90°$.

Ta có $\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{SA}=\overrightarrow{SB}.\overrightarrow{SA}=a^2.\cos 60°=\frac{a^2}{2}$.

Suy ra $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{SA}=\left(\overrightarrow{SC}-\overrightarrow{SB}\right).\overrightarrow{SA}=\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{SA}-\overrightarrow{SB}.\overrightarrow{SA}=0$ nên góc giữa $\overrightarrow{SA}$ và $\overrightarrow{BC}$ bằng $90°$.

» Chọn ĐÚNG.

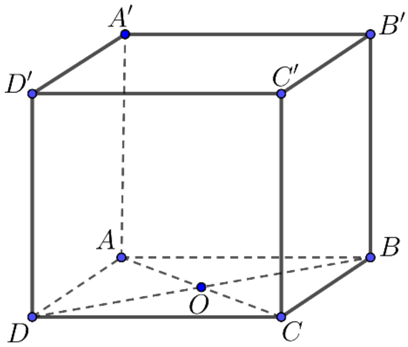
(d) $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{SC}=0$.

Ta có $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{SC}=\left(-\overrightarrow{SA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{SB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{SC}\right).\overrightarrow{SC}=-\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{SB}.\overrightarrow{SC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{SC}$

$=-\frac{a^2}{2}+\frac{1}{2}.\frac{a^2}{2}+\frac{1}{2}a^2=\frac{a^2}{4}$.

» **Chọn** SAI.

» **Câu 31.** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh a và $AA'=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi O là giao điểm của AC và BD.



	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{C'A'}\right)=\left(AC,C'A'\right)$		
(b)	Gọi $\vec{u}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$, $\vec{v}=\overrightarrow{B'C'}$. Ta có $\left(\vec{u};\vec{v}\right)=60^\circ$.		
(c)	Gọi $\vec{x}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$, $\vec{y}=\overrightarrow{A'C'}$. Ta có $\left(\vec{x};\vec{y}\right)=90^\circ$.		
(d)	$\left(\overrightarrow{OA'},\overrightarrow{OC'}\right)=90^\circ$		

Lời giải

(a) $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{C'A'}\right)=\left(AC,C'A'\right)$.

$\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{C'A'}\right)=\left(AC,C'A'\right)$.

Ta có $AC//C'A'\Rightarrow\left(AC,C'A'\right)=0^\circ$.

$\overrightarrow{AC},\overrightarrow{C'A'}$ là hai vectơ ngược hướng nên $\Rightarrow\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{C'A'}\right)=180^\circ$.

» **Chọn SAI.**

(b) Gọi $\vec{u}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$, $\vec{v}=\overrightarrow{B'C'}$. *Ta có* $\left(\vec{u};\vec{v}\right)=60^\circ$.

Ta có $\vec{u}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$, $\vec{v}=\overrightarrow{B'C'}$ $\Rightarrow\left(\vec{u};\vec{v}\right)=\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{B'C'}\right)=\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)=\widehat{CAD}=45^\circ$.

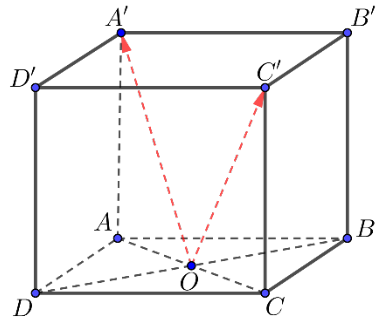
» **Chọn SAI.**

(c) Gọi $\vec{x}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$, $\vec{y}=\overrightarrow{A'C'}$. *Ta có* $\left(\vec{x};\vec{y}\right)=90^\circ$.

Ta có $\vec{x}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BD}$, $\vec{y}=\overrightarrow{A'C'}=\overrightarrow{AC}$ suy ra $\left(\vec{x};\vec{y}\right)=\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}\right)=90^\circ$.

» **Chọn ĐÚNG.**

(d) $\left(\overrightarrow{OA'},\overrightarrow{OC'}\right)=90^\circ$.

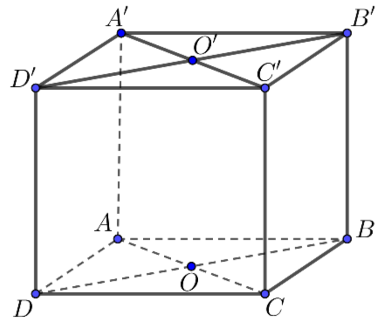


Ta có $(OA')^2=(OC')^2=AO^2+(AA')^2=\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{5a^2}{4}\neq(A'C')^2=2a^2$.

Suy ra tam giác $OA'C'$ không thể vuông tại O.

» Chọn SAI.

» Câu 32. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi O,O' lần lượt là tâm của hình vuông $ABCD$ và $A'B'C'D'$.



	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC'}=\frac{a^2}{2}$		
(b)	$\overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{B'D'}=-\frac{a^2}{2}$		
(c)	$\left\|\overrightarrow{D'A'}+\overrightarrow{C'C}+\overrightarrow{AB}\right\|=a\sqrt{3}$		
(d)	$\left\|\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{OC'}+\overrightarrow{OD'}\right\|=4a$		

Lời giải

(a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC'}=\frac{a^2}{2}$.

Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC'}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB'}=\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AB'}\right|\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AB'}\right)=a.a\sqrt{2}.\cos 45^\circ=a^2$.

» Chọn SAI.

(b) $\overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{B'D'}=-\frac{a^2}{2}$.

Ta có $\left(\overrightarrow{AB'},\overrightarrow{B'D'}\right)=180^\circ-\widehat{AB'D'}=120^\circ$, suy ra

$\overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{B'D'}=\left|\overrightarrow{AB'}\right|.\left|\overrightarrow{B'D'}\right|\cos 120^\circ=\left(a\sqrt{2}\right).\left(a\sqrt{2}\right).\left(-\frac{1}{2}\right)=-a^2$.

» Chọn SAI.

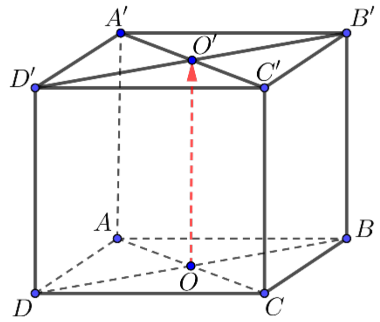
(c) $\left|\overrightarrow{D'A'}+\overrightarrow{C'C}+\overrightarrow{AB}\right|=a\sqrt{3}$

Ta có $\overrightarrow{D'A'}+\overrightarrow{C'C}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{D'A'}+\overrightarrow{D'D}+\overrightarrow{D'C'}=\overrightarrow{D'B}$

Suy ra $\left|\overrightarrow{D'A'}+\overrightarrow{C'C}+\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{D'B}\right|=BD'=a\sqrt{3}$

» Chọn ĐÚNG.

(d) $\left|\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{OC'}+\overrightarrow{OD'}\right|=4a$.



Ta có $\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{OC'}+\overrightarrow{OD'}=\left(\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OC'}\right)+\left(\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{OD'}\right)=2\overrightarrow{OO'}+2\overrightarrow{OO'}=4\overrightarrow{OO'}$.

Suy ra $\left|\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{OC'}+\overrightarrow{OD'}\right|=4\left|\overrightarrow{OO'}\right|=4a$.

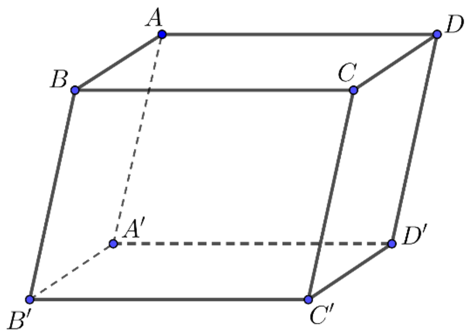
» Chọn ĐÚNG.

C. Câu hỏi – Trả lời ngắn

» Câu 33. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, từ các đỉnh của hình hộp đã cho, có bao nhiêu vectơ đối (khác vectơ không) của vectơ $\overrightarrow{AB}$?

Lời giải

✓ Trả lời: 4



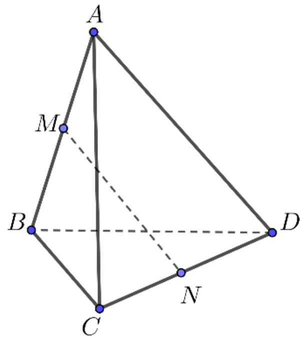
Ta có các vectơ đối của vectơ $\overrightarrow{AB}$ là $\overrightarrow{BA},\overrightarrow{CD},\overrightarrow{B'A'},\overrightarrow{C'D'}$.

Vậy số vectơ đối là 4 vectơ.

» Câu 34. Cho tứ diện $ABCD$, gọi M,N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Biết rằng $\overrightarrow{MN}=a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC}+c\overrightarrow{AD}$. Giá trị của biểu thức $a+b+c$ bằng:

Lời giải

✓ Trả lời: 1,5



Ta có: $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$.

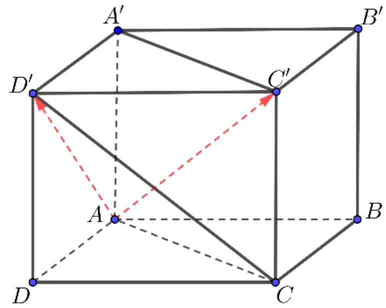
$=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\left(-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

Vậy $a+b+c=\frac{3}{2}=1,5$

» Câu 35. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Giá trị tan của góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AD'}$ và $\overrightarrow{A'C'}$ bằng (làm tròn tới hàng phần nghìn).

Lời giải

✓ ***Trả lời: 1,732***



Ta có $\left(\overrightarrow{AD'},\overrightarrow{A'C'}\right)=\left(\overrightarrow{AD'},\overrightarrow{AC}\right)=\widehat{D'AC}=60°$ (do tam giác $\Delta ACD'$ đều).

Vậy $\tan 60^{\circ}=\sqrt{3}\approx 1,732$

» Câu 36. *Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ tạo với nhau một góc $120°$, đồng thời $\left|\vec{a}\right|=2$ và $\left|\vec{b}\right|=5$. Đặt $\vec{u}=k\vec{a}-\vec{b}$ và $\vec{v}=\vec{a}+2\vec{b}$. Để $\vec{u}\perp\vec{v}$ thì giá trị của k là*

Lời giải

✓ ***Trả lời: -4,5***

Ta có: $\vec{a}.\vec{b}=\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|\cos 120^{\circ}=2.5.\left(-\frac{1}{2}\right)=-5$.

Để $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}.\vec{v}=0\Leftrightarrow\left(k\vec{a}-\vec{b}\right)\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)=0$

$\Leftrightarrow k\left|\vec{a}\right|^2+\left(2k-1\right)\vec{a}\vec{b}-2\left|\vec{b}\right|^2=0\Leftrightarrow -6k-45=0\Leftrightarrow k=-\frac{9}{2}=-4,5$.

» Câu 37. Cho ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ không đồng phẳng. Xét $\vec{x}=2\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$, $\vec{y}=-\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{z}=\vec{a}+4\vec{b}+m\vec{c}$. Giá trị của m để các vectơ $\vec{x};\vec{y};\vec{z}$ đồng phẳng bằng?

Lời giải

✓ ***Trả lời: 1***

Do $\vec{y};\vec{z}$ không cùng phương, để các vectơ $\vec{x};\vec{y};\vec{z}$ đồng phẳng

$\Leftrightarrow$ tồn tại $\alpha,\beta\in\mathbb{R}:\vec{x}=\alpha\vec{y}+\beta\vec{z}\Leftrightarrow 2\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}=\alpha\left(-\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}\right)+\beta\left(\vec{a}+4\vec{b}+m\vec{c}\right)$

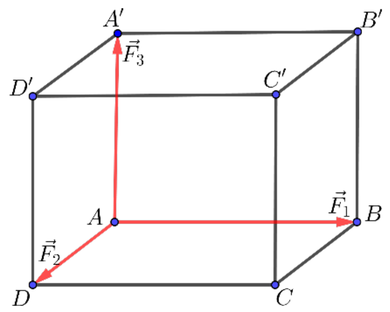
$$\Leftrightarrow\begin{cases}-\alpha+\beta=2\\2\alpha+4\beta=-1\\\alpha+m\beta=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=-\dfrac{3}{2}\\\beta=\dfrac{1}{2}\\m=1\end{cases}.$$

Vậy $m=1$

» Câu 38. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ như hình vẽ. Đặt một vật tại đỉnh A, khi đó tác động vào vật bởi những lực $\vec{F_1},\vec{F_2},\vec{F_3}$ có giá lần lượt nằm trên các cạnh AB,AD,AA' và $\left|\vec{F_1}\right|=2N,\left|\vec{F_2}\right|=3N,\left|\vec{F_3}\right|=4N$. Hãy xác định độ lớn của hợp lực $\vec{F}$ tác động lên vật (làm tròn đến hàng phần nghìn).

Lời giải

✓ Trả lời: 5,385



Ta có $\vec{F}=\vec{F_1}+\vec{F_2}+\vec{F_3}$

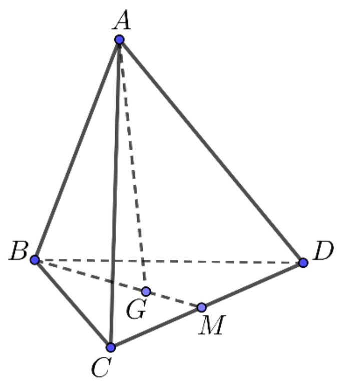
Theo quy tắc hình hộp ta có: $\vec{F}$ có giá là nằm trên cạnh AC'

Do $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp chữ nhật nên $\left|\vec{F}\right|=\sqrt{\left|\vec{F_1}\right|^2+\left|\vec{F_2}\right|^2+\left|\vec{F_3}\right|^2}=\sqrt{29}\approx 5,385N$

» Câu 39. Cho tứ diện $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{c}$ gọi G là trọng tâm của tam giác BCD. Tìm giá trị thích hợp của k thỏa đẳng thức vecto $\overrightarrow{AG}=k.\left(\vec{c}+\vec{b}+\vec{a}\right)$. (làm tròn tới hàng phần nghìn).

Lời giải

✓ Trả lời: 0,333



Gọi M là trung điểm BC.

$$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BG}=\vec{a}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BM}=\vec{a}+\frac{2}{3}.\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}\right)$$

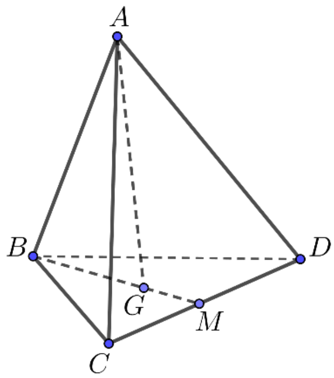
$$=\vec{a}+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\right)=\vec{a}+\frac{1}{3}\left(-2\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)=\frac{1}{3}\left(\vec{c}+\vec{b}+\vec{a}\right).$$

Vậy $k=\frac{1}{3}\sim 0,333$.

» Câu 40. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Tìm giá trị thích hợp của k thỏa đẳng thức vectơ: $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=k.\overrightarrow{DG}$?

Lời giải

✓ *Trả lời: 3*



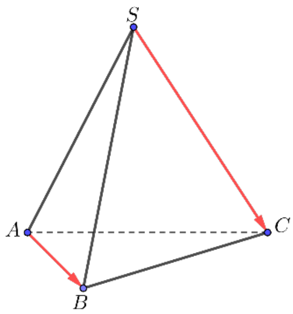
$\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{DG}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{DG}+\overrightarrow{GC}=3\overrightarrow{DG}$.

Vậy $k=3$.

» Câu 41. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=SB=SC$ và $\widehat{ASB}=\widehat{BSC}=\widehat{CSA}$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{SC}$ và $\overrightarrow{AB}$?

Lời giải

✓ *Trả lời: 90*



Ta có: $\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{SC}.\left(\overrightarrow{SB}-\overrightarrow{SA}\right)=\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{SB}-\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{SA}$

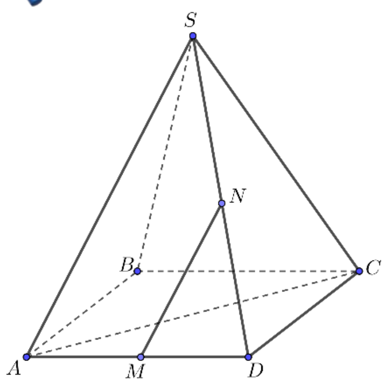
$=SC.SB\cos\widehat{BSC}-SC.SA.\cos\widehat{ASC}=0$ (Vì $SA=SB=SC$ và $\widehat{BSC}=\widehat{ASC}$)

Do đó: $\left(\overrightarrow{SC},\overrightarrow{AB}\right)=90^{\circ}$

» Câu 42. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh bằng a và các cạnh bên đều bằng a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và SD. Số đo của góc (MN,SC) bằng:

Lời giải

✓ *Trả lời: 90*



Ta có: $AC = a\sqrt{2}$

$\Rightarrow AC^2 = 2a^2 = SA^2 + SC^2$

$\Rightarrow \Delta SAC$ vuông tại S.

Suy ra $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC} = 0$

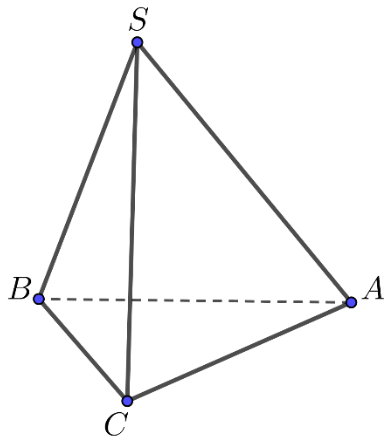
Khi đó: $\overrightarrow{NM}.\overrightarrow{SC} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC} = 0 \Rightarrow \left(\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{SC}\right) = 90°$

$\Rightarrow (MN, SC) = 90°$.

» Câu 43. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB$ và $CA = CB$. Tính số đo của góc giữa hai đường thẳng chéo nhau SC và AB.

Lời giải

✓ *Trả lời: 90*



Xét $\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CS}.\left(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}\right) = \overrightarrow{CS}.\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CS}.\overrightarrow{CB}$

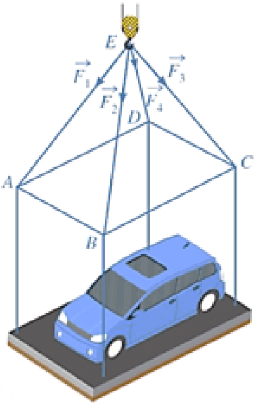
$= CS.CA.\cos\widehat{SCA} - CS.CB.\cos\widehat{SCB}$

$= CS.CA.\dfrac{SC^2 + CA^2 - SA^2}{2SC.CA} - CS.CB.\dfrac{SC^2 + CB^2 - SB^2}{2SC.CB}$

$= \dfrac{SC^2 + CA^2 - SA^2}{2} - \dfrac{SC^2 + CB^2 - SB^2}{2} = 0$ (do $SA = SB$ và $CA = CB$)

Vậy góc giữa hai đường thẳng chéo nhau SC và AB bằng $90°$.

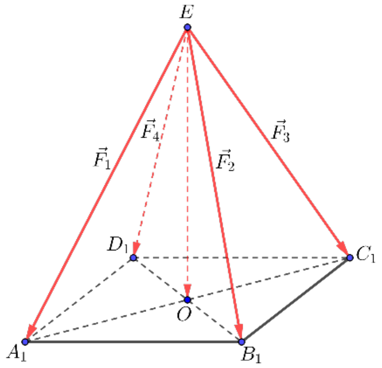
» Câu 44. Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới của một khung sắt có dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình chữ nhật $ABCD$, mặt phẳng $(ABCD)$ song song với mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được buộc vào móc E của chiếc cần cẩu sao cho các đoạn dây cáp EA, EB, EC, ED có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc bằng $60°$. Chiếc cần cẩu kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng.



Tính trọng lượng của chiếc xe ô tô (làm tròn đến hàng đơn vị), biết rằng các lực căng $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}, \overrightarrow{F_4}$ đều có cường độ là $4700N$ và trọng lượng của khung sắt là $3000N$.

Lời giải

✓ ***Trả lời: 13281***



Gọi A_1, B_1, C_1, D_1 lần lượt là các điểm sao cho $\overrightarrow{EA_1} = \overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{EB_1} = \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{EC_1} = \overrightarrow{F_3}, \overrightarrow{ED_1} = \overrightarrow{F_4}$.

Vì EA, EB, EC, ED có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc bằng 60^o nên EA_1, EB_1, EC_1, ED_1 có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(A_1B_1C_1D_1)$ một góc bằng 60^o.

Vì $ABCD$ là hình chữ nhật nên $A_1B_1C_1D_1$ cũng là hình chữa nhật.

Gọi O là tâm của hình chữ nhật $A_1B_1C_1D_1$. Ta suy ra $EO \perp (A_1B_1C_1D_1)$.

Do đó góc giữa đường thẳng EA_1 và mặt phẳng $(A_1B_1C_1D_1)$ bằng góc $\widehat{EA_1O}$ suy ra $\widehat{EA_1O} = 60^o$.

Ta có $\left|\overrightarrow{F_1}\right| = \left|\overrightarrow{F_2}\right| = \left|\overrightarrow{F_3}\right| = \left|\overrightarrow{F_4}\right| = 4700N$ nên $EA_1 = EB_1 = EC_1 = ED_1 = 4700N$.

Tam giác EOA_1 vuông tại O nên $EO = EA_1.\sin\widehat{EA_1O} = 4700.\sin 60° = 2350\sqrt{3}$.

Ta có: $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} + \overrightarrow{F_4} = \overrightarrow{EA_1} + \overrightarrow{EB_1} + \overrightarrow{EC_1} + \overrightarrow{ED_1} = 4\overrightarrow{EO} + \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OD_1} = 4\overrightarrow{EO}$.

Vì chiếc khung sắt chứa xe ô tô ở vị trí cân bằng nên $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} + \overrightarrow{F_4} = \overrightarrow{P}$, với $\overrightarrow{P}$ là trọng lực tác dụng lên khung sắt chứa xe ô tô.

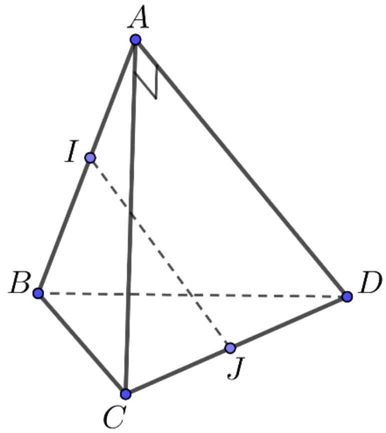
Suy ra trọng lượng của khung sắt chứa chiếc xe ô tô là: $\left|\overrightarrow{P}\right| = 4\left|\overrightarrow{EO}\right| = 4.2350\sqrt{3} = 9400\sqrt{3}N$

Vì trọng lượng của khung sắt là $3000N$ nên trọng lượng của chiếc xe ô tô là: $9400\sqrt{3} - 3000 \approx 13281N$.

» Câu 45. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD$ và $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60°, \widehat{CAD} = 90°$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{IJ}$ và $\overrightarrow{CD}$.

Lời giải

✓ ***Trả lời: 90***



$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DJ}\ (1)$

$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CJ}\ (2)$

Lấy $(1)+(2)$ ta được:

$2\overrightarrow{IJ} = \left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}\right) + \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\right) + \left(\overrightarrow{DJ} + \overrightarrow{CJ}\right) = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$

Hay $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)$.

$\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right).\left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}\right)$

$= \frac{1}{2}AD^2 - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}AC^2 - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$= -\frac{1}{2}.AB.AD.\cos 60° + \frac{1}{2}AB.AC.\cos 60° = 0$.

Vậy $\overrightarrow{IJ} \perp \overrightarrow{CD} \Rightarrow \left(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{CD}\right) = 90°$.

Chương 02

Bài 2. TỌA ĐỘ CỦA VECTO TRONG KHÔNG GIAN

A Lý thuyết

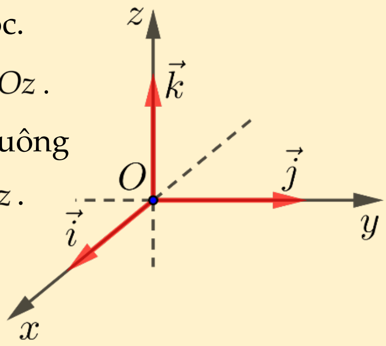
1. Hệ tọa độ trong không gian.

Định nghĩa:

Trong không gian, cho ba trục Ox, Oy, Oz đôi một vuông góc.

» Gọi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lần lượt là ba vectơ đơn vị trên các trục Ox, Oy, Oz.

» Hệ ba trục như vậy được gọi là hệ trục tọa độ Descartes vuông góc $Oxyz$ trong không gian hay gọi đơn giản hệ tọa độ $Oxyz$.



2. Tọa độ của điểm và vectơ.

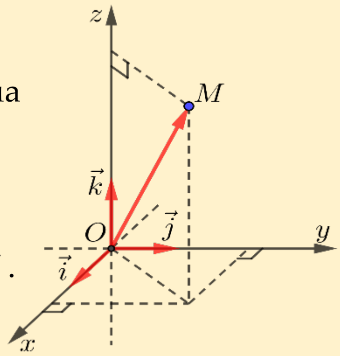
Tọa độ điểm

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm M.

» Nếu $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ thì ta gọi bộ ba số $(x;y;z)$ là tọa độ của điểm M đối với hệ trục toạ độ $Oxyz$.

» Viết $M = (x;y;z)$ hoặc $M(x;y;z)$;

Trong đó x là hoành độ, y là tung độ, z là cao độ của điểm M.



Tọa độ vecto

Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{a}$.

» Nếu $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ thì ta gọi bộ ba số $(a_1;a_2;a_3)$ là tọ độ của vectơ $\vec{a}$ đối với hệ toạ độ $Oxyz$

» Viết $\vec{a} = (a_1;a_2;a_3)$ hoặc $\vec{a}(a_1;a_2;a_3)$;.

Trong đó a_1 là hoành độ, a_2 là tung độ, a_3 là cao độ của vectơ $\vec{a}$.

B Các dạng bài tập

Dạng 1. Tọa độ điểm

Phương pháp

» Nếu $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$ thì $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$.

» Nếu $\overrightarrow{OM}=m_1\vec{i}+m_2\vec{j}+m_3\vec{k}$ thì $\overrightarrow{OM}=(m_1;m_2;m_3)\Rightarrow M(m_1;m_2;m_3)$.

» Nếu $\overrightarrow{MO}=m_1\vec{i}+m_2\vec{j}+m_3\vec{k}$ thì $\overrightarrow{MO}=(m_1;m_2;m_3)\Rightarrow M(-m_1;-m_2;-m_3)$.

(1) M thuộc các trục tọa độ: .... $\left|\begin{array}{l} M\in Ox\to M(x;0;0)\\ M\in Oy\to M(0;y;0)\\ M\in Oz\to M(0;0;z)\end{array}\right.$

(2) M thuộc các mặt phẳng tọa độ: .... $\left|\begin{array}{l} M\in (Oxy)\to M(x;y;0)\\ M\in (Oxz)\to M(x;0;z)\\ M\in (Oyz)\to M(0;y;z)\end{array}\right.$

Ví dụ 1.1.

Xác định tọa độ điểm M trong các trường hợp sau

(1) $\overrightarrow{MO}=2\vec{i}-3\vec{k}$ (2) $\overrightarrow{OM}=2\overrightarrow{OA}+\vec{i}$ với $A(2;-3;1)$

Lời giải

(1) $\overrightarrow{MO}=2\vec{i}-3\vec{k}$

Ta có $\overrightarrow{OM}=-2\vec{i}+3\vec{k}$. Do đó $M(-2;0;3)$.

(2) $\overrightarrow{OM}=2\overrightarrow{OA}+\vec{i}$ với $A(2;-3;1)$

Ta có $\overrightarrow{OM}=2\left(2\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}\right)+3\vec{k}=4\vec{i}-4\vec{j}+5\vec{k}$. Vậy $M(4;-4;5)$.

Ví dụ 1.2.

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(-4;3;-1)$ và $N(2;-1;-3)$. Tìm tọa độ của các vecto $\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}$.

Lời giải

Ta có: $M(-4;3;-1)$ và $N(2;-1;-3)$.

Do đó, $\overrightarrow{OM}=(-4;3;-1);\overrightarrow{ON}=(2;-1;-3)$.

Ví dụ 1.3.

Cho điểm $M(-2;5;3)$. Tìm hình chiếu vuông góc của điểm M trên các trục tọa độ.

Lời giải

Gọi:

$M'(x';y';z')$ là hình chiếu vuông góc của điểm M trên trục Ox.

$M''(x'';y'';z'')$ là hình chiếu vuông góc của điểm M trên trục Oy.

$M'''(x''';y''';z''')$ là hình chiếu vuông góc của điểm M trên trục Oz.

Khi đó $M'(-2;0;0)$; $M''(0;5;0)$; $M''(0;0;3)$.

Ví dụ 1.4.

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;-3)$ và vectơ $\vec{u}=(3;-4;2)$. Hãy biểu diễn theo các vectơ $\vec{i},\vec{j}$ và $\vec{k}$ mỗi vectơ sau:

(1) $\overrightarrow{OA}$ **(2)** $\vec{u}$

Lời giải

(1) $\overrightarrow{OA}$

Vì điểm A có toạ độ là $A(1;2;-3)$ nên $\overrightarrow{OA}=(1;2;-3)$

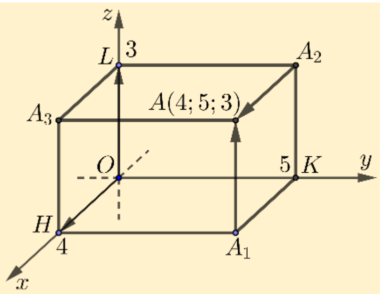
Do đó, $\overrightarrow{OA}=1\vec{i}+2\vec{j}+(-3)\vec{k}=\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$.

(2) $\vec{u}$

Vì $\vec{u}=(3;-4;2)$ nên $\vec{u}=3\vec{i}+(-4)\vec{j}+2\vec{k}=3\vec{i}-4\vec{j}+2\vec{k}$.

Ví dụ 1.4.

Trong không gian $Oxyz$, cho tọa độ $A(4;5;3)$ và vị trí các điểm $L;K;H;A_1;A_2;A_3$ như hình vẽ bên. Xác định tọa độ của các vectơ $\overrightarrow{A_1A},\overrightarrow{A_2A}$



Lời giải

Từ hình vẽ, ta có: $\overrightarrow{A_1A}=\overrightarrow{OL}$; $\overrightarrow{A_2A}=\overrightarrow{OH}$

Mà $L(0;0;3)\Rightarrow\overrightarrow{OL}=(0;0;3)$ và $H(4;0;0)\Rightarrow\overrightarrow{OH}=(4;0;0)$.

Do đó, $\overrightarrow{A_1A}=(0;0;3)$ và $\overrightarrow{A_2A}=(4;0;0)$.

Dạng 2. Tọa độ vectơ

Phương pháp

Xét hai véctơ $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ và $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$ ta có:

(1) Hai véctơ bằng nhau: .... $\vec{a}=\vec{b}\Leftrightarrow\begin{cases}a_1=b_1\\a_2=b_2\\a_3=b_3\end{cases}$.

(2) $ABCD$ là hình bình hành .... $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

Ví dụ 2.1.

Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}=3\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$

(1) Xác định tọa độ vectơ $\vec{a}$.

(2) Tìm $x;y;z$ để $\vec{b}=(x+2y-z-1;x-y+3z+1;3x-y-z-6)$ bằng $\vec{a}$.

Lời giải

(1) Xác định tọa độ vectơ $\vec{a}$.

Ta có $\vec{a}=3\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}=(3;2;-1)$.

(2) Tìm $x;y;z$ để $\vec{b}=(x+2y-z-1;x-y+3z+1;3x-y-z-6)$ bằng $\vec{a}$.

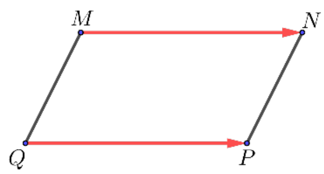
Ta có $\vec{a}=\vec{b}\Leftrightarrow\begin{cases}x+2y-z-1=3\\x-y+3z+1=2\\3x-y-z-6=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=1\\z=0\end{cases}$.

Ví dụ 2.2.

Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $M(1;1;1),N(2;3;4),P(7;7;5)$. Tìm tọa độ điểm Q để tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành .

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{MN}=(1;2;3),\overrightarrow{QP}=(7-x_Q;7-y_Q;5-z_Q)$.



$MNPQ$ là hình bình hành $\Leftrightarrow\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{QP}\Leftrightarrow\begin{cases}1=7-x_Q\\2=7-y_Q\\3=5-z_Q\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_Q=6\\y_Q=5\\z_Q=2\end{cases}$.

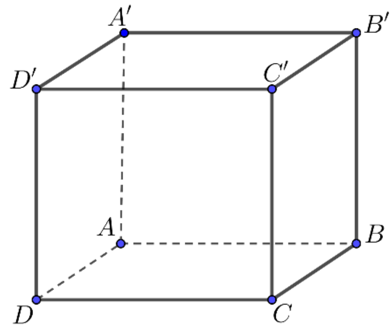
Vậy $Q(6;5;2)$.

Ví dụ 2.3.

Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(1;3;-2),B(3;-2;4)$, $D(5;2;4),D'(4;1;2)$. Tìm tọa độ đỉnh C'.

Lời giải

Ta có $\begin{cases} BC \underset{=}{//} AD \\ \overrightarrow{BC} \text{ cung phuong } \overrightarrow{AD} \end{cases}$



$$\Rightarrow \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C - 3 = 4 \\ y_C + 2 = -1 \\ z_C - 4 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 7 \\ y_C = -3 \\ z_C = 10 \end{cases} \Rightarrow C(7;-3;10).$$

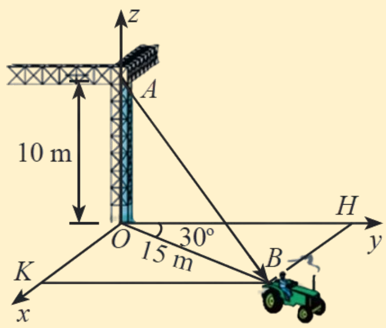
Và $\begin{cases} CC' \underset{=}{//} DD' \\ \overrightarrow{CC'} \text{ cung phuong } \overrightarrow{DD'} \end{cases}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{DD'} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{C'} - 7 = -1 \\ y_{C'} + 3 = -1 \\ z_C - 10 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{C'} = 6 \\ y_{C'} = -4 \\ z_{C'} = 8 \end{cases} \Rightarrow C'(6;-4;8).$$

Dạng 3. Bài toán thực tế

Ví dụ 3.1.

Một chiếc xe đang kéo căng sợi dây cáp AB trong công trường xây dựng, trên đó đã thiết lập hệ toạ độ $Oxyz$ như hình bên dưới với độ dài đơn vị trên các trục toạ độ bằng 1m. Tìm tọa độ của vecto $\overrightarrow{AB}$.



Lời giải

ΔOBH vuông tại H, có $\widehat{HOB} = 30^\circ$

$OB = 15 \Rightarrow OH = OB \cdot \cos 30^\circ = \dfrac{15\sqrt{3}}{2}$

$BH = OB \cdot \sin 30^\circ = \dfrac{15}{2} \Rightarrow OK = \dfrac{15}{2}$

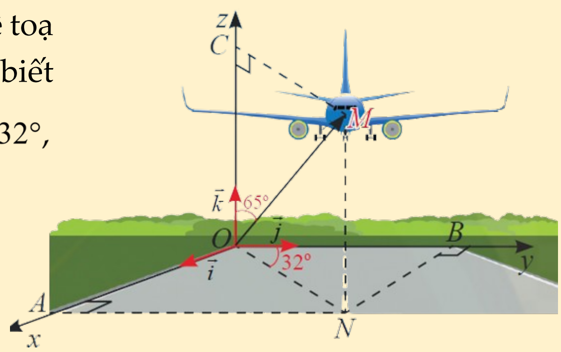
Ta có $\overrightarrow{OA} = 10\vec{k}$, $\overrightarrow{OH} = \dfrac{15\sqrt{3}}{2}\vec{j}$, $\overrightarrow{OK} = \dfrac{15}{2}\vec{i}$

Khi đó $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OK} - \overrightarrow{OA} = \dfrac{15}{2}\vec{i} + \dfrac{15\sqrt{3}}{2}\vec{j} - 10\vec{k}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \left(\dfrac{15}{2}; \dfrac{15\sqrt{3}}{2}; -10\right)$.

Ví dụ 3.2.

Một máy bay đang cất cánh từ phi trường. Với hệ toạ độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên dưới, cho biết M là vị trí của máy bay, $OM = 14$, $\widehat{NOB} = 32^\circ$, $\widehat{MOC} = 65^\circ$. Tìm tọa độ điểm M.



Lời giải

» ΔKCM vuông tại C có $OC = OM.\cos 65^\circ = 14.\cos 65^\circ \approx 5,9$

và $CM = OM.\sin 65^\circ = 14.\sin 65^\circ \approx 12,7$.

$ON = CM,\ AN = OB$.

» ΔOAN vuông tại A có $OA = ON.\cos 58^\circ = 12,7.\cos 58^\circ \approx 6,7$

và $AN = ON.\sin 58^\circ = 12,7.\sin 58^\circ \approx 10,8$.

$\overrightarrow{OM} = OA.\vec{i} + OB.\vec{j} + OC.\vec{k} = 12,7.\vec{i} + 10,8.\vec{j} + 5,9.\vec{k}$.

Vậy $M(12,7;10,8;5,9)$.

Chương 02

Bài 2. TỌA ĐỘ CỦA VECTO TRONG KHÔNG GIAN

C Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm

» Câu 1. Trong không gian $Oxyz$ giả sử $\overrightarrow{OM}=2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$, khi đó tọa độ điểm M là

A. $(-2;3;1)$. **B.** $(2;-3;-1)$. **C.** $(2;3;-1)$. **D.** $(2;3;1)$.

Lời giải

Chọn C

Theo định nghĩa ta có $\vec{i}=(1;0;0)$, $\vec{j}=(0;1;0)$ và $\vec{k}=(0;0;1)$.

Do đó, $\overrightarrow{OM}=2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}\Leftrightarrow M(2;3;-1)$.

» Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho $\overrightarrow{AO}=\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}$. Tọa độ của điểm A là

A. $(-1;2;-3)$. **B.** $(2;-3;-1)$. **C.** $(-3;2;-1)$. **D.** $(2;-1;-3)$.

Lời giải

Chọn A

$\overrightarrow{AO}=\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}\Rightarrow\overrightarrow{OA}=-\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}\Leftrightarrow M(-1;2;-3)$.

» Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào sau đây thuộc trục Oy?

A. $M(0;5;0)$ **B.** $N(4;0;0)$ **C.** $P(0;0;6)$ **D.** $Q(4;5;0)$

Lời giải

Chọn A

Điểm thuộc trục Oy là $P(0;0;6)$.

» Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào sau đây nằm trên mặt phẳng tọa độ (Oyz)?

A. $N(0;4;-1)$ **B.** $P(-2;0;3)$ **C.** $M(3;4;0)$. **D.** $Q(2;0;0)$

Lời giải

Chọn A

Mặt phẳng tọa độ (Oyz) có phương trình là $x=0\Rightarrow N(0;4;-1)\in(Oyz)$.

» Câu 5. Trong không gian $Oxyz$ với $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ lần lượt là các vecto đơn vị trên các trục Ox, Oy, Oz. Tính tọa độ của vecto $\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$.

A. $\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}=(-1;-1;1)$ **B.** $\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}=(1;1;-1)$

C. $\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}=(-1;1;1)$ **D.** $\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}=(1;-1;1)$

Lời giải

Chọn B

Ta có $\vec{i}=(1;0;0),\vec{j}=(0;1;0),\vec{k}=(0;0;1)$.

Do đó $\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}=(1;1;-1)$.

» Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(2;-1;0)$ và $B(1;1;-3)$. Vecto $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ là

A. $(-1;2;-3)$ **B.** $(1;-2;3)$ **C.** $(-1;-2;3)$. **D.** $(1;-2;3)$

Lời giải

Chọn A

$A(2;-1;0)$, $B(1;1;-3)$.

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}=(1-2;1+1;-3-0)=(-1;2;-3)$.

» Câu 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm A thỏa $\overrightarrow{OA}=2\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k}$ và $B(2;1;4)$. Tọa độ của véctơ $\overrightarrow{BA}$ là

A. $(0;-4;0)$. **B.** $(4;-2;8)$. **C.** $(-1;-1;2)$. **D.** $(-2;-2;4)$.

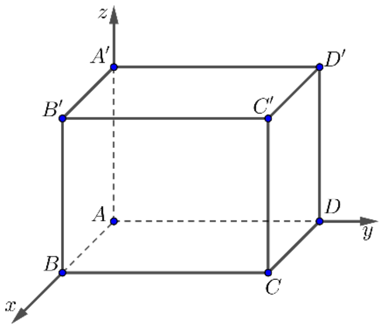
Lời giải

Chọn A

$A(2;-3;4)$

$\overrightarrow{BA}=(0;-4;0)$.

» Câu 8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài cạnh bằng 1 như hình vẽ.



Tọa độ của véctơ $\overrightarrow{AC}$ là

A. $(1;1;0)$. **B.** $(0;1;1)$. **C.** $(1;0;1)$. **D.** $(1;1;1)$.

Lời giải

Chọn A

$A(0;0;0)$; $C(1;1;0)$.

$\overrightarrow{AC}=(1;1;0)$.

» Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, tọa độ hình chiếu của $M(2;1;4)$ lên trục Ox là

A. $(2;0;0)$. **B.** $(0;1;0)$. **C.** $(0;0;4)$. **D.** $(0;1;4)$.

Lời giải

Chọn A

Tọa độ hình chiếu của $M(2;1;4)$ lên trục Ox là $(2;0;0)$.

» Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, tọa độ hình chiếu của $M(-2;1;4)$ lên Oyz là

A. $(-2;0;0)$. **B.** $(0;1;0)$. **C.** $(0;0;4)$. **D.** $(0;1;4)$.

Lời giải

Chọn D

Tọa độ hình chiếu của $M\left(-2;1;4\right)$ lên Oyz là $\left(0;1;4\right)$.

» Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A\left(1;2;-1\right)$, $B\left(2;-1;3\right)$, $C\left(-3;5;1\right)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

A. $D\left(-2;8;-3\right)$. **B.** $D\left(-2;2;5\right)$. **C.** $D\left(-4;8;-5\right)$. **D.** $D\left(-4;8;-3\right)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow\left(x_D-1;y_D-2;z_D+1\right)=\left(-5;6;-2\right)\Leftrightarrow\begin{cases}x_D-1=-5\\y_D-2=6\\z_D+1=-2\end{cases}\Rightarrow D\left(-4;8;-3\right)$.

» Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A\left(1;0;1\right)$, $B\left(2;1;2\right)$, $D\left(1;-1;1\right)$, $C'\left(4;5;-5\right)$. Tính tọa độ đỉnh A' của hình hộp.

A. $A'\left(3;4;-6\right)$. **B.** $A'\left(4;6;-5\right)$. **C.** $A'\left(2;0;2\right)$. **D.** $A'\left(3;5;-6\right)$.

Lời giải

Chọn D

Theo quy tắc hình hộp ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$.

Suy ra $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$.

Lại có: $\overrightarrow{AC'}=\left(3;5;-6\right)$, $\overrightarrow{AB}=\left(1;1;1\right)$, $\overrightarrow{AD}=\left(0;-1;0\right)$.

Do đó: $\overrightarrow{AA'}=\left(2;5;-7\right)$.

Suy ra $A'\left(3;5;-6\right)$.

» Câu 13. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MO}=3\vec{k}-2\vec{i}+4\vec{j}$. Tọa độ điểm M bằng

A. $\left(3;-2;4\right)$. **B.** $\left(-2;4;3\right)$. **C.** $\left(2;-4;-3\right)$. **D.** $\left(3;2;4\right)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\overrightarrow{MO}=3\vec{k}-2\vec{i}+4\vec{j}\Rightarrow\overrightarrow{MO}=-2\vec{i}+4\vec{j}+3\vec{k}\Rightarrow\overrightarrow{OM}=2\vec{i}-4\vec{j}-3\vec{k}\Rightarrow M\left(2;-4;-3\right)$.

» Câu 14. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{OM}=\left(2x-4\right)\vec{i}-4\vec{j}+\left(y-1\right)\vec{k}$. Khi điểm $M\in Oy$ thì giá trị $x+2y$ bằng?

A. 2. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\overrightarrow{OM}=\left(2x-4\right)\vec{i}-4\vec{j}+\left(y-1\right)\vec{k}\Rightarrow M\left(2x-4;-4;y-1\right)$.

$M\in Oy\Rightarrow\begin{cases}2x-4=0\\y-1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$.

Vậy $x+2y=4$.

» Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm A thỏa $\overrightarrow{AO}=4\vec{k}-2\vec{j}$ và $B\left(1;2;-1\right)$. Tọa độ của véctơ $\overrightarrow{AB}$ là

A. $\left(1;0;3\right)$. **B.** $\left(0;2;4\right)$. **C.** $\left(0;-2;-4\right)$. **D.** $\left(-1;0;-3\right)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\overrightarrow{OA}=2\vec{j}-4\vec{k}\Rightarrow A(0;2;-4)$

$\overrightarrow{AB}=(1;0;3)$.

» Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}=(2;-2;1)$ và $\vec{b}=(x-1)\vec{i}+(x^2-3)\vec{j}+y\vec{j}$. Khi $\vec{a}=\vec{b}$ thì giá trị $x-y$ bằng?

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** -1.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\vec{b}=(x-1)\vec{i}+(x^2-3)\vec{j}+y\vec{j}\Rightarrow\vec{b}=(x-1;x^2-3;y)$.

$$\vec{a}=\vec{b}\Leftrightarrow\begin{cases}x+1=2\\x^2-3=-2\\y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\x=1;x=-1\\y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}.$$

Vậy $x-y=0$.

» Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{b}=4\vec{j}-\vec{i}$. Tọa độ $\vec{b}$ bằng?

A. $(-1;4;0)$. **B.** $(1;4;0)$. **C.** $(0;-1;4)$. **D.** $(4;-1;0)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\vec{b}=4\vec{j}-\vec{i}\Rightarrow\vec{b}=-\vec{i}+4\vec{j}\Rightarrow\vec{b}=(-1;4;0)$.

» Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$; $M(x-1;2y-2;7)$. Gọi M' là hình chiếu của M trên mặt phẳng (Oxy). Khi tứ giác $OBM'A$ là hình bình hành thì giá trị $x+y$ bằng?

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** -1.

Lời giải

Chọn A

M' là hình chiếu của M trên mặt phẳng $(Oxy)\Rightarrow M'(x-1;2y-2;0)$.

$$OBM'A \text{ là hình bình hành }\Leftrightarrow\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AM'}\Leftrightarrow\begin{cases}0=x-2\\2=2y-2\\0=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=2\end{cases}.$$

Vậy $x+y=4$.

» Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $A(1;2;3)$ trên mặt phẳng (Oxz) là

A. $P(0;2;3)$. **B.** $M(1;0;3)$. **C.** $N(0;2;0)$. **D.** $Q(1;2;0)$.

Lời giải

Chọn B

» Câu 20. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1;2;3)$. Điểm đối xứng với A qua trục Oz có tọa độ là

A. $(1;2;-3)$. **B.** $(-1;-2;3)$. **C.** $(0;0;3)$. **D.** $(-1;2;3)$.

Lời giải

Chọn B

Tọa độ hình chiếu của điểm $A(1;2;3)$ trên Oz là $H(0;0;3)$.

Gọi điểm A' đối xứng A qua trục Oz thì H là trung điểm của đoạn AA', suy ra $A'(-1;-2;3)$.

» Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1;0;3)$; $B(2;3;-4)$; $C(-3;1;2)$. Điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành có tọa độ là

A. $D(-4;-2;9)$. **B.** $D(4;2;9)$. **C.** $D(6;2;-3)$. **D.** $D(-2;4;5)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;3;-7)$ và $\overrightarrow{AC}=(-4;1;-1)$ là 2 vectơ không cùng phương.

Suy ra ba điểm A,B,C không thẳng hàng.

Gọi $D(x;y;z)$. Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;3;-7)$; $\overrightarrow{DC}=(-3-x;1-y;2-z)$.

Để tứ giác $ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases}-3-x=1\\1-y=3\\2-z=-7\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-4\\y=-2\\z=9\end{cases}$.

Dùng dữ liệu sau để trả lời các câu hỏi 22, 23, 24.

Cần trục chân đế là kiểu cột quay được sử dụng để phục vụ công việc xếp dỡ hàng hóa chủ yếu ngoài các cảng bến, bãi (hình ảnh minh họa). Ta chọn hệ trục $Oxyz$ thỏa trục Ox trùng với trục chân đế, trục Oy vuông góc với trục Ox và trục Oz trùng với trục cần cẩu (theo đơn vị mét, như hình vẽ). Gọi M là vị trí tại đỉnh cần cẩu, H là hình chiếu của M lên (Oxy). Biết tay cần KM của cần trục dài $50m$, trục cần OK dài $50m$, $(\vec{k};\overrightarrow{KM})=60°;(\vec{i};\overrightarrow{OH})=45°$.

» Câu 22. Điểm M có cao độ z_M là bao nhiêu

A. $\dfrac{100\sqrt{3}}{2}$. **B.** $93,3$. **C.** 75. **D.** 60.

Lời giải

Chọn C

Ta gọi E là hình chiếu của M lên Oz.

Ta có: $EK = MK.\cos 60° = 50.\dfrac{1}{2} = 25m \Rightarrow z_M = OE = OK + KE = 50 + 25 = 75m$.

» Câu 23. Điểm H có tọa độ là bao nhiêu

A. $\left(25\sqrt{2};25\sqrt{2},0\right)$.

B. $\left(25;25,0\right)$.

C. $\left(\dfrac{25\sqrt{6}}{2};\dfrac{25\sqrt{6}}{2},0\right)$.

D. $\left(\dfrac{5\sqrt{2}}{2};\dfrac{5\sqrt{2}}{2},0\right)$.

Lời giải

Chọn C

Ta gọi E là hình chiếu của M lên Oz.

Ta có: $ME = MK.\sin 60° = 50.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 25\sqrt{3}$. Suy ra $OH = ME = 25\sqrt{3}m$.

Gọi P,Q lần lượt là hình chiếu của M lên Ox,Oy.

Vì $\left(\vec{i};\overrightarrow{OH}\right) = 45° \Rightarrow OP = OQ = OH.\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{25\sqrt{6}}{2}$.

Vậy điểm H có tọa độ $\left(\dfrac{25\sqrt{6}}{2};\dfrac{25\sqrt{6}}{2},0\right)$.

» Câu 24. Vectơ $\overrightarrow{KM}$ có tọa độ là bao nhiêu

A. $\left(25\sqrt{2};25\sqrt{2},25\right)$.

B. $\left(25;25,25\right)$.

C. $\left(\dfrac{25\sqrt{2}}{2};\dfrac{25\sqrt{2}}{2},25\right)$.

D. $\left(\dfrac{25\sqrt{6}}{2};\dfrac{25\sqrt{6}}{2},25\right)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\begin{cases} H\left(\dfrac{25\sqrt{6}}{2};\dfrac{25\sqrt{6}}{2},0\right) \\ OE = 75 \end{cases} \Rightarrow M\left(\dfrac{25\sqrt{6}}{2};\dfrac{25\sqrt{6}}{2},75\right)$.

Mà điểm $K \in Oz$ có tọa độ $K\left(0;0;50\right)$.

Vậy $\overrightarrow{KM}=\left(\dfrac{25\sqrt{6}}{2};\dfrac{25\sqrt{6}}{2},25\right)$.

B. Câu hỏi – Trả lời đúng/sai

» Câu 25. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2;4;6)$ và $\overrightarrow{ON}=2\vec{i}+\vec{k}$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Tọa độ điểm $N(2;1;0)$		
(b)	Hình chiếu vuông góc của M trên trục Oz là điểm $M'(0;0;6)$		
(c)	Hình chiếu vuông góc của M trên mặt (Oxy) là điểm $N(2;4;0)$		
(d)	Đối xứng với điểm M qua mặt (Oyz) là điểm $K(-2;0;0)$		

Lời giải

(a) *Tọa độ điểm $N(2;1;0)$.*

$\overrightarrow{ON}=2\vec{i}+\vec{k}$, suy ra tọa độ điểm $N(2;0;1)$.

» Chọn SAI.

(b) *Hình chiếu vuông góc của M trên trục Oz là điểm $M'(0;0;6)$.*

Hình chiếu vuông góc của $M(2;4;6)$ trên trục Oz là điểm $M'(0;0;6)$.

» Chọn ĐÚNG.

(c) *Hình chiếu vuông góc của M trên mặt (Oxy) là điểm $N(2;4;0)$.*

Hình chiếu vuông góc của $M(2;4;6)$ trên mặt phẳng (Oxy) là điểm $N(2;4;0)$.

» Chọn ĐÚNG.

(d) *Đối xứng với điểm M qua mặt (Oyz) là điểm $K(-2;0;0)$.*

Đối xứng với điểm $M(2;4;6)$ qua mặt phẳng (Oyz) là điểm $K(-2;4;6)$.

» Chọn SAI.

» Câu 26. Trong không gian $Oxyz$, cho hình bình hành $OABC$ với $A(1;2;3)$, $B(5;0;-1)$, và $C(a;b;c)$

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Tọa độ điểm $O(0;0;1)$.		
(b)	Tọa độ vectơ $\overrightarrow{OA}=(1;2;3)$		
(c)	$\overrightarrow{OB}=5.\vec{i}-\vec{k}$		
(d)	Nếu $OABC$ hình bình hành, thì $a+b+c=2$		

Lời giải

(a) *Tọa độ điểm $O(0;0;1)$.*

Trong không gian $Oxyz$, gốc tọa độ $O(0;0;0)$.

» Chọn SAI.

(b) *Tọa độ vectơ $\overrightarrow{OA}=(1;2;3)$.*

Điểm $A(1;2;3)$, suy ra $\overrightarrow{OA}=1.\vec{i}+2.\vec{j}+3.\vec{k}=(1;2;3)$.

» Chọn ĐÚNG.

(c) $\overrightarrow{OB}=5.\vec{i}-\vec{k}$.

Ta có $B(5;0;-1)$. Suy ra vecto $\overrightarrow{OB}=5.\vec{i}-1.\vec{k}$.

» Chọn ĐÚNG.

(d) Nếu $OABC$ hình bình hành, thì $a+b+c=2$.

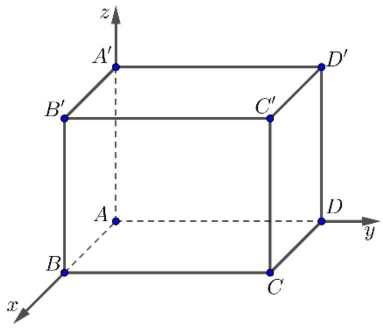
Ta có $\overrightarrow{OA}=1.\vec{i}+2.\vec{j}+3.\vec{k}=(1;2;3)$, $C(a;b;c)\Rightarrow\overrightarrow{OC}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$

$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=\left(5.\vec{i}-1.\vec{k}\right)-\left(a.\vec{i}+b.\vec{j}+c.\vec{k}\right)=(5-a;b;-1-c)$.

$OABC$ hình bình hành, thì $\begin{cases}5-a=1\\b=2\\-1-c=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=4\\b=2\\c=-4\end{cases}$. Khi đó $a+b+c=2$.

» Chọn ĐÚNG.

» Câu 27. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0;0;0)$, $B(3;0;0)$, $D(0;3;0)$, $D'(0;3;3)$.



Hãy xác định tính đúng sai của các mệnh đề

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\overrightarrow{AB}=3\vec{i}+\vec{j}$		
(b)	$A'(0;0;3)$		
(c)	M là trung điểm DD'. Khi đó, tọa độ điểm $M(0;3;-3)$		
(d)	Tọa độ điểm $C'(3;\ 3;\ 0)$		

Lời giải

(a) $\overrightarrow{AB}=3\vec{i}+\vec{j}$.

$B(3;\ 0;\ 0)\Rightarrow\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AB}=3\vec{i}$.

» Chọn SAI.

(b) $A'(0;0;3)$.

Điểm $D'(0;\ 3;\ 3)$ có hình chiếu lên trục Oz là $A'(0;0;3)$.

» Chọn ĐÚNG.

(c) M là trung điểm DD'. Khi đó, tọa độ điểm $M(0;3;-3)$.

Ta có $A(0;\ 0;\ 0)\equiv O$.

$D(0;\ 3;\ 0)\Rightarrow\overrightarrow{AD}=3\vec{j}$;

$D'(0;\,3;\,3) \Rightarrow \overrightarrow{AD'} = 3\vec{j} + 3\vec{k}$.

Mà M là trung điểm $DD' \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD'}\right) = \frac{1}{2}\left(3\vec{j} + 3\vec{j} + 3\vec{k}\right) = 3\vec{j} + \frac{3}{2}\vec{k} = \left(0;3;\frac{3}{2}\right)$.

Suy ra $M\left(0;3;\frac{3}{2}\right)$.

» Chọn SAI.

(d) *Tọa độ điểm* $C'(3;\,3;\,0)$.

Ta có $A(0;\,0;\,0) \equiv O$.

Khi đó $B(3;\,0;\,0) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} = 3\vec{i}$; $D(0;\,3;\,0) \Rightarrow \overrightarrow{AD} = 3\vec{j}$; $A'(0;0;3) \Rightarrow \overrightarrow{AA'} = 3\vec{k}$.

Nên $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = 3\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k}$. Vậy $C'(3;\,3;\,3)$.

» Chọn SAI.

» Câu 28. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{OM} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Tọa độ của điểm M là: $(2;1;1)$		
(b)	Hình chiếu của điểm M lên trục Ox là: $(2;1;0)$		
(c)	Hình chiếu của điểm M lên trục Oy là: $(0;1;0)$		
(d)	Hình chiếu của điểm M lên mặt phẳng Oxy là: $(2;0;1)$		

Lời giải

(a) *Tọa độ của điểm M là:* $(2;1;1)$

Ta có: $\overrightarrow{OM} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$. Suy ra: $M(2;1;1)$

» Chọn ĐÚNG.

(b) *Hình chiếu của điểm M lên trục Ox là:* $(2;1;0)$

Hình chiếu của điểm M lên trục Ox là: $(2;0;0)$

» Chọn SAI.

(c) *Hình chiếu của điểm M lên trục Oy là:* $(0;1;0)$

Hình chiếu của điểm M lên trục Oy là: $(0;1;0)$

» Chọn ĐÚNG.

(d) *Hình chiếu của điểm M lên mặt phẳng Oxy là:* $(2;0;1)$.

Hình chiếu của điểm M lên mặt phẳng Oxy là: $(2;1;0)$.

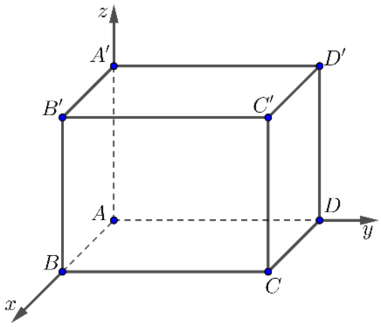
» Chọn SAI.

» Câu 29. Trong không gian $Oxyz$, cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 4, đỉnh A trùng với gốc O, các điểm B, D, A' lần lượt nằm trên các tia Ox, Oy, Oz.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Tọa độ của điểm D là: $(4;0;0)$		
(b)	Tọa độ của vec tơ C là: $(0;4;0)$		

(c)	Tọa độ của vec tơ A' là: $(0;0;4)$		
(d)	Tọa độ của vec tơ C' là: $(4;4;4)$		

Lời giải



(a) Tọa độ của điểm D là: $(4;0;0)$

Do $\overrightarrow{OD}$ cùng hướng với $\vec{j}$ và $\left|\overrightarrow{OD}\right| = OD = 4 = 4\left|\vec{j}\right|$ nên $\overrightarrow{OD} = 4\vec{j}$ hay $\overrightarrow{OD} = 0\vec{i} + 4\vec{j} + 0\vec{k}$.

Suy ra: $D(0;4;0)$.

» Chọn SAI.

(b) Tọa độ của vec tơ C là: $(0;4;0)$

Do $\overrightarrow{OB}$ cùng hướng với $\vec{i}$ và $\left|\overrightarrow{OB}\right| = OB = 4 = 4\left|\vec{i}\right|$ nên $\overrightarrow{AB} = 4\vec{i}$ hay $\overrightarrow{OB} = 4\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$.

Theo quy tắc hình bình hành, ta có: $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = 4\vec{i} + 4\vec{j} + 0\vec{k}$.

Suy ra: $C(4;4;0)$.

» Chọn SAI.

(c) Tọa độ của vec tơ A' là: $(0;0;4)$

Do $\overrightarrow{OA'}$ cùng hướng với $\vec{k}$ và $\left|\overrightarrow{OA'}\right| = OA' = 4 = 4\left|\vec{k}\right|$ nên $\overrightarrow{OA'} = 4\vec{k}$ hay $\overrightarrow{OA'} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 4\vec{k}$.

Suy ra: $A'(0;0;4)$.

» Chọn ĐÚNG.

(d) Tọa độ của vec tơ C' là: $(4;4;4)$.

Theo quy tắc hình hộp, ta có: $\overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA'} = 4\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}$.

Suy ra: $C'(4;4;4)$

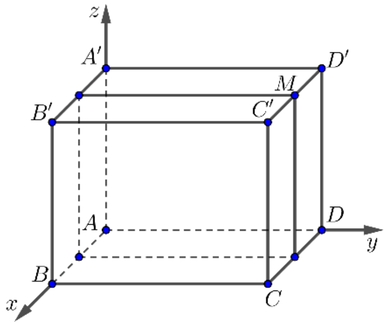
» Chọn ĐÚNG.

» Câu 30. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đỉnh A trùng với gốc O, các vec tơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'}$ theo thứ tự cùng hướng với $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ và có $AB = 3$, $AC = 5; AA' = 6$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Tọa độ của vec tơ $\overrightarrow{AB}$ là: $(3;0;0)$		
(b)	Tọa độ của vec tơ $\overrightarrow{AC}$ là: $(3;4;6)$		
(c)	Tọa độ của vec tơ $\overrightarrow{AC'}$ là: $(3;-4;6)$		

(d)	Tọa độ của vec tơ $\overrightarrow{AM}$ là: $\left(\frac{3}{2};4;6\right)$, với M là trung điểm của $C'D'$.		

Lời giải



(a) Tọa độ của vec tơ $\overrightarrow{AB}$ là: $(3;0;0)$

Do $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng với $\vec{i}$ và $\left|\overrightarrow{AB}\right| = AB = 3 = 3\left|\vec{i}\right|$ nên $\overrightarrow{AB} = 3\vec{i}$ hay $\overrightarrow{AB} = 3\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$.

Suy ra: $\overrightarrow{AB} = (3;0;0)$

» Chọn ĐÚNG.

(b) Tọa độ của vec tơ $\overrightarrow{AC}$ là: $(3;4;6)$

Ta có: $AD = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$

Do $\overrightarrow{AD}$ cùng hướng với $\vec{j}$ và $\left|\overrightarrow{AD}\right| = AD = 4 = 4\left|\vec{j}\right|$ nên $\overrightarrow{AD} = 4\vec{j}$ hay $\overrightarrow{AD} = 0\vec{i} + 4\vec{j} + 0\vec{k}$.

Trong hình bình hành $ABCD$, ta có: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 0\vec{k}$.

Suy ra: $\overrightarrow{AC} = (3;4;0)$

» Chọn SAI.

(c) Tọa độ của vec tơ $\overrightarrow{AC'}$ là: $(3;-4;6)$

Do $\overrightarrow{AA'}$ cùng hướng với $\vec{k}$ và $\left|\overrightarrow{AA'}\right| = AA' = 6 = 6\left|\vec{k}\right|$ nên $\overrightarrow{AA'} = 6\vec{k}$ hay $\overrightarrow{AA'} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 6\vec{k}$

Trong hình bình hành $AA'C'C$, ta có: $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA'} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 6\vec{k}$

Suy ra: $\overrightarrow{AC'} = (3;4;6)$.

» Chọn SAI.

(d) Tọa độ của vec tơ $\overrightarrow{AM}$ là: $\left(\frac{3}{2};4;6\right)$, với M là trung điểm của $C'D'$.

Vì $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{AD'}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}\right) = \frac{1}{2}\left(3\vec{i} + 4\vec{j} + 6\vec{k} + 4\vec{j} + 6\vec{k}\right) = \frac{3}{2}\vec{i} + 4\vec{j} + 6\vec{k}$.

Suy ra: $\overrightarrow{AC} = \left(\frac{3}{2};4;6\right)$.

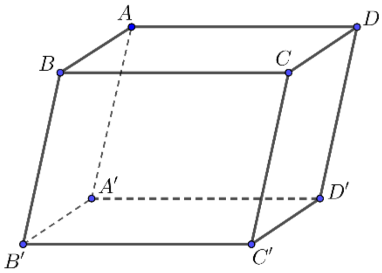
» Chọn ĐÚNG.

» Câu 31. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(1;\,0;\,1)$, $B(2;\,1;\,2)$, $D(1;\,-1;\,1)$, $D'(3;4;-6)$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Tọa độ $\overrightarrow{AB} = (1;\,1;\,1)$		

(b)	Tọa độ $C(2;\,1;\,2)$		
(c)	Tọa độ $A'(3;5;-6)$		
(d)	Toạ độ trọng tâm tam giác $A'B'C$ là $G(3;\,4;\,-3)$		

Lời giải



(a) *Tọa độ* $\overrightarrow{AB}=(1;\,1;\,1)$.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;\,1;\,1)$.

» Chọn ĐÚNG.

(b) *Tọa độ* $C(2;\,1;\,2)$.

Gọi $C(x;y;\,z)\Rightarrow\overrightarrow{DC}=(x-1;\,y+1;\,z-1)$.

Vì $ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\begin{cases}x-1=1\\y+1=1\\z-1=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=0\\z=2\end{cases}\Rightarrow C(2;0;2)$.

» Chọn SAI.

(c) *Tọa độ* $A'(3;5;-6)$.

Ta có $\overrightarrow{AD}=(0;\,-1;\,0)$. Gọi $A'(x';\,y';\,z')\Rightarrow\overrightarrow{A'D'}=(3-x';\,4-y';\,-6-z')$.

$ADD'A'$ là hình bình hành $\Leftrightarrow\overrightarrow{A'D'}=\overrightarrow{AD}\Leftrightarrow\begin{cases}3-x'=0\\4-y'=-1\\-6-z'=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x'=3\\y'=5\\z'=-6\end{cases}\Rightarrow A'(3;5;-6)$.

» Chọn ĐÚNG.

(d) *Toạ độ trọng tâm tam giác* $A'B'C$ *là* $G(3;\,4;\,-3)$.

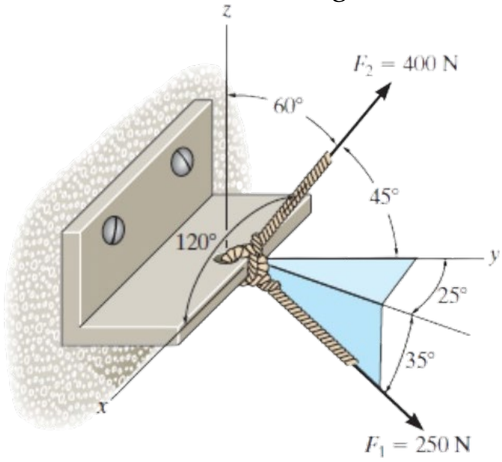
Gọi $B'(x_0;\,y_0;\,z_0)\Rightarrow\overrightarrow{A'B'}=(x_0-3;\,y_0-5;\,z_0+6)$.

$ABB'A'$ là hình bình hành $\Leftrightarrow\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\begin{cases}x_0-3=1\\y_0-5=1\\z_0+6=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_0=4\\y_0=6\\z_0=-5\end{cases}\Rightarrow B'(4;\,6;-5)$.

G là trọng tâm tam giác $A'B'C$ $\Rightarrow\begin{cases}x_G=\dfrac{2+3+4}{3}=3\\y_G=\dfrac{0+5+6}{3}=\dfrac{11}{3}\Rightarrow G\left(3;\,\dfrac{11}{3};\,-3\right)\\z_G=\dfrac{2-6-5}{3}=-3\end{cases}$.

» Chọn SAI.

» Câu 32. Dưới đây là một giá đỡ chịu hai lực. Biểu diễn từng lực dưới dạng vecto Descartes



	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\overrightarrow{F_2} = -200\vec{i} + 281\vec{j} + 200\vec{k}$		
(b)	$\overrightarrow{F_1} = 86,547\vec{i} + 185,601\vec{j} - 143,394\vec{k}$		
(c)	Độ lớn lực tổng hợp lên giá đỡ bằng $485,297N$		
(d)	Góc tạo bởi lực tổng hợp lên trục Oy là $16,145°$		

Lời giải

(a) $\overrightarrow{F_2} = -200\vec{i} + 281\vec{j} + 200\vec{k}$

Độ lớn lực F_2 tác dụng lên từng trục tọa độ Descartes như sau:

$F_X = -400\cos 60° = -200\ N$

$F_Y = 400\cos 45° = 282,84\ N$

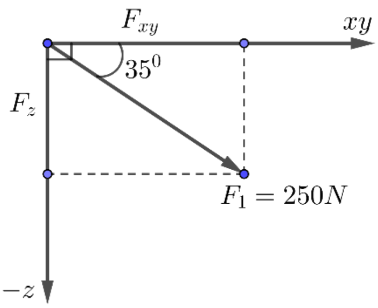
$F_Z = 400\cos 60° = 200\ N$

$\Rightarrow \overrightarrow{F_2} = -200\vec{i} + 282,84\vec{j} + 200\vec{k}$

» Chọn SAI.

(b) $\overrightarrow{F_1} = 86,547\vec{i} + 185,601\vec{j} - 143,394\vec{k}$

Cắt mặt phẳng tọa độ lực F_1 tác dụng lên trục tọa độ là xy là chiều ngang và $-z$ là chiều dọc như hình vẽ

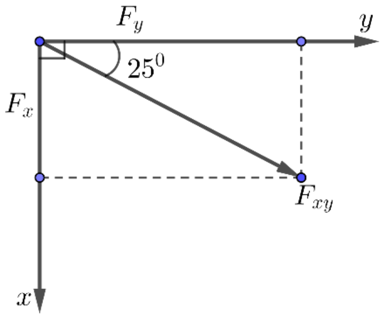


Độ lớn lực F_1 tác dụng lên trục tọa độ xy và $-z$ bằng

$F_{XY} = 250\cos 35° = 204,788N$

$F_Z = -250\sin 35° = -143,394N$

Cắt mặt phẳng tọa độ lực F_{xy} tác dụng lên trục tọa độ là y là chiều ngang và x là chiều dọc như hình vẽ



$F_X = 204,788.\sin 25° = 86,547N$

$F_Y = 204,788.\cos 25° = 185,601N$

Vậy $\vec{F_1} = 86,547\vec{i} + 185,601\vec{j} - 143,394\vec{k}$

» Chọn ĐÚNG.

(c) *Độ lớn lực tổng hợp lên giá đỡ bằng* $485,297N$

Lực tổng hợp tác dụng lên giá đỡ là :

$\vec{F_R} = \vec{F_1} + \vec{F_2} = -113,453\vec{i} + 468,441\vec{j} + 56,606\vec{k}$

$F_R = \sqrt{113,453^2 + 468,441^2 + 56,606^2} \approx 485,297N$

» Chọn ĐÚNG.

(d) *Góc tạo bởi lực tổng hợp lên trục* Oy *là* $16,145°$

Gọi α là góc tạo bởi lực tổng hợp lên trục Oy

$\cos\alpha = \dfrac{468,441}{485,297} \Rightarrow \alpha \approx 15,145°$.

» Chọn SAI.

C. Câu hỏi – Trả lời ngắn

» Câu 33. Trong không gian $Oxyz$, cho $\overrightarrow{OA} = 3\vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$. Tọa độ điểm $A(x;y;z)$. Giá trị biểu thức $S = 100x + 1000y + 10z$ bằng bao nhiêu?

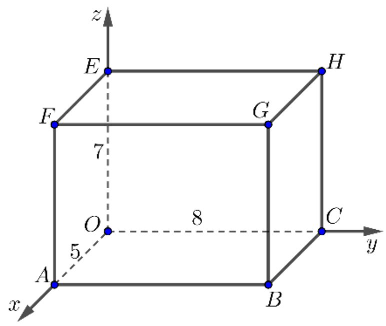
Lời giải

✓ *Trả lời: 4250*

Do $\overrightarrow{OA} = 3\vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$ nên $A(3;4;-5)$.

Vậy $S = 100x + 1000y + 10z = 100.3 + 1000.4 + 10.(-5) = 4250$.

» Câu 34. Trong không gian $Oxyz$ cho hình hộp chữ nhật $OABC.EFGH$ có các cạnh $OA = 5$, $OC = 8$, $OE = 7$ (xem hình vẽ dưới đây). Tọa độ $H(x;y;z)$. Tính giá trị biểu thức $P = 50x + 75y + 1000z$



Lời giải

✓ *Trả lời: 7600*

Ta có $H \in (yOz)$ và hình chiếu của H lên Oy trùng với C nên $H(0;8;7)$.

$P = 50x + 75y + 1000z = 50.0 + 75.8 + 1000.7 = 7600$.

» Câu 35. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(4;2;1)$, $B(-2;-1;4)$. Gọi M là điểm thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MB}$. Tìm độ dài vecto $\overrightarrow{OM}$.

Lời giải

✓ *Trả lời: 3*

Gọi $M(a;b;c)$.

$\overrightarrow{AM} = (a-4;b-2;c-1)$

$\overrightarrow{MB} = (-2-a;-1-b;4-c)$

Ta có: $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \begin{cases} a-4 = 2(-2-a) \\ b-2 = 2(-1-b) \\ c-1 = 2(4-c) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 3 \end{cases}$.

Vậy $\overrightarrow{OM} = (0;0;3) \to \left|\overrightarrow{OM}\right| = \sqrt{3^2} = 3$.

» Câu 36. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(3;2;-1)$, $B(-1;0;5)$. Điểm $M(a;b;c)$ thay đổi thuộc mặt phẳng (Oxy). Tính giá trị của biểu thức $T = a+b+c$ khi $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right|$ nhỏ nhất.

Lời giải

✓ *Trả lời: 2*

Gọi K là điểm thỏa: $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} = \vec{0} \Leftrightarrow K(1;1;2)$.

Ta có: $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right| = \left|\left(\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KA}\right) + \left(\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KB}\right)\right| = \left|2\overrightarrow{MK} + \left(\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB}\right)\right| = \left|2\overrightarrow{MK}\right| = 2MK$.

Do đó $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right|$ nhỏ nhất khi và chỉ khi MK nhỏ nhất.

Điều này xảy ra khi và chỉ khi M là hình chiếu của K lên mặt phẳng (Oxy).

Suy ra $M(1;1;0)$. Vậy $T = a+b+c = 1+1+0 = 2$.

» Câu 37. Trong không gian $Oxyz$ cho $A(1;0;2)$, $B(-1;2;2)$, $C(3;1;1)$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm thuộc mặt phẳng (Oxz) sao cho biểu thức $S = 2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó $T = 6a - 5b + 3c$ có giá trị là

Lời giải

✓ *Trả lời: 12*

Do $M(a;b;c)$ thuộc mặt phẳng (Oxz) nên $b = 0 \Rightarrow M(a;0;c)$.

Ta có $\overrightarrow{MA} = (1-a;0;2-c)$, $\overrightarrow{MB} = (-1-a;2;2-c)$, $\overrightarrow{MC} = (3-a;1;1-c)$.

$S = 2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}$

$= 2\left(a^2 - 1 + 4 - 4c + c^2\right) + \left(a^2 - 2a - 3 + 2 + c^2 - 3c + 2\right) + 3\left(a^2 - 4a + 3 + c^2 - 3c + 2\right)$

$= 6a^2 + 6c^2 - 14a - 20c + 22 = 6\left(a - \frac{7}{6}\right)^2 + 6\left(b - \frac{5}{3}\right)^2 - \frac{17}{6} \geq -\frac{17}{6}$.

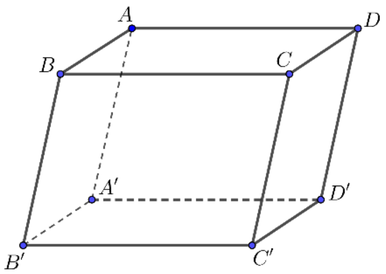
Suy ra S đạt giá trị nhỏ nhất $-\dfrac{17}{6}$ khi và chỉ khi $\begin{cases} a = \dfrac{7}{6} \\ c = \dfrac{5}{3} \end{cases}$.

Vậy $T = 6a - 5b + 3c = 6.\dfrac{7}{6} - 5.0 + 3.\dfrac{5}{3} = 12$.

» Câu 38. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0;0;0)$, $B(3;0;0)$, $D(0;3;0)$, $D'(0;3;-3)$. Gọi G là trọng tâm tam giác $A'B'C$ và tọa độ vecto $\overrightarrow{AG} = (a;b;c)$. Tính $S = a + b + c$.

Lời giải

✓ ***Trả lời: 1***



Ta có $\overrightarrow{AB} = (3;\ 0;\ 0)$. Gọi $C(x; y;\ z) \Rightarrow \overrightarrow{DC} = (x;\ y-3;\ z)$

$ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \\ z = 0 \end{cases}$. Suy ra $C(3;3;0)$.

Ta lại có $\overrightarrow{AD} = (0;\ 3;\ 0)$. Gọi $A'(x';\ y';\ z') \Rightarrow \overrightarrow{A'D'} = (-x';\ 3-y';\ -3-z')$

$ADD'A'$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{A'D'} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 0 \\ y' = 0 \\ z' = -3 \end{cases}$. Suy ra $A'(0;0;-3)$.

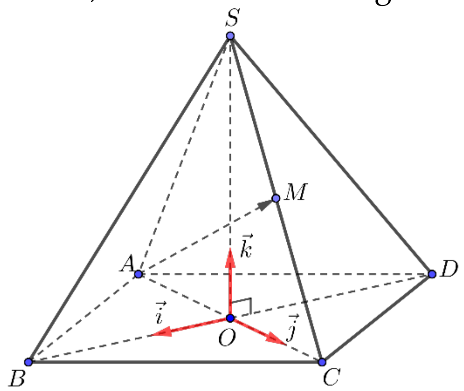
Gọi $B'(x_0;\ y_0;\ z_0) \Rightarrow \overrightarrow{A'B'} = (x_0;\ y_0;\ z_0 + 3)$

$ABB'A'$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 3 \\ y_0 = 0 \\ z_0 = -3 \end{cases}$. Suy ra $B'(3;0;-3)$.

$G(x_G;y_G;z_G)$ là trọng tâm tam giác $A'B'C$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \dfrac{0+3+3}{3} = 2 \\ y_G = \dfrac{0+0+3}{3} = 1 \\ z_G = \dfrac{-3-3+0}{3} = -2 \end{cases}$. Suy ra $G(2;1;-2)$.

Vậy $\overrightarrow{AG} = (2;1;-2) \Rightarrow S = a + b + c = 2 + 1 - 2 = 1$.

» Câu 39. Trong không gian $Oxyz$, cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh bằng 5, giao điểm hai đường chéo AC và BD trùng với gốc O. Các vecto $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OS}$ lần lượt cùng hướng với $\vec{i}$, $\vec{j},\vec{k}$ và $OA = OS = 4$ như hình bên dưới. Toạ độ vectơ $\overrightarrow{AM} = (a;b;c)$ với M là trung điểm của cạnh SC, khi đó $a+b+c$ bằng bao nhiêu?



Lời giải

✓ *Trả lời: 8*

Vì $ABCD$ là hình thoi cạnh bằng 5, O là giao điểm của AC và BD nên O là trung điểm của AC và BD.

Xét ΔOAB vuông tại O, có $OB = \sqrt{AB^2 - OA^2} = \sqrt{25-16} = 3$.

Vì $\overrightarrow{OB}$ và $\vec{i}$ cùng hướng và $OB = 3$ nên $\overrightarrow{OB} = 3\vec{i}$.

Vì $\overrightarrow{OA}$ và $\vec{j}$ cùng hướng và $OA = 4$ nên $\overrightarrow{OA} = -4\vec{j}$.

Ta có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$

Có $AC = 2OA = 8$ mà $\overrightarrow{AC}$ và $\vec{j}$ cùng hướng nên $\overrightarrow{AC} = 8\vec{j}$.

Có $\overrightarrow{OS}$ và $\vec{k}$ cùng hướng và $OS = 4$ nên $\overrightarrow{OS} = 4\vec{k}$.

Có $\overrightarrow{SB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OS} = 3\vec{i} - 4\vec{k}$

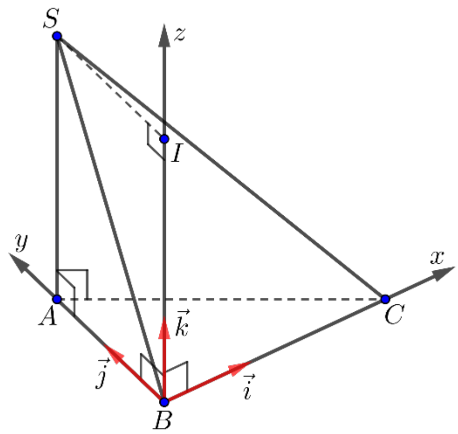
Lại có $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BS} = \left(3\vec{i} + 4\vec{j}\right) - \left(3\vec{i} - 4\vec{k}\right) = 4\vec{j} + 4\vec{k}$.

Vì M là trung điểm của SC nên $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{2}\left(4\vec{j} + 4\vec{k} + 8\vec{j}\right) = 6\vec{j} + 2\vec{k}$.

Do đó $\overrightarrow{AM} = (0;6;2)$.

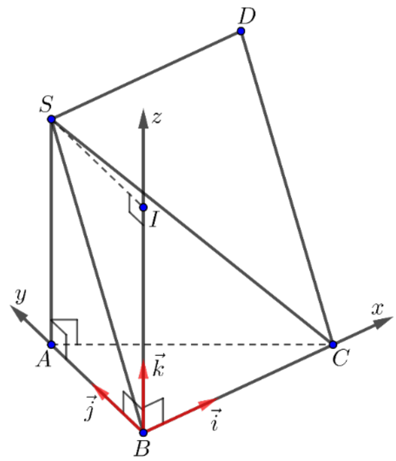
Suy ra $a+b+c = 0+6+2 = 8$

» Câu 40. Cho tứ diện $SABC$ có ABC là tam giác vuông tại B, $BC = 3$, $BA = 2$, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và có độ dài bằng 2. Chọn hệ trục tọa độ như hình bên dưới. Điểm $D(a;b;c)$ sao cho $SBCD$ là hình bình hành. Khi đó $a+b+c$ bằng bao nhiêu?



Lời giải

✓ *Trả lời: 8*



Các vectơ đơn vị trên các trục Bx, By, Bz lần lượt là $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ có độ dài bằng 1.

Vì $\overrightarrow{BA}$ cùng hướng với $\vec{j}$ và $BA = 2$ nên $\overrightarrow{BA} = 2\vec{j}$

Gọi $I \in Bz$ sao cho $SABI$ là hình bình hành, ta có $\overrightarrow{BI}$ cùng hướng với $\vec{k}$ và $BI = SA = 2$ nên $\overrightarrow{BI} = 3\vec{k}$

Theo quy tắc hình bình hành, ta có: $\overrightarrow{BS} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BI} = 2\vec{j} + 3\vec{k}$

Vì $\overrightarrow{BC}$ cùng hướng với $\vec{i}$ và $BC = 3$ nên $\overrightarrow{BC} = 3\vec{i}$

Gọi $\overrightarrow{BD} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$

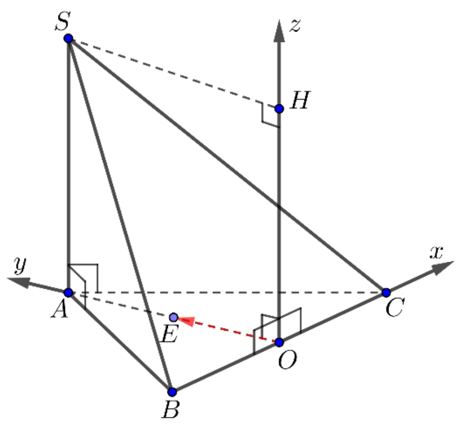
$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} - 3\vec{i} = (a-3)\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$

Để $SBCD$ là hình bình hành thì

$$\overrightarrow{BS} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow 2\vec{j} + 3\vec{k} = (a-3)\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} \Leftrightarrow \begin{cases} a-3=0 \\ b=2 \\ c=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=2 \\ c=3 \end{cases}$$

Vậy $a+b+c=8$

» Câu 41. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng 2, SA vuông góc với đáy và SA bằng 1. Thiết lập hệ tọa độ như hình vẽ bên dưới, tọa độ điểm $S\left(a;\sqrt{b};c\right)$. Khi đó $a+b+c$ bằng bao nhiêu?



Lời giải

✓ *Trả lời: 4*

Các vectơ đơn vị trên các trục Ox, Oy, Oz lần lượt là $\vec{i}=\overrightarrow{OC}$, $\vec{j}=\overrightarrow{OE}$, $\vec{k}=\overrightarrow{OH}$ với E là điểm thuộc tia Oy sao cho $OE=1$ và H là điểm thuộc tia Oz sao cho $OH=1$.

Vì ΔABC đều và $AO\perp BC$ nên O là trung điểm của BC.

Mà $BC=2$ nên $OB=OC=1$ và $OA=\sqrt{3}$.

Vì $\overrightarrow{OA}$ và $\vec{j}$ cùng hướng và $OA=\sqrt{3}$ nên $\overrightarrow{OA}=\sqrt{3}\vec{j}$.

Theo quy tắc hình bình hành, ta có $\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OH}=\sqrt{3}\vec{j}+\vec{k}$.

Suy ra $S\left(0;\sqrt{3};1\right)$. Vậy $a+b+c=0+3+1=4$

» Câu 42. Trong không gian với một hệ trục toạ độ cho trước (đơn vị đo lấy theo kilômét), ra đa phát hiện một chiếc máy bay di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $A\left(800;500;7\right)$ đến điểm $B\left(940;550;9\right)$ trong 10 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì toạ độ của máy bay sau 5 phút tiếp theo là $C(x;y;z)$. Tính $x+y+z$.

Lời giải

✓ Trả lời: 1594

Vị trí của máy bay sau 5 phút tiếp theo là $C(x;y;z)$. Vì hướng của máy bay không đổi nên $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng hướng. Do vận tốc của máy bay không đổi và thời gian bay từ A đến B gấp đôi thời gian bay từ B đến C nên $AB=2BC$.

Do đó $\overrightarrow{BC}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\left(\dfrac{940-800}{2};\dfrac{550-500}{2};\dfrac{9-7}{2}\right)=\left(70;25;1\right)$.

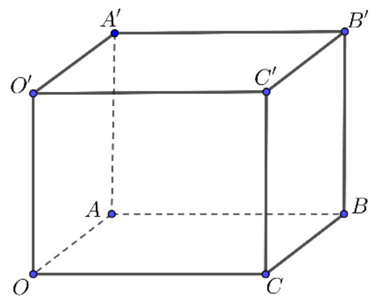
Mặt khác, $\overrightarrow{BC}=(x-940;y-550;z-8)$ nên $\begin{cases}x-940=70\\ y-550=25\\ z-8=1\end{cases}$

Từ đó $\begin{cases}x=1010\\ y=575\\ z=9\end{cases}\Rightarrow x+y+z=1594$.

» Câu 43. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $OABC.O'A'B'C'$ và các điểm $A\left(2;3;1\right)$, $C\left(-1;2;3\right)$ và $O'\left(1;-2;2\right)$. Vectơ $\vec{d}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}$ có tọa độ là $\left(a;b;c\right)$. Tính $a+b+c$.

Lời giải

✓ Trả lời: 33



Ta có $O\left(0;0;0\right)$

Gọi $B\left(x_B;y_B;z_B\right)$.

Ta có $\overrightarrow{OA}=(2;3;1);\overrightarrow{OC}=(-1;2;3);\overrightarrow{OB}=\left(x_B;y_B;z_B\right)$.

Vì $OABC$ là hình bình hành nên theo quy tắc hình bình hành ta có:

» $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B=2-1 \\ y_B=3+2 \\ z_B=1+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B=1 \\ y_B=5 \\ z_B=4 \end{cases} \Rightarrow B(1;5;4) \Rightarrow \overrightarrow{OB}=(1;5;4)$.

Có $\overrightarrow{OO'}=(1;-2;2);\overrightarrow{CC'}=(x_{C'}+1;y_{C'}-2;z_{C'}-3);\overrightarrow{BB'}=(x_{B'}-1;y_{B'}-5;z_{B'}-4)$;

$\overrightarrow{AA'}=(x_{A'}-2;y_{A'}-3;z_{A'}-1)$

Vì $OABC.O'A'B'C'$ là hình hộp nên:

» $\overrightarrow{OO'}=\overrightarrow{CC'} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{C'}+1=1 \\ y_{C'}-2=-2 \\ z_{C'}-3=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{C'}=0 \\ y_{C'}=0 \\ z_{C'}=5 \end{cases} \Rightarrow C(0;0;5) \Rightarrow \overrightarrow{OC}=(0;0;5)$.

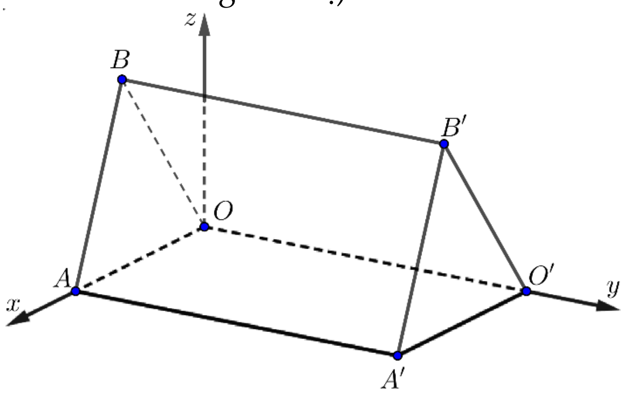
» $\overrightarrow{OO'}=\overrightarrow{AA'} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{A'}-2=1 \\ y_{A'}-3=-2 \\ z_{A'}-1=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{A'}=3 \\ y_{A'}=1 \\ z_{A'}=3 \end{cases} \Rightarrow A'(3;1;3) \Rightarrow \overrightarrow{OA'}=(3;1;3)$.

» $\overrightarrow{OO'}=\overrightarrow{BB'} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{B'}-1=1 \\ y_{B'}-5=-2 \\ z_{B'}-4=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{B'}=2 \\ y_{B'}=3 \\ z_{B'}=6 \end{cases} \Rightarrow B'(2;3;6) \Rightarrow \overrightarrow{OB'}=(2;3;6)$.

$\Rightarrow \vec{d}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}=(6;9;18) \Rightarrow a+b+c=6+9+18=33$.

» Câu 44. Những căn nhà gỗ trong *Hình 1* được phác thảo dưới dạng một hình lăng trụ đứng tam giác $OAB.O'A'B'$ như trong *Hình 2*. Với hệ trục toạ độ $Oxyz$ thể hiện như *Hình 2* (đơn vị đo lấy theo centimét), hai điểm A' và B' có tọa độ lần lượt là $(240;450;0)$ và $(120;450;300)$. Mỗi căn nhà gỗ có chiều dài là a cm, chiều rộng là b cm, mỗi cạnh bên của mặt tiền có độ dài là c cm. Tính $a+b+c$ (Làm tròn đến hàng đơn vị).

Hình 1



Hình 2

Lời giải

✓ *Trả lời: 1013*

Vì điểm A' có toạ độ là $(240;450;0)$ nên khoảng cách từ A' đến các trục Ox,Oy lần lượt là $450\,\text{cm}$ và $240\,\text{cm}$.

$\Rightarrow A'A=450\,\text{cm}$ và $A'O'=240\,\text{cm}$.

Từ giả thiết suy ra $\overrightarrow{A'B'}=(-120;0;300)$, Do đó $A'B' = \left|\overrightarrow{A'B'}\right| = \sqrt{(-120)^2 + 0^2 + 300^2} = 60\sqrt{29} \approx 323(\text{cm})$.

Vì $O'O = A'A = 450\,\text{cm}$ và O' nằm trên trục Oy nên toạ độ của điểm O' là $\left(0;450;0\right)$.

Do đó $\overrightarrow{O'B'} = \left(120;0;300\right)$ và $O'B' = \left|\overrightarrow{O'B'}\right| = \sqrt{120^2 + 0^2 + 300^2} = 60\sqrt{29} \approx 323\ (\text{cm})$.

Vậy mỗi căn nhà gỗ có chiều dài là $450\,\text{cm}$, chiều rộng là $240\,\text{cm}$, mỗi cạnh bên của mặt tiền có độ dài là 323 cm.
$\Rightarrow a + b + c = 1013$.

--------------------Hết--------------------

Chương 02

Bài 3. BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTƠ

A. Lý thuyết

1. Biểu thức tọa độ của tổng, hiệu hai vectơ và tích của một số với một vectơ

Định nghĩa:

Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ và $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$ và số k. Khi đó:

» $\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1;a_2+b_2;a_3+b_3)$ » $\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1;a_2-b_2;a_3-b_3)$

» $k\vec{a}=(ka_1;ka_2;ka_3)$

⁂ *Nhận xét*: Hai vectơ $\vec{a};\vec{b}$ với $\vec{b}\neq\vec{0}$ cùng phương $\vec{a}=k.\vec{b}\Leftrightarrow\begin{cases}a_1=k.b_1\\a_2=k.b_2\end{cases}$

Chú ý

» Từ nay, các bài tập liên quan đến toạ độ đều được xét trong không gian $Oxyz$.

2. Biểu thức tọa độ của tích vô hướng

Định nghĩa:

Trong không gian $Oxyz$, tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ và $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$ được xác định bởi công thức

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3.$$

3. Vận dụng

Tọa độ điểm đầu cuối:

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(x_A;y_A;z_A), B(x_B;y_B;z_B)$.

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A)$.

Tọa độ trung điểm đoạn thẳng

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(x_A;y_A;z_A), B(x_B;y_B;z_B)$.

Toạ độ trung điểm M của đoạn thẳng AB là: $M\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2};\frac{z_A+z_B}{2}\right)$

Tọa độ trọng tâm tâm giác

Trong không gian $Oxyz$, cho ΔABC có $A\left(x_A;y_A;z_A\right),B\left(x_B;y_B;z_B\right)$ và $C\left(x_C;y_C;z_C\right)$.

Tọa độ trọng tâm G của ΔABC là: $G\left(\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3};\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3};\dfrac{z_A+z_B+z_C}{3}\right)$.

B Các dạng bài tập

Dạng 1. Tọa độ tổng hiệu vectơ

Phương pháp

Trong không gian $Oxyz$, hai vectơ $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ và $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$ và số thực k.

(1) $\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1;a_2+b_2;a_3+b_3)$

(2) $\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1;a_2-b_2;a_3-b_3)$

(3) $k\vec{a}=(ka_1;ka_2;ka_3)$

(4) $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương $\Leftrightarrow \begin{cases} a_1=kb_1 \\ a_2=kb_2 \\ a_3=kb_3 \end{cases}$

Ví dụ 1.1.

Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}=(2;-1;5)$ và $\vec{b}=(0;-2;-4)$. Tìm tọa độ của các vectơ sau: $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$, $5\vec{a}$, $2\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$.

Lời giải

Ta có:

$\vec{a}+\vec{b}=(2+0;(-1)+(-2);5+(-4))=(2;-3;1)$.

$\vec{a}-\vec{b}=(2-0;(-1)-(-2);5-(-4))=(2;1;9)$.

$5\vec{a}=(5.2;5.(-1);5.5)=(10;-5;25)$.

$2\vec{a}=(4;-2;10)$, $\frac{1}{2}\vec{b}=(0;-1;-2)$. Do đó: $2\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}=(4;-1;12)$.

Ví dụ 1.2.

Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1;-3;-2)$, $B(2;3;4)$ và $C(3;5;7)$.
Chứng minh rằng ba điểm A,B,C tạo thành tam giác.

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(3;6;6)$; $\overrightarrow{AC}=(4;8;9)$.

Vì $\frac{3}{4}=\frac{6}{8}\neq\frac{6}{9}$ nên $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương.

Vậy ba điểm A,B,C tạo thành tam giác.

Dạng 2. Tọa độ điểm – vectơ thỏa điều kiện

Phương pháp

(1) Tích vô hướng của hai vectơ: $\vec{a}.\vec{b} = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2$.

(2) $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc $\Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$

(3) I là trung điểm AB: $I\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}; \dfrac{y_A + y_B}{2}; \dfrac{z_A + z_B}{2}\right)$

$$\to \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0} \Rightarrow \forall M: \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$$

(4) G là trọng tâm ΔABC: $G\left(\dfrac{x_A + x_B + x_C}{3}; \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3}; \dfrac{z_A + z_B + z_C}{3}\right)$

$$\to \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Rightarrow \forall M: \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$$

(5) G là trọng tâm chóp $ABCD$: $G\left(\dfrac{x_A + x_B + x_C + x_D}{4}; \dfrac{y_A + y_B + y_C + y_D}{4}; \dfrac{z_A + z_B + z_C + z_D}{4}\right)$

$$\to \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0} \Rightarrow \forall M: \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG}$$

Ví dụ 2.1.

Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;2;1)$, $B(1;-1;2)$ và $C(1;2;-1)$. Tìm tọa độ vectơ $\vec{u}$ thỏa $\vec{u} = \overrightarrow{BC} - 3\overrightarrow{AO}$.

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{BC} = (0;3;-3)$, $\overrightarrow{AO} = (-3;-2;-1)$.

Do đó: $\vec{u} = \overrightarrow{BC} - 3\overrightarrow{AO} = (0 - 3.(-3); 3 - 3.(-2); -3 - 3.(-1)) = (9;9;0)$.

Ví dụ 2.2.

Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$ và $C(-3;5;1)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{DC}$.

Lời giải

Gọi $D(x;y;z)$ là điểm cần tìm.

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (1;-3;4)$, $\overrightarrow{DC} = (-3-x; 5-y; 1-z)$.

Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 2(-3-x) \\ -3 = 2(5-y) \\ 4 = 2(1-z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{7}{2} \\ y = \dfrac{13}{2} \\ z = -1 \end{cases}$.

Vậy $D\left(-\dfrac{7}{2}; \dfrac{13}{2}; -1\right)$.

Ví dụ 2.3.

Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;2)$ và $D(2;2;2)$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm AB và CD. Xác định Tọa độ trung điểm I của MN

Lời giải

Ta có M là trung điểm $AB \Rightarrow M\left(\frac{2+0}{2};\frac{0+2}{2};\frac{0+0}{2}\right) \Rightarrow M(1;1;0)$

Và N là trung điểm $CD \Rightarrow N\left(\frac{0+2}{2};\frac{0+2}{2};\frac{2+2}{2}\right) \Rightarrow N(1;1;2)$

Vậy I là trung điểm $MN \Rightarrow I\left(\frac{1+1}{2};\frac{1+1}{2};\frac{0+2}{2}\right) \Rightarrow I(1;1;1)$.

Ví dụ 2.4.

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;-1)$ và $B(0;-2;3)$. Tìm tọa độ chân đường cao kẻ từ đỉnh O của tam giác OAB.

Lời giải

Gọi $K(x;y;z)$ là điểm cần tìm.

Ta có: $\overrightarrow{AK}=(x-1;y-2;z+1)$, $\overrightarrow{AB}=(-1;-4;4)$.

Vì A,K,B thẳng hàng nên $\overrightarrow{AK}=k\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=k.(-1) \\ y-2=k.(-4) \\ z+1=k.4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-k+1 \\ y=-4k+2 \\ z=4k-1. \end{cases}$

$\Rightarrow K(-k+1;-4k+1;4k-1) \Rightarrow \overrightarrow{OK}=(-k+1;-4k+2;4k-1)$.

Vì $OK \perp AB$ nên $\overrightarrow{OK}.\overrightarrow{AB}=0 \Leftrightarrow (-k+1).(-1)+(-4k+2).(-4)+(4k-1).4=0 \Leftrightarrow k=\frac{13}{33}$.

Vậy $K\left(\frac{20}{33};\frac{14}{33};\frac{19}{33}\right)$.

Ví dụ 2.5.

Trong không gian $Oxyz$, cho ΔABC biết $A(2;4;-3)$ có trọng tâm $G(2;1;0)$. Khi đó xác định tọa độ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

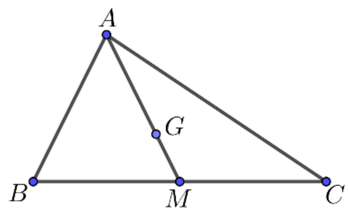
Lời giải

Gọi M là trung điểm đoạn BC, G là trọng tâm ΔABC

Ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}$ (quy tắc hình bình hành)

Và $\overrightarrow{AM}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AG}$

Do đó $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}=2.\frac{3}{2}\overrightarrow{AG}=3(0;-3;3)=(0;-9;9)$.



Dạng 3. Độ dài vectơ

Phương pháp

(1) $\overrightarrow{AB}=\left(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A\right)\to AB=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2+\left(z_B-z_A\right)^2}$

(2) Độ dài véctơ $\vec{a}$: $|\vec{a}|=\sqrt{\left(a_1\right)^2+\left(a_2\right)^2+\left(a_3\right)^2}\longrightarrow|\vec{a}|^2=\vec{a}^2=\left(a_1\right)^2+\left(a_2\right)^2+\left(a_3\right)^2$

Ví dụ 3.1.

Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1;2;-1)$ và $B(0;3;1)$. Tính độ dài đoạn thẳng AB.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-1;1;2)\Rightarrow AB=\sqrt{(-1)^2+1^2+2^2}=\sqrt{6}$

Ví dụ 3.2.

Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC biết $A(1;0;-2), B(2;1;-1), C(1;-2;2)$.
Tìm chu vi của ΔABC.

Lời giải

Theo công thức tính độ dài ta được

$AB=\sqrt{(2-1)^2+(1-0)^2+(-1+2)^2}=\sqrt{3}$;

$BC=\sqrt{1+9+9}=\sqrt{10}$;

$AC=\sqrt{0+4+16}=2\sqrt{5}$.

Chu vi của ABC: $\sqrt{3}+\sqrt{10}+2\sqrt{5}$.

Ví dụ 3.3.

Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1;2;-1)$, $B(0;3;1)$; $C(3;2;0)$. Tính diện tích ΔABC (nếu có).

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-1;1;2)$ và $\overrightarrow{AC}=(2;0;1)$ không cùng phương nên ba điểm $A;B;C$ lập thành tam giác.

Và $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-1.2+1.0+2.1=0\Rightarrow\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}\Rightarrow AB\perp AC$ nên ΔABC vuông tại A.

Mặt khác $AB=\sqrt{(-1)^2+1^2+2^2}=\sqrt{6}$ và $AC=\sqrt{2^2+0+1^2}=\sqrt{5}$

Vậy diện tích tam giác ABC là $S=\frac{1}{2}AB.AC=\frac{1}{2}\sqrt{6}.\sqrt{5}=\frac{\sqrt{30}}{2}$.

Ví dụ 3.4.

Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;0;0)$, $B(0;3;1)$, $C(-3;6;4)$. Tìm điểm M thuộc đoạn BC sao cho $MC=2MB$. Tìm độ dài đoạn AM.

Lời giải

Giả sử $M(a;b;c)\Rightarrow \overrightarrow{BM}=(a;b-3;c-1)$ và $\overrightarrow{BC}=(-3;3;3)$.

Điểm $M\in BC$: $MC=2MB\Rightarrow \overrightarrow{BM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{3}.(-3) \\ b-3=\frac{1}{3}.3 \\ c-1=\frac{1}{3}.3 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=4 \\ c=2 \end{cases}\Rightarrow M(-1;4;2)$.

Vậy $AM=\sqrt{9+16+4}=\sqrt{29}$.

Dạng 4. Sự cùng phương của hai vectơ

Phương pháp

Xét hai véctơ $\vec{a}=\left(a_1;a_2;a_3\right)$ và $\vec{b}=\left(b_1;b_2;b_3\right)$ ta có:

(1) Hai véctơ bằng nhau: $\vec{a}=\vec{b}\Leftrightarrow\begin{cases}a_1=b_1\\a_2=b_2\\a_3=b_3\end{cases}$

(2) Véctơ $\vec{a}$ cùng phương véctơ $\vec{b}$: $\vec{a}=k.\vec{b}\Leftrightarrow\begin{cases}a_1=k.b_1\\a_2=k.b_2\\a_3=k.b_3\end{cases}$

Ví dụ 4.1.

Trong không gian $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a}=\left(4;1;-2\right)$; $\vec{b}=\left(1;-2;-1\right)$; $\vec{c}=\left(8;2;-4\right)$; $\vec{d}=\left(-4;-1;2\right)$. Vectơ $\vec{a}=\left(4;1;-2\right)$ cùng phương với vectơ nào đã cho?

Lời giải

Xét $\begin{cases}\vec{a}=\left(4;1;-2\right)\\\vec{b}=\left(1;-2;-1\right)\end{cases}\Rightarrow\frac{4}{1}\neq\frac{1}{-2}\neq\frac{-2}{-1}$ nên $\vec{a}$ không cùng phương $\vec{b}$.

Xét $\begin{cases}\vec{a}=\left(4;1;-2\right)\\\vec{c}=\left(8;2;-4\right)\end{cases}\Rightarrow\frac{4}{8}=\frac{1}{2}=\frac{-2}{-4}$ nên $\vec{a}$ cùng phương $\vec{c}$.

Xét $\begin{cases}\vec{a}=\left(4;1;-2\right)\\\vec{d}=\left(-4;-1;2\right)\end{cases}\Rightarrow\frac{4}{-4}=\frac{1}{-1}=\frac{-2}{2}$ nên $\vec{a}$ cùng phương $\vec{d}$.

Vậy vectơ $\vec{a}$ cùng phương với vectơ $\vec{c}$ và $\vec{d}$.

Ví dụ 4.2.

Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}=\left(1;1;5\right)$ và $\vec{b}=\left(m+1;2n;10\right)$. Tìm m,n để hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương.

Lời giải

Để hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương khi và chỉ khi $\begin{cases}a_1=kb_1\\a_2=kb_1\\a_3=kb_3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1=k\left(m+1\right)\\1=k\left(2n\right)\\5=k.10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=\frac{1}{2}\\m=1\\n=1\end{cases}$

Vậy: $m=1$; $n=1$.

Ví dụ 4.3.

Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;-1;5), B(5;-5;7)$, $M(x;y;1)$. Với giá trị nào của x, y thì A, B, M thẳng hàng.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB}=(3;-4;2)$, $\overrightarrow{AM}=(x-2;y+1;-4)$.

A, B, M thẳng hàng. $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AM}$ cùng phương $\Leftrightarrow \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{-4}=\dfrac{-4}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4 \\ y=7 \end{cases}$.

Ví dụ 4.4.

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2;3;1)$ và $B(5;\ 6;\ 2)$. Đường thẳng AB cắt mặt phẳng (Oxz) tại điểm M. Tính tỉ số $\dfrac{AM}{BM}$.

Lời giải

$M\in(Oxz)\Rightarrow M(x;0;z)$; $\overrightarrow{AB}=(7;3;1)\Rightarrow AB=\sqrt{59}$; $\overrightarrow{AM}=(x+2;-3;z-1)$

A, B, M thẳng hàng $\Rightarrow \overrightarrow{AM}=k.\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2=7k \\ -3=3k \\ z-1=k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-9 \\ -1=k \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow M(-9;0;0)$.

$\overrightarrow{BM}=(-14;-6;-2), \overrightarrow{AM}=(-7;-3;-1)\Rightarrow AM=\sqrt{59}$, $BM=2\sqrt{59}\Rightarrow \dfrac{AM}{BM}=\dfrac{1}{2}$.

Dạng 5. Tích vô hướng và ứng dụng

Phương pháp

Xét hai véctơ $\vec{a}=\left(a_1;a_2;a_3\right)$ và $\vec{b}=\left(b_1;b_2;b_3\right)$ ta có:

(1) Tích vô hướng hai véctơ: $\left[\begin{array}{l}\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos\left(\vec{a};\vec{b}\right)\\ \vec{a}.\vec{b}=a_1.b_1+a_2.b_2+a_3.b_3\end{array}\right.$

$\longrightarrow$ Góc giữa 2 véctơ: $\cos\left(\vec{a};\vec{b}\right)=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}=\dfrac{a_1.b_1+a_2.b_2+a_3.b_3}{\sqrt{\left(a_1\right)^2+\left(a_2\right)^2+\left(a_3\right)^2}.\sqrt{\left(b_1\right)^2+\left(b_2\right)^2+\left(b_3\right)^2}}$

Chú ý: Khi $\vec{a}.\vec{b}>0$ thì $\cos\left(\vec{a};\vec{b}\right)>0\Rightarrow\left(\vec{a};\vec{b}\right)$ là góc nhọn,

Khi $\vec{a}.\vec{b}<0$ thì $\cos\left(\vec{a};\vec{b}\right)<0\Rightarrow\left(\vec{a};\vec{b}\right)$ là góc tù.

(2) Véctơ $\vec{a}$ vuông góc véctơ $\vec{b}$: $\vec{a}.\vec{b}=0\Leftrightarrow a_1.b_1+a_2.b_2+a_3.b_3=0$

▶ **Bài toán liên quan giữa độ dài và tích vô hướng:**

Cho hai vecto $\vec{u}$ và $\vec{v}$ có $|\vec{u}|=m;\ |\vec{v}|=n$ và tạo với nhau một góc α. Tính $|\vec{u}+\vec{v}|$ hoặc $|\vec{u}-\vec{v}|$ hoặc tùy vào yêu cầu bài toán.

Hướng giải quyết

» ***Bước 1:*** Biến đổi $\left(|\vec{u}+\vec{v}|\right)^2=\left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2=\vec{u}^2+2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2$

» ***Bước 2:*** Áp dụng: $\begin{cases}\vec{u}^2=|\vec{u}|^2\\ \vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos\left(\vec{a};\vec{b}\right)\end{cases}$

Để biến đổi: $\vec{u}^2+2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2=|\vec{u}|^2+2|\vec{u}|.|\vec{v}|\cos\left(\vec{u};\vec{v}\right)+|\vec{v}|^2\quad(*)$

» ***Bước 3:*** Lắp các dữ kiện giả thiết vào $(*)\Rightarrow|\vec{u}+\vec{v}|=?$

Ví dụ 5.1.

Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}=\left(-3;4;0\right),\vec{b}=\left(5;0;12\right)$. Tính côsin của góc giữa $\vec{a};\vec{b}$.

Lời giải

Ta có: $\cos\left(\vec{a};\vec{b}\right)=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\dfrac{-3.5+4.0+0.12}{\sqrt{\left(-3\right)^2+4^2+0^2}\cdot\sqrt{5^2+0^2+12^2}}=-\dfrac{3}{13}$.

Ví dụ 5.2.

Trong không gian $Oxyz$, cho $A\left(-1;-2;3\right)$, $B\left(0;3;1\right)$, $C\left(4;2;2\right)$. Côsin của $\widehat{BAC}$ bằng

Lời giải

Ta có $\cos\widehat{BAC}=\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|}$ mà: $\overrightarrow{AB}=\left(1;5;-2\right)$, $\overrightarrow{AC}=\left(5;4;-1\right)$.

$$\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1.5+5.4+(-2)(-1)}{\sqrt{1^2+5^2+(-2)^2}\sqrt{5^2+4^2+(-1)^2}}=\frac{27}{\sqrt{30}\sqrt{42}}=\frac{9}{2\sqrt{35}}.$$

Ví dụ 5.3.

Trong không gian $Oxyz$, cho hai véc tơ $\vec{a}=(2;1;-2)$, $\vec{b}=\left(0;-\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$. Tìm tất cả giá trị của m để hai véc tơ $\vec{u}=2\vec{a}+3m\vec{b}$ và $\vec{v}=m\vec{a}-\vec{b}$ vuông góc với nhau.

Lời giải

Ta có: $\begin{cases}\vec{u}=2\vec{a}+3m\vec{b}=\left(2;2-3m\sqrt{2};-4+3m\sqrt{2}\right)\\ \vec{v}=m\vec{a}-\vec{b}=\left(2m;m+\sqrt{2};-2m-\sqrt{2}\right)\end{cases}$.

Khi đó: $\vec{u}.\vec{v}=0\Leftrightarrow 4m+\left(2-3m\sqrt{2}\right)\left(m+\sqrt{2}\right)+\left(-4+3m\sqrt{2}\right)\left(-2m-\sqrt{2}\right)=0$.

$\Leftrightarrow 9m^2\sqrt{2}-6m-6\sqrt{2}=0\Leftrightarrow m=\dfrac{\pm\sqrt{26}+\sqrt{2}}{6}$.

Ví dụ 5.4.

Trong không gian $Oxyz$, cho vecto $\vec{u}=(1;1;-2)$, $\vec{v}=(1;0;m)$. Tìm m để góc giữa hai vecto $\vec{u},\vec{v}$ bằng $45°$.

Lời giải

Ta có: $\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)=\cos 45°\Leftrightarrow\dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow\dfrac{1-2m}{\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}.\sqrt{1^2+m^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow\dfrac{1-2m}{\sqrt{6}.\sqrt{1+m^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow 1-2m=\sqrt{3+3m^2}\Leftrightarrow\begin{cases}1-2m\ge 0\\ (1-2m)^2=3+3m^2\end{cases}$.

$\Leftrightarrow\begin{cases}m\le\dfrac{1}{2}\\ m^2-4m-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\le\dfrac{1}{2}\\ m=2\pm\sqrt{6}\end{cases}\Leftrightarrow m=2-\sqrt{6}$.

Ví dụ 5.5.

Trong không gian $Oxyz$, cho hai vecto $\vec{u}$ và $\vec{v}$ tạo với nhau một góc $120°$ và $|\vec{u}|=2$, $|\vec{v}|=5$. Tính $|\vec{u}+\vec{v}|$.

Lời giải

Ta có : $\left(|\vec{u}+\vec{v}|\right)^2=\left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2$

$=\vec{u}^2+2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2=|\vec{u}|^2+2|\vec{u}|.|\vec{v}|\cos\left(\vec{u};\vec{v}\right)+|\vec{v}|^2=2^2+2.2.5.\left(-\dfrac{1}{2}\right)+5^2=19$.

Suy ra $|\vec{u}+\vec{v}|=\sqrt{19}$.

Dạng 6. Tâm tỷ cự

Phương pháp

▶ Bài toán cực trị độ dài vecto:

Cho n điểm $A_1;A_2;\ldots;A_n$ và các hệ số $k_1;k_2;\ldots;k_n$ sao cho $k=k_1+k_2+\ldots+k_n\neq 0$ và đường thẳng d hoặc mặt phẳng (P). Tìm điểm M trên đường thẳng d hoặc mặt phẳng (P), sao cho $\left|k_1.\overrightarrow{MA_1}+k_2.\overrightarrow{MA_2}+\ldots+k_n.\overrightarrow{MA_n}\right|$ nhỏ nhất.

Hướng giải quyết

» ***Bước 1:*** Gọi I là điểm thỏa mãn $k_1.\overrightarrow{IA_1}+k_2.\overrightarrow{IA_2}+\ldots+k_n.\overrightarrow{IA_n}=\vec{0}$.

» ***Bước 2:*** Áp dụng quy tắc ba điểm biến đổi:

$$\left|k_1.\overrightarrow{MA_1}+k_2.\overrightarrow{MA_2}+\ldots+k_n.\overrightarrow{MA_n}\right|=\left|(k_1+k_2+\ldots k_n)\overrightarrow{MI}\right|=|k|\left|\overrightarrow{MI}\right|$$

» ***Bước 3:*** Tìm độ dài nhỏ nhất của các vecto đã cho xảy ra khi M xảy ra ở vị trí nào?

▶ Bài toán cực trị độ dài bình phương vecto:

Cho đa giác $A_1A_2\ldots A_n$ và các hệ số $k_1;k_2;\ldots;k_n$ sao cho $k=k_1+k_2+\ldots+k_n>0$. Tìm điểm M trên đường thẳng d hoặc mặt phẳng (P), sao cho tổng $S=k_1\cdot MA_1^2+k_2\cdot MA_2^2+\ldots+k_n\cdot MA_n^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Hướng giải quyết

» ***Bước 1:*** Gọi I là điểm thỏa mãn $k_1.\overrightarrow{IA_1}+k_2.\overrightarrow{IA_2}+\ldots+k_n.\overrightarrow{IA_n}=\vec{0}$.

» ***Bước 2:*** Thấy rằng $MA_1^2=\left|\overrightarrow{MA_1}\right|^2=\left(\overrightarrow{MA_1}\right)^2=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA_1}\right)^2=\left(\overrightarrow{MI}\right)^2+2\left(\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA_1}\right)+\left(\overrightarrow{IA_1}\right)^2$

Áp dụng quy tắc ba điểm biến đổi:

$$S=k_1\cdot MA_1^2+k_2\cdot MA_2^2+\ldots+k_n\cdot MA_n^2$$
$$=k_1\left[\left(\overrightarrow{MI}\right)^2+2\left(\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA_1}\right)+\left(\overrightarrow{IA_1}\right)^2\right]+\ldots+k_n\left[\left(\overrightarrow{MI}\right)^2+2\left(\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA_n}\right)+\left(\overrightarrow{IA_n}\right)^2\right]$$
$$=(k_1+k_2+\ldots+k_n)MI^2+\left(k_1\cdot IA_1^2+\ldots+k_n\cdot IA_n^2\right)+\ldots+2\overrightarrow{MI}\left(\underbrace{k_1.\overrightarrow{IA_1}+\ldots+k_n.\overrightarrow{IA_n}}_{=\vec{0}}\right)$$
$$=(k_1+k_2+\ldots+k_n)MI^2+\left(k_1\cdot IA_1^2+\ldots+k_n\cdot IA_n^2\right)$$

» ***Bước 3:*** Do $k>0$, để $S=k_1\cdot MA_1^2+k_2\cdot MA_2^2+\ldots+k_n\cdot MA_n^2$ đạt giá trị nhỏ nhất thì ta xác định vị trí điểm M cần tìm.

▶ ***Chú ý:*** Cho đa giác $A_1A_2\ldots A_n$ và các hệ số $k_1;k_2;\ldots;k_n$ sao cho $k=k_1+k_2+\ldots+k_n<0$. Tìm điểm M trên d hoặc (P), sao cho tổng $S=k_1\cdot MA_1^2+k_2\cdot MA_2^2+\ldots+k_n\cdot MA_n^2$ đạt giá trị lớn nhất. Ta cũng thực hiện tương tự.

Ví dụ 6.1.

Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2;-3;7), B(0;4;1), C(3;0;5)$ và $D(3;3;3)$. Gọi M là điểm nằm trên mặt phẳng (Oyz) sao cho biểu thức $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó xác định tọa độ điểm M.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-2;7;-6), \overrightarrow{AC}=(1;3;-2), \overrightarrow{AD}=(1;6;-4)$ nên $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}=-4\neq 0$.

Suy ra $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$ không đồng phẳng.

Gọi G là trọng tâm tứ diện $ABCD$. Khi đó $G(2;1;4)$

Ta có $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right|=\left|4\overrightarrow{MG}\right|=4MG.$

Do đó $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right|$ nhỏ nhất khi và chỉ khi MG ngắn nhất.

Vậy M là hình chiếu vuông góc của G lên mặt phẳng (Oyz) nên $M(0;1;4)$.

Ví dụ 6.2.

Trong không gian $Oxyz$, cho $\overrightarrow{OA}=\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k}, B(2;2;1)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc trục tung sao cho MA^2+MB^2 nhỏ nhất.

Lời giải

Cách 1.

Do $M\in Oy$, nên $M(0;y;0)$.

Tính $MA^2+MB^2=2y^2-6y+20=f(y)$.

Do đó $f(y)$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $y=\dfrac{3}{2}$. Vậy $M\left(0;\dfrac{3}{2};0\right)$.

Cách 2.

Ta có $A(1;1;-3)$. Gọi I là trung điểm của AB. Suy ra $I\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2};-1\right)$.

Khi đó $MA^2+MB^2=\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2$

$=2\overrightarrow{MI}^2+\overrightarrow{IA}^2+\overrightarrow{IB}^2+2\overrightarrow{MI}.\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right)=2MI^2+IA^2+IB^2=2MI^2+9$.

Do đó MA^2+MB^2 đạt giá trị nhỏ nhất

$\Leftrightarrow$ khi MI có độ dài ngắn nhất

$\Leftrightarrow$ M là hình chiếu vuông góc của I trên trục tung.

Vậy $M\left(0;\dfrac{3}{2};0\right)$.

Chương 02

Bài 3. BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTƠ

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm

» Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u}=(-1;5;0)$ và $\vec{v}=(1;-5;-3)$, tọa độ của vectơ $\vec{u}+\vec{v}$ là

A. $(2;-10;3)$. **B.** $(2;10;3)$. **C.** $(0;0;-3)$. **D.** $(2;0;3)$.

Lời giải

Chọn C

Do $\vec{u}+\vec{v}=(-1+1;\ 5+(-5);\ 0+(-3))=(0;\ 0;-3)$.

» Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}=(-2;5;2)$ và $\vec{b}=(1;-3;-1)$, vectơ $\vec{a}-\vec{b}$ có tọa độ là

A. $(1;-2;3)$. **B.** $(-3;8;3)$. **C.** $(-1;2;1)$. **D.** $(3;-8;-3)$.

Lời giải

Chọn B

Do $\vec{a}-\vec{b}=(-2-1;5-(-3);\ 2-(-1))=(-3;8;3)$.

» Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{a}=(-2;6;2)$, vectơ $\frac{3}{2}\vec{a}$ có tọa độ là

A. $(-6;9;6)$. **B.** $(-3;9;3)$. **C.** $(6;9;6)$. **D.** $(-3;6;3)$.

Lời giải

Chọn B

Do $\frac{3}{2}\vec{a}=\left(\frac{3}{2}.(-2);\frac{3}{2}.6;\frac{3}{2}.2\right)=(-3;9;3)$.

» Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a}=(2;-1;0)$, $\vec{b}=(-1;-3;2)$, $\vec{c}=(-2;-4;-3)$, tọa độ của $\vec{u}=2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}$ là

A. $(5;\ 3;\ -9)$ **B.** $(-5;\ -3;\ 9)$ **C.** $(-3;\ -7;\ -9)$ **D.** $(3;\ 7;\ 9)$

Lời giải

Chọn A

Do $\vec{u}=2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}=(2.2-3.(-1)+(-2);2.(-1)-3.(-3)+(-4);2.0-3.2+(-3))=(5;3;-9)$.

» Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho hai véctơ $\vec{a}=(3;0;1)$, $\vec{c}=(1;1;0)$. Tìm tọa độ của véc tơ $\vec{b}$ thỏa mãn đẳng thức $\vec{b}-\vec{a}+2\vec{c}=\vec{0}$?

A. $\vec{b}=(-1;2;-1)$. **B.** $\vec{b}=(-2;1;-1)$. **C.** $\vec{b}=(1;-2;1)$. **D.** $\vec{b}=(1;2;1)$.

Lời giải

Chọn C

Do $\vec{b}-\vec{a}+2\vec{c}=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{b}=\vec{a}-2\vec{c}=(1;-2;1)$.

» Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(2;-2;1)$ trên mặt phẳng (Oxy) có tọa độ là

A. $(2;0;1)$. **B.** $(2;-2;0)$. **C.** $(0;-2;1)$. **D.** $(0;0;1)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có hình chiếu của điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ trên mặt phẳng (Oxy) là điểm $M'(x_0;y_0;0)$.

Do đó hình chiếu của điểm $M(2;-2;1)$ trên mặt phẳng (Oxy) là điểm $M'(2;-2;0)$.

» Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(1;-2;2)$ và $N(1;0;4)$. Toạ độ trung điểm của đoạn thẳng MN là

A. $(1;-1;3)$. **B.** $(0;2;2)$. **C.** $(2;-2;6)$. **D.** $(1;0;3)$.

Lời giải

Chọn A

Gọi I là trung điểm MN. Ta có $\begin{cases} x_I = \dfrac{x_M + x_N}{2} = \dfrac{1+1}{2} = 1 \\ y_I = \dfrac{y_M + y_N}{2} = \dfrac{-2+0}{2} = -1 \\ z_I = \dfrac{z_M + z_N}{2} = \dfrac{2+4}{2} = 3 \end{cases}$.

Vậy $I(1;-1;3)$.

» Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;-2)$ và $B(2;2;1)$. Vectơ $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ là

A. $(-1;-1;-3)$. **B.** $(3;1;1)$. **C.** $(1;1;3)$. **D.** $(3;3;-1)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\overrightarrow{AB} = (1;1;3)$.

» Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;-3;5)$. Tìm tọa độ A' là điểm đối xứng với A qua trục Oy.

A. $A'(2;3;5)$. **B.** $A'(2;-3;-5)$. **C.** $A'(-2;-3;5)$. **D.** $A'(-2;-3;-5)$.

Lời giải

Chọn D

Gọi H là hình chiếu vuông góc của $A(2;-3;5)$ lên Oy. Suy ra $H(0;-3;0)$

Vì A' đối xứng với A qua trục Oy nên H là trung điểm đoạn AA'.

Suy ra $\begin{cases} x_{A'} = 2x_H - x_A = -2 \\ y_{A'} = 2y_H - y_A = -3 \\ z_{A'} = 2z_H - z_A = -5 \end{cases} \Rightarrow A'(-2;-3;-5)$.

» Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;3;2)$ và $B(3;-1;4)$. Tọa độ vectơ $\vec{u} = 2\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{OB}$ là

A. $\vec{u} = (-7;7;-8)$. **B.** $\vec{u} = (-7;3;-8)$. **C.** $\vec{u} = (-7;5;-8)$. **D.** $\vec{u} = (-7;9;-8)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\overrightarrow{BA}=(-2;4;-2)$ và $\overrightarrow{OB}=(3;-1;4)$ suy ra $2\overrightarrow{BA}=(-4;8;-4)$.

Vậy $\vec{u}=2\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{OB}=(-7;9;-8)$.

» Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;2;1)$ và $B(3;-2;1)$. Độ dài đoạn thẳng AB bằng

A. 5. **B.** 3. **C.** 25. **D.** 9.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\overrightarrow{AB}=(3;-4;0)$ nên $AB=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{3^2+(-4)^2+0^2}=5$.

» Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho hình bình hành $MNPQ$ có $M(-4;3;3), N(4;-4;2)$ và $P(3;6;-1)$. Biết chu vi của hình bình hành $MNPQ$ bằng $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ với $a,b\in\mathbb{N}^*$ và $a>b$. Tính $a-b$.

A. 4. **B.** 8. **C.** 16. **D.** 32.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\overrightarrow{MN}=(8;-7;-1)$ và $\overrightarrow{NP}=(-1;10;-3)$.

Suy ra $MN=\left|\overrightarrow{MN}\right|=\sqrt{8^2+(-7)^2+(-1)^2}=\sqrt{114}$ và $NP=\left|\overrightarrow{NP}\right|=\sqrt{(-1)^2+10^2+(-3)^2}=\sqrt{110}$.

Chu vi của hình bình hành $MNPQ$ là $2(MN+NP)=2\sqrt{114}+2\sqrt{110}=\sqrt{456}+\sqrt{440}$.

Khi đó $a=456, b=440$. Vậy $a-b=16$.

» Câu 13. Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{u}=(1;-2;3)$. Vectơ nào sau đây cùng phương với vectơ $\vec{u}$?

A. $\vec{a}=(2;4;6)$. **B.** $\vec{b}=(-3;6;-9)$. **C.** $\vec{c}=\left(\frac{1}{2};-2;\frac{3}{2}\right)$. **D.** $\vec{d}=(-1;2;-3)$.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào các đáp án, ta thấy $\vec{u}=-\vec{d}$ nên $\vec{d}$ cùng phương với $\vec{u}$

» Câu 14. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;3;-1)$ và $B(-1;-6;2)$. Tìm giao điểm C của đường thẳng AB và trục Ox.

A. $C\left(-\frac{1}{3};0;0\right)$. **B.** $C\left(\frac{1}{3};0;0\right)$. **C.** $C(3;0;0)$. **D.** $C(-3;0;0)$.

Lời giải

Chọn A

Do C thuộc trục Ox nên $C(c;0;0)$.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-1;-9;3)$ và $\overrightarrow{AC}=(c;-3;1)$.

Vì $C=AB\cap Ox$ nên ba điểm A,B,C thẳng hàng hay $\overrightarrow{AB}$ cùng phương $\overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow \frac{c}{-1}=\frac{-3}{-9}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow c=-\frac{1}{3}$. Vậy $C\left(-\frac{1}{3};0;0\right)$.

» **Câu 15.** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;3)$ và $B(-1;4;1)$. Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AB. Tính $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{BA}$.

A. 4. **B.** 6. **C.** -4. **D.** -6.

Lời giải

Chọn B

Vì I là trung điểm AB nên $I(0;3;2)$. Suy ra $\overrightarrow{IA}=(1;-1;1)$ và $\overrightarrow{BA}=(2;-2;2)$.

Vậy $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{BA}=1.2+(-1).(-2)+1.2=6$.

B. Câu hỏi – Trả lời đúng/sai

» **Câu 16.** Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}=(2;-1;3),\vec{b}=(-1;5;2)$

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\vec{a}+\vec{b}=(-3;6;-1)$		
(b)	$\vec{a}-\vec{b}=(3;-6;1)$		
(c)	$3\vec{b}=(-3;15;6)$		
(d)	$2\vec{a}-\vec{b}=(5;-7;4)$		

Lời giải

(a) $\vec{a}+\vec{b}=(-3;6;-1)$.

$\vec{a}+\vec{b}=(2+(-1);-1+5;3+2)=(1;4;5)$

» **Chọn** SAI.

(b) $\vec{a}-\vec{b}=(3;-6;1)$.

$\vec{a}-\vec{b}=(2-(-1));-1-5;3-2)=(3;-6;1)$

» **Chọn** ĐÚNG.

(c) $3\vec{b}=(-3;15;6)$.

$3\vec{b}=(-1.3;3.5;3.2)=(-3;15;6)$

» **Chọn** ĐÚNG.

(d) $2\vec{a}-\vec{b}=(5;-7;4)$.

$2\vec{a}-\vec{b}=(2.2+1;-1.2-5;2.3-2)=(5;-7;4)$

» **Chọn** ĐÚNG.

» **Câu 17.** Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}=(2;1;0),\vec{b}=(-1;0;-2),\vec{c}=(m;-2;4)$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$-2\vec{a}+\vec{b}=(-5;-2;-2)$		
(b)	$\vec{b}\perp\vec{c}\Leftrightarrow m=8$		
(c)	$\cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{2}{5}$		
(d)	$\lvert\vec{c}\rvert=2\lvert\vec{a}\rvert\Leftrightarrow m=0$		

Lời giải

(a) $-2\vec{a}+\vec{b}=(-5;-2;-2)$.

$$-2\vec{a}+\vec{b}=(-2.2-1;-2.1;-2)=(-5;-2;-2)$$

» **Chọn** ĐÚNG.

(b) $\vec{b}\perp\vec{c}\Leftrightarrow m=8$.

$$\vec{b}\perp\vec{c}\Leftrightarrow\vec{b}.\vec{c}=0\Leftrightarrow -m-8=0\Leftrightarrow m=-8$$

» **Chọn** SAI.

(c) $\cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{2}{5}$.

$$\cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}=\frac{-2}{\sqrt{5}.\sqrt{5}}-\frac{2}{5}.$$

» **Chọn** SAI.

(d) $|\vec{c}|=2|\vec{a}|\Leftrightarrow m=0$.

$$|\vec{c}|=2|\vec{a}|\Leftrightarrow\sqrt{m^2+20}=2\sqrt{5}\Leftrightarrow m^2+20=20\Leftrightarrow m=0.$$

» **Chọn** ĐÚNG.

» **Câu 18.** Trong không gian $Oxyz$, cho ΔABC, biết $A(-1;0;3),B(4;2;0),C(3;1;-3)$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$G(2;1;0)$ là trọng tâm tam giác ABC		
(b)	$D(-2;-1;0)$ là một đỉnh của hình bình hành $ABCD$		
(c)	$M(a;b;c)$ thoả mãn $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{CB}$. Khi đó $a+b+c=-13$		
(d)	$M(a;b;c)\in Ox$ sao cho BM vuông góc với đường thẳng AC. Khi đó $4a^2+b^2+c^2=162$		

Lời giải

(a) *$G(2;1;0)$ là trọng tâm tam giác ABC.*

$$G(x;y;z)\text{ là trọng tâm tam giác } ABC\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{-1+4+3}{3}=2\\ y=\frac{0+2+1}{3}=1\\ z=\frac{3+0-3}{3}=0\end{cases}$$

» **Chọn** ĐÚNG.

(b) *$D(-2;-1;0)$ là một đỉnh của hình bình hành $ABCD$.*

$$D\text{ là một đỉnh của hình bình hành } ABCD\ \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow\begin{cases}x+1=3-4\\ y-0=1-2\\ z-3=-3-0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\\ y=-1\\ z=0\end{cases}$$

» **Chọn** ĐÚNG.

(c) *$M(a;b;c)$ thoả mãn $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{CB}$. Khi đó $a+b+c=-13$*

$\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{CB}$.

$\overrightarrow{AM}=(x+1;y;z-3)$; $\overrightarrow{CB}=(1;1;3)\Rightarrow 3\overrightarrow{CB}=(3;3;9)$

$\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{CB}\Leftrightarrow\begin{cases}x+1=3\\y=3\\z-3=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=3\\z=12\end{cases}$. Vậy $M(2;3;12)$

Suy ra $a+b+c=17$

» Chọn SAI.

(d) *$M(a;b;c)\in Ox$ sao cho BM vuông góc với đường thẳng AC. Khi đó $4a^2+b^2+c^2=162$*

$M(a;b;c)\in Ox\Rightarrow b=0;c=0$.

$\overrightarrow{BM}=(a-4;-2;0)$; $\overrightarrow{AC}=(4;1;-6)$

BM vuông góc với đường thẳng AC khi

$\overrightarrow{BM}\perp\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AC}=0\Leftrightarrow 4(a-4)-2.1=0\Leftrightarrow 4a=18\Leftrightarrow a=\dfrac{9}{2}$

$4a^2+b^2+c^2=81$

» Chọn SAI.

» Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;3)$, $B(2;5;4)$, $C(0;2;0)$.Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng ? Khẳng định nào sai ?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Khi vectơ $\vec{v}=(1;3;-2n)$ cùng phương với $\overrightarrow{AB}$ thì n có giá trị là $-\dfrac{1}{2}$		
(b)	Khi $ABCD$ là hình bình hành thì điểm $D(-1;-1;-1)$		
(c)	Với điểm $E(x;y;-2)$ để A,B,E thẳng hàng thì $x+y=-\dfrac{1}{2}$		
(d)	Điểm $M\in(Oxy)$ sao cho A,B,M thẳng hàng có toạ độ là $M(-2;7;0)$		

Lời giải

(a) *Khi vectơ $\vec{v}=(1;3;-2n)$ cùng phương với $\overrightarrow{AB}$ thì n có giá trị là $-\dfrac{1}{2}$*

Khi vectơ $\vec{v}=(1;3;-2n)$ cùng phương với $\overrightarrow{AB}$ thì n có giá trị là

Ta có: $\begin{cases}\overrightarrow{AB}=(1;3;1)\\\vec{v}=(1;3;-2n)\end{cases}$, để hai vectơ $\vec{v}$, $\overrightarrow{AB}$ cùng phương $\Leftrightarrow\dfrac{1}{1}=\dfrac{3}{3}=\dfrac{-2n}{1}\Leftrightarrow n=-\dfrac{1}{2}$

» Chọn ĐÚNG.

(b) *Khi $ABCD$ là hình bình hành thì điểm $D(-1;-1;-1)$*

Gọi $D(a;b;c)$, ta có: $\begin{cases}\overrightarrow{AB}=(1;3;1)\\\overrightarrow{DC}=(-a;2-b;-c)\end{cases}$. Để $ABCD$ là hình bình hành

$\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\Leftrightarrow\begin{cases}-a=1\\2-b=3\\-c=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\b=-1\\c=-1\end{cases}\Rightarrow D(-1;-1;-1)$

» Chọn ĐÚNG

(c) Với điểm $E(x;y;-2)$ để A,B,E thẳng hàng thì $x+y=-\frac{1}{2}$

Để B,C,E thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{BC},\overrightarrow{BE}$ cùng phương nhau, ta có: $\begin{cases}\overrightarrow{BC}=(-2;-3;-4)\\ \overrightarrow{BE}=(x-2;\,y-5;\,-6)\end{cases}$

$\Leftrightarrow \frac{x-2}{-2}=\frac{y-5}{-3}=\frac{-6}{-4}=\frac{3}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\ y=\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow x+y=-\frac{1}{2}$

» Chọn ĐÚNG.

(d) Điểm $M\in(Oxy)$ sao cho A,B,M thẳng hàng có toạ độ là $M(-2;7;0)$

Ta có $M\in(Oxy)\Rightarrow M(m;n;0)$, với $\begin{cases}\overrightarrow{AB}=(1;3;1)\\ \overrightarrow{AM}=(m-1;n-2;-3)\end{cases}$.

Để A,B,M thẳng hàng

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM}$ cùng phương $\Leftrightarrow \frac{m-1}{1}=\frac{n-2}{3}=\frac{-3}{1}\Leftrightarrow\begin{cases}m=-2\\ n=-7\end{cases}\Rightarrow M(-2;-7;0)$

» Chọn SAI

» Câu 20. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;-1;1)$, $B(-1;3;-1)$, $C(5;-3;4)$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng ? Khẳng định nào sai ?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Tích vô hướng của hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ bằng -52		
(b)	Góc $\widehat{ABC}$ là góc tù		
(c)	Côsin giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ bằng $\frac{-23}{\sqrt{638}}$		
(d)	Điểm $D(1;2;x)$ với ΔABD vuông tại B thì giá trị $x=-6$		

Lời giải

(a) Tích vô hướng của hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ bằng -52

Ta có: $\begin{cases}\overrightarrow{AB}=(-3;4;-2)\\ \overrightarrow{BC}=(6;-6;5)\end{cases}\Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=(-3).6+4.(-6)+(-2).5=-52$

» Chọn ĐÚNG.

(b) Góc $\widehat{ABC}$ là góc tù.

Ta có: $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=52>0$ nên góc $\widehat{ABC}$ là góc nhọn

» Chọn SAI

(c) Côsin giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ bằng $\frac{-23}{\sqrt{638}}$

Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{AB}=(-3;4;-2) \\ \overrightarrow{AC}=(3;-2;3) \end{cases} \Rightarrow \cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|}.$

$$\frac{-9-8-6}{\sqrt{(-3)^2+4^2+(-2)^2}.\sqrt{3^2+(-2)^2+3^2}}=\frac{-23}{\sqrt{638}}$$

» Chọn ĐÚNG

(d) Điểm $D(1;2;x)$ với ΔABD vuông tại B thì giá trị $x=-6$

Ta có: ΔABD vuông tại $B \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}=0$, với $\begin{cases} \overrightarrow{AB}=(-3;4;-2) \\ \overrightarrow{BD}=(2;-1;x+1) \end{cases}$

$\Leftrightarrow -6-4-2(x+1)=0 \Leftrightarrow x=-6$

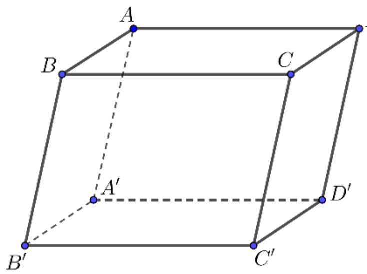
» Chọn ĐÚNG

C. Câu hỏi – Trả lời ngắn

» Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tọa độ các điểm $A(1;2;-1), C(3;-4;1), B'(2;-1;3), D'(0;3;5)$. Giả sử tọa độ điểm $A'(x;y;z)$ thì $x+y+z$ là

Lời giải

✓ *Trả lời: 7*



Theo quy tắc hình hộp, ta có: $\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{A'D'}+\overrightarrow{A'A}=\overrightarrow{A'C} \Leftrightarrow \begin{cases} (2-x)+(0-x)+(1-x)=3-x \\ (-1-y)+(3-y)+(2-y)=-4-y \\ (3-z)+(5-z)+(-1-z)=1-z \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=4. \\ z=3 \end{cases}$

Suy ra $x+y+z=0+4+3=7$.

» Câu 22. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $B(1;2;-3)$ và $C(7;4;-2)$. Gọi $E(x;y;z)$ là điểm thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{CE}=2\overrightarrow{EB}$ khi đó $x+y+z$ bằng

Lời giải

✓ *Trả lời: 3*

Giả sử điểm cần tìm có tọa độ $E(x;y;z)$, khi đó $\overrightarrow{CE}=(x-7;y-4;z+2)$ và $\overrightarrow{EB}=(1-x;2-y;-3-z)$.

Theo giả thiết ta có $\overrightarrow{CE}=2\overrightarrow{EB}$ nên ta có hệ phương trình $\begin{cases} x-7=2-2x \\ y-4=4-2y \\ z+2=-6-2z \end{cases}$.

Giải hệ phương trình ta thu được nghiệm là $(x;y;z)=\left(3;\frac{8}{3};-\frac{8}{3}\right)$.

Vậy điểm E có tọa độ là $E\left(3;\frac{8}{3};-\frac{8}{3}\right)$. Suy ra $x+y+z=3+\frac{8}{3}-\frac{8}{3}=3$.

» Câu 23. Trong không gian $Oxyz$ cho 3 điểm $A(2;0;0),B(0;3;1),C(-3;6;4)$. Gọi M là điểm nằm trên đoạn BC sao cho $MC=2MB$. Tính độ dài đoạn AM (Kết quả được làm tròn ở chữ số thập phân thứ nhất)

Lời giải

✓ Trả lời: 5,4

Gọi tọa độ điểm $M(a;b;c)$, do M thuộc đoạn BC và $MC=2MB \Rightarrow \overrightarrow{CM}=2\overrightarrow{MB}$ $(*)$.

Ta có $\overrightarrow{CM}=(a+3;b-6;c-4)$ và $\overrightarrow{MB}=(-a;3-b;1-c)$.

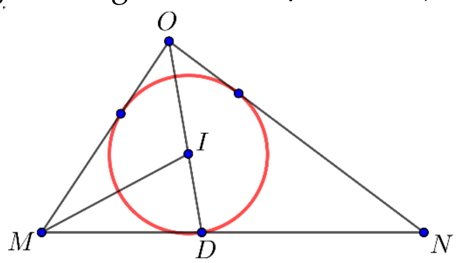
Do đó $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} a+3=-2a \\ b-6=6-2b \\ c-4=2-2c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=4 \\ c=2 \end{cases} \Rightarrow M(-1;4;2) \Rightarrow \overrightarrow{AM}=(-3;4;2) \Rightarrow AM=\sqrt{29}\approx 5,4$.

» Câu 24. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(2;2;1),N\left(-\frac{8}{3};\frac{4}{3};\frac{8}{3}\right),E(2;2;3)$. Gọi $I(a,b,c)$ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác OMN. Tính độ dài IE.

Lời giải

✓ Trả lời: 3

Gọi D là chân đường phân giác trong kẻ từ O. Đặt $OM=c,ON=b,MB=a$.



$\overrightarrow{MD}=\frac{c}{b}\overrightarrow{DN} \Leftrightarrow b.\overrightarrow{MD}+c.\overrightarrow{ND}=\vec{0}$ (1)

$\overrightarrow{IO}=\frac{OM}{MD}\overrightarrow{DI}=\frac{c}{\frac{ac}{b+c}}\overrightarrow{DI}=\frac{b+c}{a}\overrightarrow{DI} \Leftrightarrow a.\overrightarrow{IO}+(b+c).\overrightarrow{ID}=\vec{0}$.

$\Leftrightarrow a.\overrightarrow{IO}+b\overrightarrow{ID}+c.\overrightarrow{ID}=\vec{0} \Leftrightarrow a.\overrightarrow{IO}+b\overrightarrow{IM}+b.\overrightarrow{MD}+c.\overrightarrow{IN}+c.\overrightarrow{ND}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow a.\overrightarrow{IO}+b.\overrightarrow{IM}+c.\overrightarrow{IN}+\underbrace{b.\overrightarrow{MD}+c.\overrightarrow{ND}}_{\vec{0}}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow a.\overrightarrow{IO}+b.\overrightarrow{IM}+c.\overrightarrow{IN}=\vec{0}$

Áp dụng công thức trong tam giác OMN, ta được $OM.\overrightarrow{IN}+ON.\overrightarrow{IM}+MN.\overrightarrow{IO}=\vec{0}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_I = \dfrac{OM.x_N + ON.x_M + MN.x_O}{OM + ON + MN} = 0. \\ y_I = \dfrac{OM.y_N + ON.y_M + MN.y_O}{OM + ON + MN} = 1. \\ z_I = \dfrac{OM.z_N + ON.z_M + MN.z_O}{OM + ON + MN} = 1. \end{cases}$$

Vậy điểm $I(0;1;1) \Rightarrow \overrightarrow{IE} = (2;1;2) \Rightarrow IE = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = 3$.

» Câu 25. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2;3;1)$ và $B(5;6;2)$. Đường thẳng AB cắt mặt phẳng (Oxz) tại điểm M. Tính tỉ số $\dfrac{AM}{BM}$

Lời giải

✓ ***Trả lời: 0,5***

$M \in (Oxz) \Rightarrow M(x;0;z); \overrightarrow{AB} = (7;3;1) \Rightarrow AB = \sqrt{59}; \overrightarrow{AM} = (x+2;-3;z-1)$ và A, B, M thẳng hàng $\Rightarrow \overrightarrow{AM} = k.\overrightarrow{AB} (k \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 = 7k \\ -3 = 3k \\ z-1 = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -9 \\ -1 = k \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow M(-9;0;0)$.

$\overrightarrow{BM} = (-14;-6;-2); \overrightarrow{AM} = (-7;-3;-1)$

$\Rightarrow BM = 2\sqrt{59} \Rightarrow \dfrac{AB}{BM} = \dfrac{1}{2} = 0,5$

» Câu 26. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vecto $\vec{u} = (1;1;-2)$ và $\vec{v} = (1;0;m)$. Gọi S là tập hợp các giá trị m để hai vecto $\vec{u}$ và $\vec{v}$ tạo với nhau một góc $45°$. Số phần tử của S là bao nhiêu?

Lời giải

✓ ***Trả lời: 1***

$$\cos(\vec{u};\vec{v}) = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|} = \frac{1.1 + 1.0 - 2.m}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2}.\sqrt{1^2 + 0 + m^2}} = \frac{1-2m}{\sqrt{6(1+m^2)}}.$$

Mà giả thiết cho: $\cos(\vec{u};\vec{v}) = \cos 45° \Leftrightarrow \dfrac{1-2m}{\sqrt{6(1+m^2)}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sqrt{3(1+m^2)} = 1-2m$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-2m \ge 0 \\ 3(1+m^2) = (1-2m)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \le \dfrac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} m = 2+\sqrt{6} \\ m = 2-\sqrt{6} \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow m = 2-\sqrt{6}.$$

Vậy có 1 giá trị m thỏa mãn.