

Họ tên : Số báo danh :

I. Phần trắc nghiệm (7 điểm):

Câu 1: Hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên khoảng K nếu

- A. $f'(x) = -F(x), \forall x \in K$.
B. $f'(x) = F(x), \forall x \in K$.
C. $F'(x) = -f(x), \forall x \in K$.
D. $F'(x) = f(x), \forall x \in K$.

Câu 2: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$. Tọa độ của vector \vec{a} là

- A. $(-1; 2; -3)$.
B. $(-3; 2; -1)$.
C. $(2; -1; -3)$.
D. $(2; -3; -1)$.

Câu 3: Biết $F(x) = x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên \mathbb{R} . Giá trị của $\int_1^3 [1 + f(x)] dx$ bằng

- A. 10.
B. 8.
C. $\frac{26}{3}$.
D. $\frac{32}{3}$.

Câu 4: Cho $\int_{-2}^2 f(x) dx = 1, \int_{-2}^4 f(x) dx = -4$. Tính $I = \int_2^4 f(x) dx$.

- A. $I = 5$.
B. $I = -5$.
C. $I = -3$.
D. $I = 3$.

Câu 5: Cho f là hàm số liên tục trên $[1; 2]$. Biết F là nguyên hàm của f trên $[1; 2]$ thỏa

$F(1) = -2$ và $F(2) = 4$. Khi đó $\int_1^2 f(x) dx$ bằng.

- A. 2.
B. -6.
C. 6.
D. -2.

Câu 6: Nếu $\int_2^5 f(x) dx = 2$ thì $\int_2^5 3f(x) dx$ bằng

- A. 18.
B. 6.
C. 3.
D. 2.

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -2; -1), B(1; 4; 3)$. Độ dài đoạn thẳng AB là

- A. $\sqrt{6}$.
B. $2\sqrt{13}$.
C. 3.
D. $2\sqrt{3}$.

Câu 8: Nếu $\int_{-1}^2 f(x) dx = 2$ và $\int_2^5 f(x) dx = -5$ thì $\int_{-1}^5 f(x) dx$ bằng

- A. 4.
B. -3.
C. -7.
D. 7.

Câu 9: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[-1; 2]$ thỏa mãn $f(-1) = 3, f(2) = -1$. Giá trị của tích phân $\int_{-1}^2 f'(x) dx$ bằng

- A. 2.
B. -2.
C. -4.
D. 4.

Câu 10: Biết $\int_1^2 f(x) dx = 3$ và $\int_1^2 g(x) dx = 2$. Khi đó, $\int_1^2 [f(x) - g(x)] dx$ bằng?

- A. 5.
B. -1.
C. 1.
D. 6.

Câu 11: Hàm số $F(x) = 2 \sin x - 3 \cos x$ là một nguyên hàm của hàm số

A. $f(x) = -2 \cos x - 3 \sin x$.

B. $f(x) = -2 \cos x + 3 \sin x$.

C. $f(x) = 2 \cos x + 3 \sin x$.

D. $f(x) = 2 \cos x - 3 \sin x$.

Câu 12: Cho tích phân $I = \int_0^1 x(1-x)^5 dx$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $I = -\int_{-1}^0 t^5(1-t) dt$.

B. $I = -\int_{-1}^0 (t^6 - t^5) dt$.

C. $I = \int_0^1 t^5(1-t) dt$.

D. $I = -\int_{-1}^0 (t^6 - t^5) dt$.

Câu 13: Trong không gian $Oxyz$ cho $\vec{a} = (2; 3; 2)$ và $\vec{b} = (1; 1; -1)$. Vector $\vec{a} - \vec{b}$ có tọa độ là

A. $(1; 2; 3)$.

B. $(3; 5; 1)$.

C. $(-1; -2; 3)$.

D. $(3; 4; 1)$.

Câu 14: Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin 5x$ là

A. $\frac{1}{5} \cos 5x + C$.

B. $-\cos 5x + C$.

C. $\cos 5x + C$.

D. $-\frac{1}{5} \cos 5x + C$.

Câu 15: Cho hàm số $f(x) = x^2$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x) dx = \frac{1}{3} x^3 + C$.

B. $\int f(x) dx = 3x^3 + C$

C. $\int f(x) dx = 2x + C$.

D. $\int f(x) dx = x^3 + C$.

Câu 16: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 6$. Đường kính của (S) bằng

A. $\sqrt{6}$.

B. $2\sqrt{6}$.

C. 12.

D. 3.

Câu 17: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y+4)^2 + (z-1)^2 = 9$. Tâm của (S) có tọa độ là

A. $(-2; -4; -1)$.

B. $(2; 4; 1)$.

C. $(-2; 4; -1)$.

D. $(2; -4; 1)$.

Câu 18: Cho hàm số $f(x) = e^x + 2x$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x) dx = e^x + 2x^2 + C$.

B. $\int f(x) dx = e^x + x^2 + C$.

C. $\int f(x) dx = e^x - x^2 + C$.

D. $\int f(x) dx = e^x + C$.

Câu 19: Nguyên hàm của hàm số $y = e^{2x-1}$ là

A. $\frac{1}{2} e^x + C$.

B. $e^{2x-1} + C$.

C. $2e^{2x-1} + C$.

D. $\frac{1}{2} e^{2x-1} + C$.

Câu 20: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 1; -2)$ và $B(2; 2; 1)$. Vector \overrightarrow{AB} có tọa độ là

A. $(3; 3; -1)$.

B. $(1; 1; 3)$.

C. $(3; 1; 1)$.

D. $(-1; -1; -3)$.

Câu 21: Cho hàm số $f(x) = xe^x$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x) dx = e^x + C$.

B. $\int f(x) dx = e^x(x+1) + C$.

C. $\int f(x) dx = e^x(x-1) + C$.

D. $\int f(x) dx = xe^x + C$.

Câu 22: Tích phân $\int_0^1 x^{2024} dx$ bằng

A. 1.

B. $\frac{1}{2024}$.

C. $\frac{1}{2025}$.

D. 0.

Câu 23: Cho $\int_0^4 f(x)dx = 1$. Khi đó, $\int_0^2 f(2x)dx$ bằng

- A. $\frac{1}{2}$. B. 4. C. 2. D. $\frac{1}{4}$.

Câu 24: Biết $f(x)$ là hàm liên tục trên \mathbb{R} và $\int_0^9 f(x)dx = 9$. Khi đó giá trị của $\int_1^4 f(3x-3)dx$ là

- A. 0. B. 27. C. 3. D. 24.

Câu 25: Nếu $\int_0^1 [f(x)+2x]dx = 2$ thì $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

- A. 1. B. 2. C. 4. D. 0.

Câu 26: Cho 2 hàm số $u = u(x)$ và $v = v(x)$ có đạo hàm liên tục trên khoảng K . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\int u(x)v'(x)dx = u'(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$. B. $\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$.
C. $\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u(x)v(x)dx$. D. $\int u(x)v'(x)dx = u(x)v'(x) - \int u'(x)v(x)dx$.

Câu 27: Cho biết hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$ và có một nguyên hàm là $F(x)$. Tìm

$$I = \int [2f(x) + f'(x) + 1]dx ?$$

- A. $I = 2F(x) + f(x) + x + C$. B. $I = 2F(x) + xf'(x) + C$.
C. $I = 2xF(x) + x + 1$. D. $I = 2xF(x) + f(x) + x + C$.

Câu 28: Cho tích phân $I = \int_1^e \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx$. Đổi biến $t = \sqrt{1+\ln x}$ ta được kết quả nào sau đây?

- A. $I = 2 \int_1^{\sqrt{2}} t^2 dt$. B. $I = 2 \int_1^2 t^2 dt$. C. $I = 2 \int_1^{\sqrt{2}} t dt$. D. $I = \int_1^{\sqrt{2}} t^2 dt$.

Câu 29: Cho $\int_0^1 f(x)dx = 2$ và $\int_0^1 g(x)dx = 5$. Khi đó, $\int_0^1 [f(x) - 2g(x)]dx$ bằng

- A. -3. B. -8. C. 12. D. 1.

Câu 30: Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1;2;1), B(3;-1;1)$ và $C(1;1;1)$. Tính diện tích tam giác ABC .

- A. $S = \sqrt{3}$. B. $S = \frac{1}{2}$. C. $S = \sqrt{2}$. D. $S = 1$.

Câu 31: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-3;5), B(0;1;-1)$. Phương trình mặt cầu đường kính AB là

- A. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2 = 14$. B. $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 56$.
C. $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 14$. D. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2 = 14$.

Câu 32: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-4;3)$ và $B(2;2;7)$. Trung điểm của đoạn thẳng AB có tọa độ là

- A. $(4;-2;10)$. B. $(2;6;4)$. C. $(1;3;2)$. D. $(2;-1;5)$.

Câu 33: Nếu $\int_0^4 f(x)dx = 37$ thì $\int_0^4 [2f(x) - 3x^2]dx$ bằng

- A. 12. B. 10. C. -27. D. 18.

Câu 34: Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu có tâm $I(1;1;1)$ và diện tích bằng 4π có phương trình là

A. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 1.$

B. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 4.$

C. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1.$

D. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 4.$

Câu 35: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Tính $I = F(e) - F(1)$

A. $I = \frac{1}{e}.$

B. $I = e.$

C. $I = \frac{1}{2}.$

D. $I = 1.$

II. Phần tự luận (3 điểm):

Câu 1 (1 điểm): Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{2x}$ và $F(0) = 0$. Tính giá trị của $F(\ln 3)$.

Câu 2 (1 điểm): Trong không gian $Oxyz$, cho 3 điểm $A(4;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;-2)$. Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$.

Câu 3 (0,5 điểm): Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương trên $(0; +\infty)$, có đạo hàm trên khoảng đó và thỏa mãn $f(x) \ln f(x) = x(f(x) - f'(x))$, $\forall x \in (0; +\infty)$. Biết $f(1) = f(3)$. Tính $f(2)$.

Câu 4 (0,5 điểm): Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp 3 trên \mathbb{R} và thỏa mãn $f(1-x) = x[2024 - xf''(x)]$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Tính tích phân $\int_0^1 xf'(x)dx$.

----- **HẾT** -----

Họ tên : Số báo danh :

I. Phần trắc nghiệm (7 điểm):

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[-1; 2]$ thỏa mãn $f(-1) = 3$, $f(2) = -1$. Giá trị của tích phân $\int_{-1}^2 f'(x) dx$ bằng

- A. 4. B. -4. C. 2. D. -2.

Câu 2: Cho $\int_{-2}^2 f(x) dx = 1$, $\int_{-2}^4 f(x) dx = -4$. Tính $I = \int_2^4 f(x) dx$.

- A. $I = 5$. B. $I = -5$. C. $I = -3$. D. $I = 3$.

Câu 3: Biết $\int_1^2 f(x) dx = 3$ và $\int_1^2 g(x) dx = 2$. Khi đó, $\int_1^2 [f(x) - g(x)] dx$ bằng?

- A. 1. B. 6. C. -1. D. 5.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 1; -2)$ và $B(2; 2; 1)$. Vector \overline{AB} có tọa độ là

- A. $(3; 3; -1)$. B. $(3; 1; 1)$. C. $(-1; -1; -3)$. D. $(1; 1; 3)$.

Câu 5: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$. Tọa độ của vector \vec{a} là

- A. $(-1; 2; -3)$. B. $(2; -3; -1)$. C. $(2; -1; -3)$. D. $(-3; 2; -1)$.

Câu 6: Hàm số $F(x) = 2 \sin x - 3 \cos x$ là một nguyên hàm của hàm số

- A. $f(x) = -2 \cos x - 3 \sin x$. B. $f(x) = 2 \cos x - 3 \sin x$.
C. $f(x) = 2 \cos x + 3 \sin x$. D. $f(x) = -2 \cos x + 3 \sin x$.

Câu 7: Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin 5x$ là

- A. $-\frac{1}{5} \cos 5x + C$. B. $-\cos 5x + C$. C. $\frac{1}{5} \cos 5x + C$. D. $\cos 5x + C$.

Câu 8: Cho f là hàm số liên tục trên $[1; 2]$. Biết F là nguyên hàm của f trên $[1; 2]$ thỏa

$F(1) = -2$ và $F(2) = 4$. Khi đó $\int_1^2 f(x) dx$ bằng.

- A. 2. B. 6. C. -2. D. -6.

Câu 9: Hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên khoảng K nếu

- A. $f'(x) = F(x), \forall x \in K$. B. $F'(x) = f(x), \forall x \in K$.
C. $f'(x) = -F(x), \forall x \in K$. D. $F'(x) = -f(x), \forall x \in K$.

Câu 10: Nếu $\int_2^5 f(x) dx = 2$ thì $\int_2^5 3f(x) dx$ bằng

- A. 2. B. 3. C. 6. D. 18.

Câu 11: Nguyên hàm của hàm số $y = e^{2x-1}$ là

- A. $\frac{1}{2} e^x + C$. B. $e^{2x-1} + C$. C. $\frac{1}{2} e^{2x-1} + C$. D. $2e^{2x-1} + C$.

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y+4)^2 + (z-1)^2 = 9$. Tâm của (S) có tọa độ là

- A. $(2; -4; 1)$. B. $(-2; -4; -1)$. C. $(2; 4; 1)$. D. $(-2; 4; -1)$.

Câu 13: Nếu $\int_{-1}^2 f(x) dx = 2$ và $\int_2^5 f(x) dx = -5$ thì $\int_{-1}^5 f(x) dx$ bằng

- A. -3 . B. 4 . C. 7 . D. -7 .

Câu 14: Trong không gian $Oxyz$ cho $\vec{a} = (2; 3; 2)$ và $\vec{b} = (1; 1; -1)$. Vectơ $\vec{a} - \vec{b}$ có tọa độ là

- A. $(-1; -2; 3)$. B. $(1; 2; 3)$. C. $(3; 5; 1)$. D. $(3; 4; 1)$.

Câu 15: Cho hàm số $f(x) = e^x + 2x$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. $\int f(x) dx = e^x + x^2 + C$. B. $\int f(x) dx = e^x + C$.
C. $\int f(x) dx = e^x + 2x^2 + C$. D. $\int f(x) dx = e^x - x^2 + C$.

Câu 16: Cho hàm số $f(x) = x^2$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. $\int f(x) dx = x^3 + C$. B. $\int f(x) dx = 2x + C$.
C. $\int f(x) dx = \frac{1}{3}x^3 + C$. D. $\int f(x) dx = 3x^3 + C$

Câu 17: Cho tích phân $I = \int_0^1 x(1-x)^5 dx$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $I = -\int_{-1}^0 t^5(1-t) dt$. B. $I = -\int_{-1}^0 (t^6 - t^5) dt$.
C. $I = \int_0^1 t^5(1-t) dt$. D. $I = -\int_{-1}^0 (t^6 - t^5) dt$.

Câu 18: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -2; -1)$, $B(1; 4; 3)$. Độ dài đoạn thẳng AB là

- A. $\sqrt{6}$. B. $2\sqrt{13}$. C. $2\sqrt{3}$. D. 3 .

Câu 19: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 6$. Đường kính của (S) bằng

- A. $2\sqrt{6}$. B. 3 . C. 12 . D. $\sqrt{6}$.

Câu 20: Biết $F(x) = x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên \mathbb{R} . Giá trị của $\int_1^3 [1 + f(x)] dx$ bằng

- A. $\frac{32}{3}$. B. 8 . C. 10 . D. $\frac{26}{3}$.

Câu 21: Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1; 2; 1)$, $B(3; -1; 1)$ và $C(1; 1; 1)$. Tính diện tích tam giác ABC .

- A. $S = 1$. B. $S = \sqrt{2}$. C. $S = \frac{1}{2}$. D. $S = \sqrt{3}$.

Câu 22: Cho hàm số $f(x) = xe^x$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. $\int f(x) dx = e^x(x+1) + C$. B. $\int f(x) dx = xe^x + C$.
C. $\int f(x) dx = e^x + C$. D. $\int f(x) dx = e^x(x-1) + C$.

Câu 23: Tích phân $\int_0^1 x^{2024} dx$ bằng

- A. 1. B. $\frac{1}{2024}$. C. $\frac{1}{2025}$. D. 0.

Câu 24: Cho 2 hàm số $u = u(x)$ và $v = v(x)$ có đạo hàm liên tục trên khoảng K . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\int u(x)v'(x)dx = u(x)v'(x) - \int u'(x)v(x)dx$. B. $\int u(x)v'(x)dx = u'(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$.
C. $\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$. D. $\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u(x)v(x)dx$.

Câu 25: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Tính $I = F(e) - F(1)$

- A. $I = 1$. B. $I = e$. C. $I = \frac{1}{e}$. D. $I = \frac{1}{2}$.

Câu 26: Cho $\int_0^1 f(x)dx = 2$ và $\int_0^1 g(x)dx = 5$. Khi đó, $\int_0^1 [f(x) - 2g(x)] dx$ bằng

- A. -3. B. -8. C. 12. D. 1.

Câu 27: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; -4; 3)$ và $B(2; 2; 7)$. Trung điểm của đoạn thẳng AB có tọa độ là

- A. $(2; -1; 5)$. B. $(2; 6; 4)$. C. $(1; 3; 2)$. D. $(4; -2; 10)$.

Câu 28: Cho tích phân $I = \int_1^e \frac{\sqrt{1 + \ln x}}{x} dx$. Đổi biến $t = \sqrt{1 + \ln x}$ ta được kết quả nào sau đây?

- A. $I = \int_1^{\sqrt{2}} t^2 dt$. B. $I = 2 \int_1^{\sqrt{2}} t dt$. C. $I = 2 \int_1^2 t^2 dt$. D. $I = 2 \int_1^{\sqrt{2}} t^2 dt$.

Câu 29: Cho $\int_0^4 f(x)dx = 1$. Khi đó, $\int_0^2 f(2x)dx$ bằng

- A. 4. B. 2. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{1}{4}$.

Câu 30: Nếu $\int_0^1 [f(x) + 2x] dx = 2$ thì $\int_0^1 f(x) dx$ bằng

- A. 1. B. 0. C. 2. D. 4.

Câu 31: Nếu $\int_0^4 f(x) dx = 37$ thì $\int_0^4 [2f(x) - 3x^2] dx$ bằng

- A. 10. B. 12. C. 18. D. -27.

Câu 32: Cho biết hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$ và có một nguyên hàm là $F(x)$. Tìm

$I = \int [2f(x) + f'(x) + 1] dx$?

- A. $I = 2xF(x) + x + 1$. B. $I = 2F(x) + xf(x) + C$.
C. $I = 2xF(x) + f(x) + x + C$. D. $I = 2F(x) + f(x) + x + C$.

Câu 33: Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu có tâm $I(1;1;1)$ và diện tích bằng 4π có phương trình là

A. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 1.$

B. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 4.$

C. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1.$

D. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 4.$

Câu 34: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-3;5), B(0;1;-1)$. Phương trình mặt cầu đường kính AB là

A. $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 14.$

B. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2 = 14.$

C. $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 56.$

D. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2 = 14.$

Câu 35: Biết $f(x)$ là hàm liên tục trên \mathbb{R} và $\int_0^9 f(x)dx = 9$. Khi đó giá trị của $\int_1^4 f(3x-3)dx$ là

A. 0.

B. 27.

C. 3.

D. 24.

II. Phần tự luận (3 điểm):

Câu 1 (1 điểm): Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{2x}$ và $F(0) = 1$. Tính giá trị của $F(\ln 3)$.

Câu 2 (1 điểm): Trong không gian $Oxyz$, cho 3 điểm $A(2;0;0), B(0;4;0), C(0;0;-6)$. Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$.

Câu 3 (0,5 điểm): Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương trên $(0; +\infty)$, có đạo hàm trên khoảng đó và thỏa mãn $f(x)\ln f(x) = x(f(x) - f'(x)), \forall x \in (0; +\infty)$. Biết $f(1) = f(3)$. Tính $f(2)$.

Câu 4 (0,5 điểm): Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp 3 trên \mathbb{R} và thỏa mãn $f(1-x) = x[2024 - xf''(x)]$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Tính tích phân $\int_0^1 xf'(x)dx$.

----- **HẾT** -----

I. Phần đáp án câu trắc nghiệm:

| Mã đề Câu | 101 | 102 | 103 | 104 |
|--------------|-----|-----|-----|-----|
| 1 | D | B | A | C |
| 2 | A | B | B | B |
| 3 | A | A | B | B |
| 4 | B | D | D | D |
| 5 | C | A | A | B |
| 6 | B | C | B | B |
| 7 | B | A | D | C |
| 8 | B | B | A | B |
| 9 | C | B | A | A |
| 10 | C | C | C | D |
| 11 | C | C | D | B |
| 12 | C | A | B | A |
| 13 | A | A | D | A |
| 14 | D | B | A | A |
| 15 | A | A | C | C |
| 16 | B | C | A | C |
| 17 | D | C | B | B |
| 18 | B | B | A | C |
| 19 | D | A | B | A |
| 20 | B | C | C | A |
| 21 | C | A | C | A |
| 22 | C | D | C | C |
| 23 | A | C | C | C |
| 24 | C | C | D | C |
| 25 | A | D | B | A |
| 26 | B | B | C | C |
| 27 | A | A | B | C |
| 28 | A | D | D | D |
| 29 | B | C | D | B |
| 30 | D | A | C | D |
| 31 | C | A | B | A |
| 32 | D | D | C | D |
| 33 | B | C | A | C |
| 34 | C | A | D | A |
| 35 | C | C | C | D |

II. Phần tự luận: Đề 101-103

Câu 1 (1 điểm): Ta có: $F(x) = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2}e^{2x} + C$. (0,25 điểm)

Do $F(0) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}e^0 + C = 0 \Rightarrow C = -\frac{1}{2}$. (0,25 điểm)

Vậy $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}$. **(0,25 điểm)**

Nên $F(\ln 3) = \frac{1}{2}e^{2 \cdot \ln 3} - \frac{1}{2} = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4$. **(0,25 điểm)**.

Câu 2 (1 điểm): Giả sử mặt cầu (S) ngoại tiếp tứ diện $OABC$ có phương trình

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0. \quad \mathbf{(0,25 \text{ điểm})}.$$

(S) đi qua 4 điểm O, A, B, C nên ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} d = 0 \\ 16 - 8a + d = 0 \\ 4 - 4b + d = 0 \\ 4 + 4c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = -1 \\ d = 0 \end{cases}. \quad \mathbf{(0,25}$$

điểm).

Suy ra mặt cầu (S) có tâm $I(2;1;-1)$, bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} = \sqrt{6}$. **(0,25 điểm)**.

Vậy phương trình mặt cầu (S) là: $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 6$. **(0,25 điểm)**.

Câu 3 (0,5 điểm):

$$f(x) \ln f(x) = x(f(x) - f'(x)), \quad \forall x \in (0; +\infty). \Leftrightarrow \ln f(x) = x \left(1 - \frac{f'(x)}{f(x)} \right)$$

$$\Leftrightarrow \ln f(x) = x(1 - (\ln f(x))') \Leftrightarrow (x)' \ln f(x) + x(\ln f(x))' = x \Leftrightarrow (x \ln f(x))' = x.$$

Suy ra $x \ln f(x) = \int x dx = \frac{x^2}{2} + C$ **(0,25 điểm)**

Cho $x=1$ ta có $\ln f(1) = \frac{1}{2} + C$, Cho $x=3$ ta có $3 \ln f(3) = \frac{9}{2} + C$. Do $f(1) = f(3)$.

Suy ra $C = \frac{3}{2} \Rightarrow x \ln f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2} \Rightarrow f(x) = e^{\frac{x^2+3}{2x}} \Rightarrow f(2) = e^{\frac{7}{4}}$. **(0,25 điểm)**

Câu 4 (0,5 điểm):

Từ giả thiết $f(1-x) = x[2024 - xf''(x)]$ (1) thay $x=0$ ta có $f(1)=0$. Lấy tích phân 2 vế của (1) ta có

$$\int_0^1 f(1-x) dx = \int_0^1 2024x dx - \int_0^1 x^2 f''(x) dx \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx = 1012 - \int_0^1 x^2 f''(x) dx$$

$$\Leftrightarrow xf(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 xf'(x) dx = 1012 - \left[x^2 f'(x) \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 xf'(x) dx \right] \Leftrightarrow - \int_0^1 xf'(x) dx = 1012 - f'(1) + 2 \int_0^1 xf'(x) dx$$

$$3 \int_0^1 xf'(x) dx = f'(1) - 1012 \Leftrightarrow \int_0^1 xf'(x) dx = \frac{f'(1) - 1012}{3}. \quad \mathbf{(0,25 \text{ điểm})}$$

Mặt khác lấy đạo hàm 2 vế của (1) ta có $-f'(1-x) = 2024 - 2xf''(x) - x^2 f'''(x)$ (2).

Thay $x=0$ vào (2) ta có $-f'(1) = 2024 \Leftrightarrow f'(1) = -2024$.

Vậy $\int_0^1 xf'(x) dx = \frac{-2024 - 1012}{3} = -1012$. **(0,25 điểm)**

ĐỀ 102-104:

Câu 1 (1 điểm):

Ta có: $F(x) = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2}e^{2x} + C$. (0,25 điểm)

Do $F(0) = 1 \Rightarrow \frac{1}{2}e^0 + C = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{2}$. (0,25 điểm)

Vậy $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{2}$. (0,25 điểm)

Nên $F(\ln 3) = \frac{1}{2}e^{2 \ln 3} + \frac{1}{2} = \frac{9}{2} + \frac{1}{2} = 5$. (0,25 điểm)

Câu 2 (1 điểm): Giả sử mặt cầu (S) ngoại tiếp tứ diện $OABC$ có phương trình

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0. \text{ (0,25 điểm).}$$

(S) đi qua 4 điểm O, A, B, C nên ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} d = 0 \\ 4 - 4a + d = 0 \\ 16 - 8b + d = 0 \\ 36 + 12c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = -3 \\ d = 0 \end{cases}. \text{ (0,25}$$

điểm).

Suy ra mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; -3)$, bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} = \sqrt{14}$. (0,25 điểm).

Vậy phương trình mặt cầu (S) là: $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 14$. (0,25 điểm).

Câu 3 (0,5 điểm):

$$f(x) \ln f(x) = x(f(x) - f'(x)), \forall x \in (0; +\infty). \Leftrightarrow \ln f(x) = x \left(1 - \frac{f'(x)}{f(x)} \right)$$

$$\Leftrightarrow \ln f(x) = x(1 - (\ln f(x))') \Leftrightarrow (x)' \ln f(x) + x(\ln f(x))' = x \Leftrightarrow (x \ln f(x))' = x.$$

Suy ra $x \ln f(x) = \int x dx = \frac{x^2}{2} + C$ (0,25 điểm)

Cho $x = 1$ ta có $\ln f(1) = \frac{1}{2} + C$, Cho $x = 3$ ta có $3 \ln f(3) = \frac{9}{2} + C$. Do $f(1) = f(3)$.

Suy ra $C = \frac{3}{2} \Rightarrow x \ln f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2} \Rightarrow f(x) = e^{\frac{x+3}{2x}} \Rightarrow f(2) = e^{\frac{7}{4}}$. (0,25 điểm)

Câu 4 (0,5 điểm):

Từ giả thiết $f(1-x) = x[2024 - xf''(x)]$ (1) thay $x = 0$ ta có $f(1) = 0$. Lấy tích phân 2 vế của (1) ta có

$$\int_0^1 f(1-x) dx = \int_0^1 2024x dx - \int_0^1 x^2 f''(x) dx \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx = 1012 - \int_0^1 x^2 f''(x) dx$$

$$\Leftrightarrow xf(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 xf'(x) dx = 1012 - \left[x^2 f'(x) \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 xf'(x) dx \right] \Leftrightarrow - \int_0^1 xf'(x) dx = 1012 - f'(1) + 2 \int_0^1 xf'(x) dx$$

$$3 \int_0^1 xf'(x) dx = f'(1) - 1012 \Leftrightarrow \int_0^1 xf'(x) dx = \frac{f'(1) - 1012}{3}. \text{ (0,25 điểm)}$$

Mặt khác lấy đạo hàm 2 vế của (1) ta có $-f'(1-x) = 2024 - 2xf''(x) - x^2 f'''(x)$ (2).

Thay $x = 0$ vào (2) ta có $-f'(1) = 2024 \Leftrightarrow f'(1) = -2024$.

Vậy $\int_0^1 xf'(x) dx = \frac{-2024 - 1012}{3} = -1012$. (0,25 điểm)