

Họ và tên : .....Lớp: ..... SBD: .....

**Câu 1. (3,0 điểm)**

Cho hàm số  $y = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \frac{3}{2}$ .

- 1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị ( $C$ ) của hàm số đã cho.
- 2) Viết phương trình tiếp tuyến  $d$  của đồ thị ( $C$ ) tại điểm có hoành độ  $x_0 = 1$ . Tìm tọa độ giao điểm của  $d$  và đồ thị ( $C$ ).

**Câu 2. (1,0 điểm)**

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$f(x) = \cos x + \frac{4}{3}\sin^3 x \text{ trên đoạn } \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

**Câu 3. (3,0 điểm)**

- 1) Giải phương trình  $2 \cdot 25^x - 7 \cdot 10^x + 5 \cdot 4^x = 0$ .
- 2) Giải bất phương trình  $\log x + \log e \cdot \ln(x + 3) < 1$ .
- 3) Cho hàm số  $f(x) = -\frac{x^2}{2} + xe^{-x} + \ln x$ . Tìm tập xác định của hàm số  $f(x)$  và giải bất phương trình  $f'(x) > 0$ .

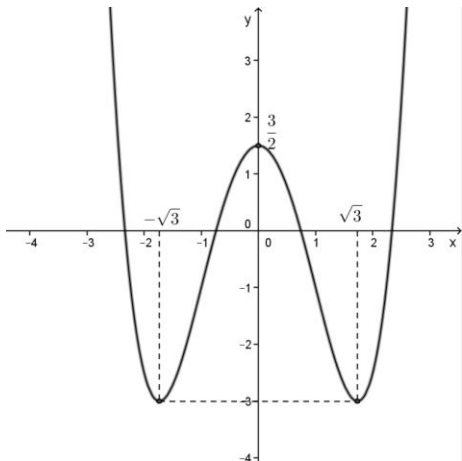
**Câu 4. (3,0 điểm)**

Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông cạnh  $a$ , cạnh bên  $SA$  vuông góc với đáy, góc giữa đường thẳng  $SC$  và mặt đáy bằng  $60^\circ$ .

- 1) Tính theo  $a$  thể tích khối chóp  $S.ABCD$ .
- 2) Tính theo  $a$  khoảng cách giữa hai đường thẳng  $SC$  và  $AB$ .
- 3) Tính theo  $a$  diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp  $S.ABCD$ .

-----HẾT-----

**ĐÁP ÁN VÀ THANG ĐIỂM**

CÂU	ĐÁP ÁN	ĐIỂM																								
<b>Câu 1</b> (3 điểm)	<b>1. (2 điểm)</b> $y = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \frac{3}{2}$																									
	<b>a) Tập xác định</b> $D = \mathbb{R}$	0,25																								
	<b>b) Sự biến thiên</b> +) Đạo hàm: $y' = 2x^3 - 6x$ ; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$	0,25																								
	+) Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$ ; $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$ .	0,25																								
	+) Bảng biến thiên <table style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"><math>x</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>-\infty</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>-\sqrt{3}</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>0</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>\sqrt{3}</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>+\infty</math></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"><math>y'</math></td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">-</td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">0</td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">+</td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">0</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"><math>y</math></td> <td style="padding: 5px; text-align: center;"><math>+\infty</math></td> <td style="padding: 5px; text-align: center;"><math>\searrow</math></td> <td style="padding: 5px; text-align: center;"><math>\nearrow</math></td> <td style="padding: 5px; text-align: center;"><math>\searrow</math></td> <td style="padding: 5px; text-align: center;"><math>\nearrow</math></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px; text-align: center;"><math>-3</math></td> <td style="padding: 5px; text-align: center;"><math>\frac{3}{2}</math></td> <td style="padding: 5px; text-align: center;"><math>-3</math></td> <td style="padding: 5px; text-align: center;"><math>+\infty</math></td> </tr> </table>	$x$	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	$0$	$\sqrt{3}$	$+\infty$	$y'$		-	0	+	0	$y$	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$			$-3$	$\frac{3}{2}$	$-3$	$+\infty$	0,25
	$x$	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	$0$	$\sqrt{3}$	$+\infty$																				
	$y'$		-	0	+	0																				
	$y$	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$																				
		$-3$	$\frac{3}{2}$	$-3$	$+\infty$																					
+) Chiều biến thiên: Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\sqrt{3}; 0)$ và $(\sqrt{3}; +\infty)$ ; nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -\sqrt{3})$ và $(0; \sqrt{3})$ .	0,25																									
+) Cực trị: Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ ; $y(0) = \frac{3}{2}$ . Hàm số đạt cực tiểu tại $x = \pm\sqrt{3}$ ; $y(\pm\sqrt{3}) = -3$ .	0,25																									
<b>c) Đồ thị</b> 	0,50																									

	<b>2. (1 điểm)</b>	
	Khi $x_0 = 1$ thì $y(x_0) = -1$ và $y'(x_0) = -4$ .	0,25
	Phương trình tiếp tuyến $d$ của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$ là $y = -4(x - 1) - 1$ hay $y = -4x + 3$ .	0,25
	Hoành độ giao điểm của $d$ và (C) là nghiệm của pt: $\frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \frac{3}{2} = -4x + 3$ $\Leftrightarrow x^4 - 6x^2 + 8x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2(x^2 + 2x - 3) = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$	0,25
	Suy ra tọa độ các giao điểm của $d$ và (C) là: $(1; -1)$ , $(-3; 15)$ .	0,25
	$f(x) = \cos x + \frac{4}{3} \sin^3 x$ trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ .	
	Ta có $f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ ; $f'(x) = -\sin x + 4 \sin^2 x \cos x$ .	0,25
	Với $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ , $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x \cdot (-1 + 2 \sin 2x) = 0$ $\Leftrightarrow \sin 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{12}; \frac{5\pi}{12}\right\}$ .	0,25
<b>Câu 2</b> (1 điểm)	Ta có $f(0) = 1$ , $f\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{3\sqrt{6} - \sqrt{2}}{6}$ , $f\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{3\sqrt{6} + \sqrt{2}}{6}$ ; $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{3}$ .	0,25
	Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ lần lượt là $\frac{3\sqrt{6} + \sqrt{2}}{6}$ và $\frac{3\sqrt{6} - \sqrt{2}}{6}$ .	0,25

<b>Câu 3 (3 điểm)</b>	<b>1) Giải phương trình <math>2.25^x - 7.10^x + 5.4^x = 0</math>.</b>	
	+) Ta có, $2.25^x - 7.10^x + 5.4^x = 0$ $\Leftrightarrow 2.\left(\frac{5}{2}\right)^{2x} - 7.\left(\frac{5}{2}\right)^x + 5 = 0 \quad (1).$	0,25
	+) Đặt $t = \left(\frac{5}{2}\right)^x$ , phương trình (1) trở thành $2t^2 - 7t + 5 = 0$ (2). Ta có, (2) $\Leftrightarrow t = 1$ hoặc $t = \frac{5}{2}$ .	0,25
	+) Với $t = 1$ , ta được $\left(\frac{5}{2}\right)^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$ .	0,25
	+) Với $t = \frac{5}{2}$ , ta được $\left(\frac{5}{2}\right)^x = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x = 1$ . Các nghiệm của phương trình đã cho là $x = 0$ và $x = 1$ .	0,25
	<b>2) (1 điểm) Giải bất phương trình <math>\log x + \log e.\ln(x + 3) &lt; 1</math>.</b>	
	+) ĐK: $x > 0$ (*). Ta có $\log x + \log e.\ln(x + 3) < 1 \Leftrightarrow \log x + \log(x + 3) < 1$	0,25
	$\Leftrightarrow \log[x(x + 3)] < 1 \Leftrightarrow x(x + 3) < 10$	0,25
	$\Leftrightarrow x^2 + 3x - 10 < 0 \Leftrightarrow -5 < x < 2$ .	0,25
	Kết hợp với (*), ta được tập nghiệm bất phương trình đã cho là $(0; 2)$ .	0,25
	<b>3) (1,0 điểm) Cho <math>f(x) = -\frac{x^2}{2} + xe^{-x} + \ln x \dots</math></b>	
	+) Tập xác định của hàm số $f(x)$ là $D = (0; +\infty)$ .	0,25
Ta có: $f'(x) = \frac{1}{x} - x + (1 - x)e^{-x}$ ( $x > 0$ ).	0,25	
Ta có: $f'(x) > 0 \Leftrightarrow (1 - x)\left(\frac{1 + x}{x} + e^{-x}\right) > 0$	0,25	

	<p>+) Với <math>x &gt; 0</math> thì <math>\frac{1+x}{x} + e^{-x} &gt; 0</math></p> <p>và <math>(1-x)\left(\frac{1+x}{x} + e^{-x}\right) &gt; 0 \Leftrightarrow 1-x &gt; 0 \Leftrightarrow x &lt; 1</math>.</p> <p>Suy ra tập nghiệm cần tìm là <math>(0;1)</math>.</p>	0,25
<p><b>Câu 4</b> <b>(1 điểm)</b></p>	<p><b>1) (1 điểm)</b> Tính theo <math>a</math> thể tích khối chóp <math>S.ABCD</math>.</p> <div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <div data-bbox="352 801 879 1223" style="width: 45%;"> </div> <div data-bbox="922 786 1342 981" style="width: 50%;"> <p>Vì <math>SA \perp (ABCD)</math> nên <math>AC</math> là hình chiếu của <math>SC</math> trên mặt phẳng <math>(ABCD)</math> và</p> <p><math>\angle SCA = \angle (SC, (ABCD)) = 60^\circ</math> ;</p> </div> </div> <hr/> <div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <div data-bbox="922 1025 1374 1122" style="width: 50%;"> <p><math>ABCD</math> là hình vuông cạnh <math>a</math> nên <math>AC = a\sqrt{2}</math> và <math>S_{ABCD} = a^2</math></p> </div> <div data-bbox="1417 1055 1485 1093" style="width: 45%;">0,25</div> </div> <hr/> <div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <div data-bbox="922 1160 1374 1249" style="width: 50%;"> <p>Tam giác <math>SAC</math> vuông tại <math>A</math> nên <math>SA = AC \tan \angle SCA = a\sqrt{6}</math></p> </div> <div data-bbox="1417 1182 1485 1220" style="width: 45%;">0,25</div> </div> <hr/> <div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <div data-bbox="347 1294 938 1384" style="width: 50%;"> <math display="block">V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot a\sqrt{6} \cdot a^2 = \frac{a^3\sqrt{6}}{3}</math> </div> <div data-bbox="1417 1317 1485 1355" style="width: 45%;">0,25</div> </div> <hr/> <p><b>2) (1 điểm)</b> Tính theo <math>a</math> khoảng cách giữa hai đường thẳng <math>SC</math> và <math>AB</math>.</p> <div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <div data-bbox="347 1480 1177 1525" style="width: 80%;"> <p>Ta có : <math>AB \parallel CD \Rightarrow AB \parallel (SCD) \Rightarrow d(AB, SC) = d(A, (SCD))</math></p> </div> <div data-bbox="1417 1480 1485 1518" style="width: 15%;">0,25</div> </div> <hr/> <div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <div data-bbox="347 1570 1150 1659" style="width: 80%;"> <p><b>Cách 1.</b> Ta có: <math>V_{ASCD} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ACD} = \frac{1}{3} \cdot a\sqrt{6} \cdot \frac{a^2}{2} = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}</math> ;</p> </div> <div data-bbox="1417 1592 1485 1630" style="width: 15%;">0,25</div> </div> <hr/> <div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <div data-bbox="347 1697 1198 1816" style="width: 80%;"> <p>Tam giác <math>SAC</math> vuông tại <math>A</math>, có <math>SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = 2a\sqrt{2}</math> ;</p> <p>Tam giác <math>SAD</math> vuông tại <math>A</math>, có <math>SD = \sqrt{SA^2 + AD^2} = a\sqrt{7}</math> .</p> </div> <div data-bbox="1417 1839 1485 1877" style="width: 15%;">0,25</div> </div> <hr/> <div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <div data-bbox="347 1839 1374 1928" style="width: 80%;"> <p>Xét tam giác <math>SCD</math> có nửa chu vi <math>p = \frac{2\sqrt{2} + \sqrt{7} + 1}{2} a</math>, áp dụng công thức</p> </div> </div> <hr/> <div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <div data-bbox="347 1928 831 2018" style="width: 80%;"> <p>Heron, ta tính được <math>S_{SCD} = \frac{\sqrt{7}}{2} a^2</math> .</p> </div> </div>	

	$d(A, (SCD)) = \frac{3V_{ASCD}}{S_{SCD}} = \frac{3 \frac{a^3 \sqrt{6}}{6}}{\frac{\sqrt{7}}{2} a^2} = \frac{a\sqrt{42}}{7}.$ <p>Vậy, <math>d(AB, SC) = d(A, (SCD)) = \frac{a\sqrt{42}}{7}.</math></p>	0,25
	<p><b>Cách 2.</b> Gọi <math>H</math> là hình chiếu của <math>A</math> trên <math>SD</math>. Ta có: <math>SA \perp CD</math> (do <math>SA \perp (ABCD)</math>) và <math>AB \perp CD</math> (do <math>ABCD</math> là hình vuông), suy ra <math>CD \perp (SAD)</math>. Từ đó, <math>CD \perp AH</math>. Lại vì <math>SD \perp AH</math>, nên <math>AH \perp (SCD)</math>. Vậy <math>d(A, (SCD)) = AH</math>.</p>	0,50
	<p>Tam giác <math>SAD</math> vuông tại <math>A</math> và có <math>AH</math> là đường cao nên</p> $AH = \frac{AS \cdot AD}{\sqrt{AS^2 + AD^2}} = \frac{a\sqrt{6} \cdot a}{\sqrt{(a\sqrt{6})^2 + a^2}} = \frac{a\sqrt{42}}{7}.$ <p>Vậy, <math>d(AB, SC) = d(A, (SCD)) = AH = \frac{a\sqrt{42}}{7}.</math></p>	0,25
	<p><b>3) (1 điểm)</b> Tính theo <math>a</math> diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp <math>S.ABCD</math>.</p>	
	<p>Ta có: <math>SA \perp CD</math> (do <math>SA \perp (ABCD)</math>) và <math>AB \perp CD</math> (do <math>ABCD</math> là hình vuông), suy ra <math>CD \perp (SAD)</math>. Từ đó, <math>CD \perp SD</math>. Tương tự, <math>CB \perp SB</math>. Ta cũng có, <math>SA \perp AC</math> (do <math>SA \perp (ABCD)</math>).</p>	0,25
	<p>Các điểm <math>A, B, D</math> nhìn đoạn <math>SC</math> dưới một góc vuông. Nếu gọi <math>O</math> là trung điểm <math>SC</math> thì <math>OB = OA = OD = OS = OC = \frac{SC}{2}</math>. Suy ra, mặt cầu ngoại tiếp hình chóp <math>S.ABCD</math> có tâm là <math>O</math></p>	0,25
	<p>và bán kính <math>r = \frac{1}{2} SC = \frac{1}{2} \sqrt{SA^2 + AC^2} = a\sqrt{2}</math>.</p>	0,25
	<p>Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp <math>S.ABCD</math> là</p> $S = 4\pi r^2 = 4\pi (a\sqrt{2})^2 = 8\pi a^2.$	0,25

-----HẾT-----