

Trắc nghiệm

Câu 1. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin 2018x$.

- A. $\frac{\cos 2018x}{2018} + C$. B. $-\frac{\cos 2018x}{2019} + C$.
 C. $-\frac{\cos 2018x}{2018} + C$. D. $2018 \cos 2018x + C$.

Câu 2. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2}{4x-3}$.

- A. $\int \frac{2dx}{4x-3} = 2 \ln \left(2x - \frac{3}{2} \right) + C$. B. $\int \frac{2dx}{4x-3} = \frac{1}{2} \ln \left| 2x - \frac{3}{2} \right| + C$.
 C. $\int \frac{2dx}{4x-3} = \frac{1}{2} \ln \left(2x - \frac{3}{2} \right) + C$. D. $\int \frac{2dx}{4x-3} = \frac{1}{4} \ln |4x-3| + C$.

Câu 3. Khẳng định nào sau đây là khẳng định sai?

- A. $\int kf(x)dx = \int f(x)dx$ với $k \in \mathbb{R}$.
 B. $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$ với $f(x); g(x)$ liên tục trên \mathbb{R} .
 C. $\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}$ với $\alpha \neq -1$.
 D. $\left(\int f(x)dx \right)' = f(x)$.

Câu 4. Tìm nguyên hàm của hàm số $y = \sin(2x-1)$.

- A. $\frac{1}{2} \cos(2x-1) + C$. B. $-\cos(2x-1) + C$.
 C. $-\frac{1}{2} \cos(2x-1) + C$. D. $-\frac{1}{2} \sin(2x-1) + C$.

Câu 5. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)$.

- A. $\int f(x)dx = 3 \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) + C$. B. $\int f(x)dx = -\frac{1}{3} \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) + C$.
 C. $\int f(x)dx = 6 \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) + C$. D. $\int f(x)dx = \frac{1}{3} \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) + C$.

Câu 6. Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 - 3x + \frac{1}{x}$ là:

- A. $F(x) = 2x - 3 - \frac{1}{x^2} + C$. B. $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + \ln|x| + C$.
 C. $F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 + \ln x + C$. D. $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + \ln x + C$.

Câu 7. Cho số thực $x > 0$. Chọn đẳng thức **đúng** trong các đẳng thức sau:

A. $\int \frac{\ln x}{x} . dx = 2 \ln x + C$. B. $\int \frac{\ln x}{x} . dx = 2 \ln^2 x + C$.

C. $\int \frac{\ln x}{x} . dx = \ln^2 x + C$. D. $\int \frac{\ln x}{x} . dx = \frac{1}{2} \ln^2 x + C$.

Câu 8. Tính tích phân $\int_0^{\pi} \sin 3x dx$

A. $-\frac{1}{3}$. B. $\frac{1}{3}$. C. $-\frac{2}{3}$. D. $\frac{2}{3}$.

Câu 9. Cho $I = \int_0^2 f(x) dx = 3$. Khi đó $J = \int_0^2 [4f(x) - 3] dx$ bằng:

A. 2 . B. 6 . C. 8 . D. 4 .

Câu 10. Giá trị của $\int_0^3 dx$ bằng

A. 3 . B. 0 . C. 2 . D. 1 .

Câu 11. Cho hàm $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[2;3]$ đồng thời $f(2) = 2, f(3) = 5$. Tính $\int_2^3 f'(x) dx$ bằng

A. -3 . B. 7 . C. 10 . D. 3 .

Câu 12. Cho $\int_{-2}^1 f(x) dx = 3$. Tính tích phân $I = \int_{-2}^1 [2f(x) - 1] dx$.

A. -9 . B. -3 . C. 3 . D. 5 .

Câu 13. Tích phân $\int_1^2 (x+3)^2 dx$ bằng

A. 61 . B. $\frac{61}{3}$. C. 4 . D. $\frac{61}{9}$.

Câu 14. Nếu $\int_1^2 f(x) dx = 3, \int_2^5 f(x) dx = -1$ thì $\int_1^5 f(x) dx$ bằng

A. -2 . B. 2 . C. 3 . D. 4 .

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(2;-2;1), B(1;-1;3)$. Tọa độ của vectơ \overline{AB} là

A. $(1;-1;-2)$. B. $(-3;3;-4)$. C. $(3;-3;4)$. D. $(-1;1;2)$.

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, cho hình nón đỉnh $S\left(\frac{17}{18}; -\frac{11}{9}; \frac{17}{18}\right)$ có đường tròn đáy đi qua ba điểm $A(1;0;0), B(0;-2;0), C(0;0;1)$. Tính độ dài đường sinh l của hình nón đã cho.

A. $l = \frac{\sqrt{86}}{6}$. B. $l = \frac{\sqrt{194}}{6}$. C. $l = \frac{\sqrt{94}}{6}$. D. $l = \frac{5\sqrt{2}}{6}$.

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 2z - 3 = 0$ có bán kính bằng

A. $3\sqrt{3}$. B. 9 . C. 3 . D. $\sqrt{3}$.

- Câu 18.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(3;-1;-2)$ và mặt phẳng $(\alpha): 3x - y + 2z + 4 = 0$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua M và song song với (α) ?
- A. $3x + y - 2z - 14 = 0$. B. $3x - y + 2z + 6 = 0$.
 C. $3x - y + 2z - 6 = 0$. D. $3x - y - 2z + 6 = 0$.
- Câu 19.** Trong không gian $Oxyz$, một vector pháp tuyến của mặt phẳng $\frac{x}{-2} + \frac{y}{-1} + \frac{z}{3} = 1$ là.
- A. $\vec{n} = (3; 6; -2)$. B. $\vec{n} = (2; -1; 3)$. C. $\vec{n} = (-3; -6; -2)$. D. $\vec{n} = (-2; -1; 3)$.
- Câu 20.** Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào sau đây là phương trình của mặt phẳng Oxz ?
- A. $y = 0$. B. $x = 0$. C. $z = 0$. D. $y - 1 = 0$.
- Câu 21.** Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ và $F(0) = 1$. Tính $F(1)$.
- A. $F(1) = \ln 2 + 1$. B. $F(1) = \frac{1}{2} \ln 2 + 1$. C. $F(1) = 0$. D. $F(1) = \ln 2 + 2$.
- Câu 22.** Tìm nguyên hàm $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$
- A. $F(x) = -\cos x - \sin x + C$. B. $F(x) = \cos x + \sin x + C$
 C. $F(x) = \cot x - \tan x + C$. D. $F(x) = -\cot x - \tan x + C$.
- Câu 23.** Trong các hàm số sau: (I) $f(x) = \tan^2 x + 2$; (II) $f(x) = \frac{2}{\cos^2 x}$; (III) $f(x) = \tan^2 x + 1$. Hàm số nào có nguyên hàm là hàm số $g(x) = \tan x$?
- A. Chỉ (III).
 B. Chỉ (II).
 C. Chỉ (II) và (III).
 D. (I); (II); (III).
- Câu 24.** Cho hàm số $f(x) = 2x + e^x$. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ thỏa mãn $F(0) = 2019$.
- A. $F(x) = x^2 + e^x + 2018$.
 B. $F(x) = x^2 + e^x - 2018$.
 C. $F(x) = x^2 + e^x + 2017$.
 D. $F(x) = e^x - 2019$.
- Câu 25.** Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin x + x \ln x$ là
- A. $F(x) = -\cos x + \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C$. B. $F(x) = -\cos x + \ln x + C$.
 C. $F(x) = \cos x + \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C$. D. $F(x) = -\cos x + C$.

Câu 26. Cho $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Tính $I = F(e) - F(1)$.

- A. $I = \frac{1}{e}$. B. $I = \frac{1}{2}$. C. $I = e$. D. $I = 1$.

Câu 27. Cho số thực $m > 1$ thỏa mãn $\int_1^m |2mx - 1| dx = 1$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $m \in (4; 6)$. B. $m \in (2; 4)$. C. $m \in (3; 5)$. D. $m \in (1; 3)$.

Câu 28. Cho $\int_2^4 f(x) dx = 10, \int_2^4 g(x) dx = 5$. Tính $\int_2^4 [3f(x) - 5g(x)] dx$.

- A. $I = 15$. B. $I = 10$. C. $I = 5$. D. $I = -5$.

Câu 29. Tích phân $\int_0^{100} x \cdot e^{2x} dx$ bằng

- A. $\frac{1}{4}(199e^{200} - 1)$. B. $\frac{1}{2}(199e^{200} - 1)$. C. $\frac{1}{4}(199e^{200} + 1)$. D. $\frac{1}{2}(199e^{200} + 1)$.

Câu 30. Giả sử a, b, c là các số nguyên thỏa mãn $\int_0^4 \frac{2x^2 + 4x + 1}{\sqrt{2x + 1}} dx = \frac{1}{2} \int_1^3 (au^4 + bu^2 + c) du$, trong đó

$u = \sqrt{2x + 1}$. Tính giá trị $S = a + b + c$.

- A. $S = 3$. B. $S = 0$. C. $S = 1$. D. $S = 2$.

Câu 31. Biết $\int_0^4 x \ln(x^2 + 9) dx = a \ln 5 + b \ln 3 + c$, trong đó a, b, c là các số nguyên. Giá trị của biểu thức

$T = a + b + c$ là

- A. $T = 10$. B. $T = 9$. C. $T = 8$. D. $T = 11$.

Câu 32. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2; -3; 5)$. Tìm tọa độ A' là điểm đối xứng với A qua trục Oy .

- A. $A'(2; 3; 5)$. B. $A'(2; -3; -5)$. C. $A'(-2; -3; 5)$. D. $A'(-2; -3; -5)$.

Câu 33. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu tâm $I(1; 2; -1)$ và cắt mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 1 = 0$ theo một đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{8}$ có phương trình là

- A. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 9$. B. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$.
C. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 3$. D. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 3$.

Câu 34. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3; 2; -1), B(-1; 4; 5)$. Phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB là

- A. $2x + y + 3z - 11 = 0$. B. $2x - y - 3z - 7 = 0$.
C. $2x - y - 3z + 7 = 0$. D. $-2x + y + 3z + 7 = 0$.

Câu 35. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1; 3; -1)$ và mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z = 1$. Gọi N là hình chiếu vuông góc của M trên (P) . Viết phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn MN .

- A. $x - 2y + 2z + 3 = 0$. B. $x - 2y + 2z + 1 = 0$.
C. $x - 2y + 2z - 3 = 0$. D. $x - 2y + 2z + 2 = 0$.

Tự luận

Câu 1. Cho $f(x)$ là một nguyên hàm của $g(x)$ trên \mathbb{R} , thỏa mãn $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}, \int_0^{\frac{\pi}{2}} xg(x) dx = \frac{1}{2}$.

Tính $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $[1;3]$; $f(x) \neq 0, \forall x \in [1;3]$; $f'(x)[1 + f(x)]^2 = (x-1)^2[f(x)]^4$ và $f(1) = -1$.

Tính $\int_e^3 f(x) dx$.

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ xác định với mọi giá trị thực của x khác $\frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ và thỏa mãn

$f'(x) = \tan x, f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1, f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 2$. Tính $P = 3f(0) + 2f(\pi)$

Câu 4. Cho hình nón đỉnh S đáy là hình tròn tâm O , SA, SB là hai đường sinh biết $SO = 3$, khoảng cách từ O đến (SAB) là 1 và diện tích ΔSAB là 18. Tính bán kính đáy của hình nón trên.

Nguyễn Bảo Vương

Trắc nghiệm

BẢNG ĐÁP ÁN

1.C	2.B	3.A	4.C	5.D	6.B	7.D	8.D	9.B	10.A
11.D	12.C	13.B	14.B	15.D	16.A	17.C	18.C	19.A	20.A
21.B	22.D	23.A	24.A	25.A	26.B	27.D	28.C	29.C	30.D
31.C	32.D	33.B	34.C	35.C					

Câu 1. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin 2018x$.

- A. $\frac{\cos 2018x}{2018} + C$. B. $-\frac{\cos 2018x}{2019} + C$.
 C. $-\frac{\cos 2018x}{2018} + C$. D. $2018 \cos 2018x + C$.

Lời giải

Theo công thức nguyên hàm mở rộng ta có: $\int \sin 2018x dx = -\frac{\cos 2018x}{2018} + C$.

Câu 2. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2}{4x-3}$.

- A. $\int \frac{2dx}{4x-3} = 2 \ln \left(2x - \frac{3}{2} \right) + C$. B. $\int \frac{2dx}{4x-3} = \frac{1}{2} \ln \left| 2x - \frac{3}{2} \right| + C$.
 C. $\int \frac{2dx}{4x-3} = \frac{1}{2} \ln \left(2x - \frac{3}{2} \right) + C$. D. $\int \frac{2dx}{4x-3} = \frac{1}{4} \ln |4x-3| + C$.

Lời giải

Ta có nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2}{4x-3}$ là: $\int \frac{2dx}{4x-3} = \frac{1}{2} \ln \left| 2x - \frac{3}{2} \right| + C$, vì:

$$\left[\frac{1}{2} \ln \left| 2x - \frac{3}{2} \right| + C \right]' = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{2x - \frac{3}{2}} = \frac{2}{4x-3} = f(x).$$

Câu 3. Khẳng định nào sau đây là khẳng định sai?

- A. $\int kf(x)dx = \int f(x)dx$ với $k \in \mathbb{R}$.
 B. $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$ với $f(x); g(x)$ liên tục trên \mathbb{R} .
 C. $\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}$ với $\alpha \neq -1$.
 D. $(\int f(x)dx)' = f(x)$.

Lời giải

Ta có $\int kf(x)dx = \int f(x)dx$ với $k \in \mathbb{R}$ sai vì tính chất đúng khi $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Câu 4. Tìm nguyên hàm của hàm số $y = \sin(2x-1)$.

- A. $\frac{1}{2} \cos(2x-1) + C$. B. $-\cos(2x-1) + C$.

C. $-\frac{1}{2}\cos(2x-1)+C$. **D.** $-\frac{1}{2}\sin(2x-1)+C$.

Lời giải

Ta có: $\int \sin(2x-1)dx = -\frac{1}{2}\cos(2x-1)+C$.

Câu 5. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)$.

A. $\int f(x)dx = 3\sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) + C$.

B. $\int f(x)dx = -\frac{1}{3}\sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) + C$.

C. $\int f(x)dx = 6\sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) + C$.

D. $\int f(x)dx = \frac{1}{3}\sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) + C$.

Lời giải

Áp dụng công thức: $\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b)+C$.

Câu 6. Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 - 3x + \frac{1}{x}$ là:

A. $F(x) = 2x - 3 - \frac{1}{x^2} + C$.

B. $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + \ln|x| + C$.

C. $F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 + \ln x + C$.

D. $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + \ln x + C$.

Lời giải

Ta có $\int \left(x^2 - 3x + \frac{1}{x}\right)dx = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \ln|x| + C$.

Câu 7. Cho số thực $x > 0$. Chọn đẳng thức **đúng** trong các đẳng thức sau:

A. $\int \frac{\ln x}{x} \cdot dx = 2 \ln x + C$. **B.** $\int \frac{\ln x}{x} \cdot dx = 2 \ln^2 x + C$.

C. $\int \frac{\ln x}{x} \cdot dx = \ln^2 x + C$. **D.** $\int \frac{\ln x}{x} \cdot dx = \frac{1}{2} \ln^2 x + C$.

Lời giải

Ta có: $\int \frac{\ln x}{x} \cdot dx = \int \ln x \cdot d(\ln x) = \frac{1}{2} \ln^2 x + C$.

Câu 8. Tính tích phân $\int_0^{\pi} \sin 3x dx$

A. $-\frac{1}{3}$.

B. $\frac{1}{3}$.

C. $-\frac{2}{3}$.

D. $\frac{2}{3}$.

Lời giải

Ta có $\int_0^{\pi} \sin 3x dx = -\frac{1}{3} \cos 3x \Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{3}(-1-1) = \frac{2}{3}$.

Câu 9. Cho $I = \int_0^2 f(x) dx = 3$. Khi đó $J = \int_0^2 [4f(x) - 3] dx$ bằng:

A. 2.

B. 6.

C. 8.

D. 4.

$$\overline{AB} = (-1; 1; 2)$$

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, cho hình nón đỉnh $S\left(\frac{17}{18}; -\frac{11}{9}; \frac{17}{18}\right)$ có đường tròn đáy đi qua ba điểm $A(1; 0; 0), B(0; -2; 0), C(0; 0; 1)$. Tính độ dài đường sinh l của hình nón đã cho.

A. $l = \frac{\sqrt{86}}{6}$. **B.** $l = \frac{\sqrt{194}}{6}$. **C.** $l = \frac{\sqrt{94}}{6}$. **D.** $l = \frac{5\sqrt{2}}{6}$.

Lời giải

$$l = SA = \sqrt{\left(\frac{17}{18} - 1\right)^2 + \left(-\frac{11}{9}\right)^2 + \left(\frac{17}{18}\right)^2} = \frac{\sqrt{86}}{6}.$$

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 2z - 3 = 0$ có bán kính bằng

A. $3\sqrt{3}$. **B.** 9. **C.** 3. **D.** $\sqrt{3}$.

Lời giải

Mặt cầu có tâm $I(-1; 2; 1)$, bán kính $R = 3$.

Câu 18. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(3; -1; -2)$ và mặt phẳng $(\alpha): 3x - y + 2z + 4 = 0$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua M và song song với (α) ?

A. $3x + y - 2z - 14 = 0$. **B.** $3x - y + 2z + 6 = 0$.
C. $3x - y + 2z - 6 = 0$. **D.** $3x - y - 2z + 6 = 0$.

Lời giải

Mặt phẳng qua M song song với (α) có phương trình là:

$$3(x - 3) - (y + 1) + 2(z + 2) = 0 \text{ hay } 3x - y + 2z - 6 = 0.$$

Vậy phương trình mặt phẳng cần tìm là: $3x - y + 2z - 6 = 0$.

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $\frac{x}{-2} + \frac{y}{-1} + \frac{z}{3} = 1$ là.

A. $\vec{n} = (3; 6; -2)$. **B.** $\vec{n} = (2; -1; 3)$. **C.** $\vec{n} = (-3; -6; -2)$. **D.** $\vec{n} = (-2; -1; 3)$.

Lời giải

$$\frac{x}{-2} + \frac{y}{-1} + \frac{z}{3} = 1 \Leftrightarrow 3x + 6y - 2z = -6.$$

Do đó vectơ pháp tuyến của mặt phẳng là $\vec{n} = (3; 6; -2)$.

Câu 20. Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào sau đây là phương trình của mặt phẳng Oxz ?

A. $y = 0$. **B.** $x = 0$. **C.** $z = 0$. **D.** $y - 1 = 0$.

Lời giải

Phương trình mặt phẳng Oxz có phương trình là $y = 0$.

Câu 21. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ và $F(0) = 1$. Tính $F(1)$.

A. $F(1) = \ln 2 + 1$. **B.** $F(1) = \frac{1}{2} \ln 2 + 1$. **C.** $F(1) = 0$. **D.** $F(1) = \ln 2 + 2$.

Lời giải

Chọn B

$$\int f(x)dx = \int \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + c.$$

Vì $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ nên $F(x) = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + c.$

$$F(0) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \ln 1 + c = 1 \Leftrightarrow c = 1.$$

$$\text{Do đó } F(x) = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + 1.$$

$$\text{Vậy } F(1) = \frac{1}{2} \ln(1^2+1) + 1 = \frac{1}{2} \ln 2 + 1.$$

Câu 22. Tìm nguyên hàm $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$

A. $F(x) = -\cos x - \sin x + C.$

B. $F(x) = \cos x + \sin x + C$

C. $F(x) = \cot x - \tan x + C.$

D. $F(x) = -\cot x - \tan x + C.$

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx = -\cot x - \tan x + C$

Câu 23. Trong các hàm số sau: (I) $f(x) = \tan^2 x + 2$; (II) $f(x) = \frac{2}{\cos^2 x}$; (III) $f(x) = \tan^2 x + 1$. Hàm số nào có nguyên hàm là hàm số $g(x) = \tan x$?

A. Chỉ (III).

B. Chỉ (II).

C. Chỉ (II) và (III).

D. (I); (II); (III).

Lời giải

Chọn A

Ta thấy

$$\int (\tan^2 x + 2) dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + 1 \right) dx = \tan x + x + C.$$

$$\int \left(\frac{2}{\cos^2 x} \right) dx = 2 \tan x + C$$

$$\int (\tan^2 x + 1) dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$$

Câu 24. Cho hàm số $f(x) = 2x + e^x$. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ thỏa mãn $F(0) = 2019$

A. $F(x) = x^2 + e^x + 2018.$

B. $F(x) = x^2 + e^x - 2018.$

C. $F(x) = x^2 + e^x + 2017.$

D. $F(x) = e^x - 2019$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int f(x) dx = \int (2x + e^x) dx = x^2 + e^x + C$.

Có $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ và $F(0) = 2019$.

Suy ra $\begin{cases} F(x) = x^2 + e^x + C \\ F(0) = 2019 \end{cases} \Rightarrow 1 + C = 2019 \Leftrightarrow C = 2018$.

Vậy $F(x) = x^2 + e^x + 2018$.

Câu 25. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin x + x \ln x$ là

A. $F(x) = -\cos x + \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C$.

B. $F(x) = -\cos x + \ln x + C$.

C. $F(x) = \cos x + \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C$.

D. $F(x) = -\cos x + C$.

Lời giải

Chọn A

$$\begin{aligned} \int (\sin x + x \ln x) dx &= -\cos x + \int x \ln x dx = -\cos x + \frac{1}{2} \int \ln x dx^2 = -\cos x + \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx \\ &= -\cos x + \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C \end{aligned}$$

Câu 26. Cho $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Tính $I = F(e) - F(1)$.

A. $I = \frac{1}{e}$.

B. $I = \frac{1}{2}$.

C. $I = e$.

D. $I = 1$.

Lời giải

Chọn B

Xét $I = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \int_1^e \ln x d(\ln x) = \frac{\ln^2 x}{2} \Big|_1^e = \frac{1}{2}$

Vậy $I = \frac{1}{2}$.

Câu 27. Cho số thực $m > 1$ thỏa mãn $\int_1^m |2mx - 1| dx = 1$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $m \in (4; 6)$.

B. $m \in (2; 4)$.

C. $m \in (3; 5)$.

D. $m \in (1; 3)$.

Lời giải

Chọn D

Nhận thấy với $m > 1 \Rightarrow 2mx - 1 > 0, \forall x \in [1; m]$

Ta có $\int_1^m |2mx - 1| dx = \int_1^m (2mx - 1) dx = (mx^2 - x) \Big|_1^m = m^3 - 2m + 1$.

Do đó $m^3 - 2m + 1 = 1 \Leftrightarrow m^3 - 2m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2 \in (1; 3)$.

Câu 28. Cho $\int_2^4 f(x) dx = 10, \int_2^4 g(x) dx = 5$. Tính $\int_2^4 [3f(x) - 5g(x)] dx$.

- A. $I = 15$. B. $I = 10$. C. $I = 5$. D. $I = -5$

Lời giải

Chọn C

$$\text{Có } \int_2^4 [3f(x) - 5g(x)] dx = 3 \int_2^4 f(x) dx - 5 \int_2^4 g(x) dx = 30 - 25 = 5.$$

Câu 29. Tích phân $\int_0^{100} x.e^{2x} dx$ bằng

- A. $\frac{1}{4}(199e^{200} - 1)$. B. $\frac{1}{2}(199e^{200} - 1)$. C. $\frac{1}{4}(199e^{200} + 1)$. D. $\frac{1}{2}(199e^{200} + 1)$.

Lời giải

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = e^{2x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{cases}$$

Khi đó:

$$\int_0^{100} x.e^{2x} dx = \frac{1}{2} x e^{2x} \Big|_0^{100} - \frac{1}{2} \int_0^{100} e^{2x} dx = 50e^{200} - \frac{1}{4} e^{2x} \Big|_0^{100} = 50e^{200} - \frac{1}{4} e^{200} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(199e^{200} + 1).$$

Câu 30. Giả sử a, b, c là các số nguyên thỏa mãn $\int_0^4 \frac{2x^2 + 4x + 1}{\sqrt{2x+1}} dx = \frac{1}{2} \int_1^3 (au^4 + bu^2 + c) du$, trong đó

$u = \sqrt{2x+1}$. Tính giá trị $S = a + b + c$.

- A. $S = 3$. B. $S = 0$. C. $S = 1$. D. $S = 2$.

Lời giải

$$u = \sqrt{2x+1} \Rightarrow u^2 = 2x+1 \Rightarrow \begin{cases} u du = dx \\ x = \frac{u^2 - 1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } \int_0^4 \frac{2x^2 + 4x + 1}{\sqrt{2x+1}} dx = \int_1^3 \frac{2\left(\frac{u^2 - 1}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{u^2 - 1}{2}\right) + 1}{u} u \cdot du = \frac{1}{2} \int_1^3 (u^4 + 2u^2 - 1) \cdot du$$

$$\text{Vậy } S = a + b + c = 1 + 2 - 1 = 2.$$

Câu 31. Biết $\int_0^4 x \ln(x^2 + 9) dx = a \ln 5 + b \ln 3 + c$, trong đó a, b, c là các số nguyên. Giá trị của biểu thức

$T = a + b + c$ là

- A. $T = 10$. B. $T = 9$. C. $T = 8$. D. $T = 11$.

Lời giải

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln(x^2 + 9) \\ dv = x dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = \frac{2x}{x^2 + 9} dx \\ v = \frac{x^2 + 9}{2} \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } \int_0^4 x \ln(x^2 + 9) dx = \frac{x^2 + 9}{2} \ln(x^2 + 9) \Big|_0^4 - \int_0^4 \frac{x^2 + 9}{2} \cdot \frac{2x}{x^2 + 9} dx = 25 \ln 5 - 9 \ln 3 - 8.$$

Do đó $a = 25$, $b = -9$, $c = -8$ nên $T = 8$.

Câu 32. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2; -3; 5)$. Tìm tọa độ A' là điểm đối xứng với A qua trục Oy .

- A.** $A'(2; 3; 5)$. **B.** $A'(2; -3; -5)$. **C.** $A'(-2; -3; 5)$. **D.** $A'(-2; -3; -5)$.

Lời giải

Gọi H là hình chiếu vuông góc của $A(2; -3; 5)$ lên Oy . Suy ra $H(0; -3; 0)$

Khi đó H là trung điểm đoạn AA' .

$$\begin{cases} x_{A'} = 2x_H - x_A = -2 \\ y_{A'} = 2y_H - y_A = -3 \\ z_{A'} = 2z_H - z_A = -5 \end{cases} \Rightarrow A'(-2; -3; -5).$$

Câu 33. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu tâm $I(1; 2; -1)$ và cắt mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 1 = 0$ theo một đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{8}$ có phương trình là

- A.** $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 9$. **B.** $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$.
C. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 3$. **D.** $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 3$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } d = d(I; (P)) = \frac{|2 \cdot 1 - 2 + 2 \cdot (-1) - 1|}{3} = 1.$$

$$\text{Bán kính mặt cầu là } R = \sqrt{d^2 + r^2} = 3.$$

$$\text{Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là } (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9.$$

Câu 34. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3; 2; -1)$, $B(-1; 4; 5)$. Phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB là

- A.** $2x + y + 3z - 11 = 0$. **B.** $2x - y - 3z - 7 = 0$.
C. $2x - y - 3z + 7 = 0$. **D.** $-2x + y + 3z + 7 = 0$.

Lời giải

$$\text{Tọa độ trung điểm của } AB \text{ là } I(1; 3; 2), \overline{AB} = (-4; 2; 6), \text{ ta chọn VTPT là } \vec{n} = (-2; 1; 3).$$

Phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB là

$$-2(x-1) + y - 3 + 3(z-2) = 0 \Leftrightarrow 2x - y - 3z + 7 = 0.$$

Câu 35. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1; 3; -1)$ và mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z = 1$. Gọi N là hình chiếu vuông góc của M trên (P) . Viết phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn MN .

- A.** $x - 2y + 2z + 3 = 0$. **B.** $x - 2y + 2z + 1 = 0$.
C. $x - 2y + 2z - 3 = 0$. **D.** $x - 2y + 2z + 2 = 0$.

Lời giải

$$\text{Ta có véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng } (P) \text{ là } \vec{n} = (1; -2; 2).$$

Phương trình đường thẳng Δ đi qua $M(1;3;-1)$ và vuông góc với mặt phẳng (P) là
$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = 3-2t \\ z = -1+2t \end{cases} .$$

Gọi N là hình chiếu vuông góc của M trên (P) ta có $N(1+t;3-2t;-1+2t)$.

Thay N vào phương trình mặt phẳng (P) ta được $9t-8=0 \Leftrightarrow t=\frac{8}{9} \Rightarrow N\left(\frac{17}{9};\frac{11}{9};\frac{-1}{9}\right)$

Gọi I là trung điểm của MN khi đó ta có $I\left(\frac{13}{9};\frac{19}{9};\frac{-1}{9}\right)$.

Do mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng MN song song với mặt phẳng (P) nên véc tơ pháp tuyến của (P) cũng là véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng trung trực của đoạn MN .

Phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng MN đi qua $I\left(\frac{13}{9};\frac{19}{9};\frac{-1}{9}\right)$ và có một véc tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;-2;2)$ là $x-2y+2z+3=0$.

Tự luận

Câu 1. Cho $f(x)$ là một nguyên hàm của $g(x)$ trên \mathbb{R} , thỏa mãn $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}, \int_0^{\frac{\pi}{2}} xg(x)dx=\frac{1}{2}$.

Tính $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$

Lời giải

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = g(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases}$

Khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{2}} xg(x)dx = xf(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$

$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} xg(x)dx = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $[1;3]$; $f(x) \neq 0, \forall x \in [1;3]$; $f'(x)[1+f(x)]^2 = (x-1)^2[f(x)]^4$ và $f(1) = -1$.

Tính $\int_e^3 f(x)dx$,

Lời giải

Từ $f'(x)[1+f(x)]^2 = (x-1)^2[f(x)]^4 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^4(x)} + \frac{2f'(x)}{f^3(x)} + \frac{f'(x)}{f^2(x)} = (x-1)^2$.

Hay

$$\int \left(\frac{f'(x)}{f^4(x)} + \frac{2f'(x)}{f^3(x)} + \frac{f'(x)}{f^2(x)} \right) dx = \int (x-1)^2 dx \Rightarrow - \left(\frac{1}{3f^3(x)} + \frac{1}{f^2(x)} + \frac{1}{f(x)} \right) = \frac{1}{3}(x-1)^3 + C \quad (2).$$

Do $f(1) = -1$ nên $C = \frac{1}{3}$. Thay vào (2) ta được $\left(\frac{1}{f(x)} + 1 \right)^3 = -(x-1)^3 \Rightarrow f(x) = \frac{-1}{x}$.

Khi đó: $\int_e^3 \frac{-1}{x} dx = -\ln|x| \Big|_e^3 = -\ln 3 + 1$,

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ xác định với mọi giá trị thực của x khác $\frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) và thỏa mãn

$$f'(x) = \tan x, \quad f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1, \quad f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 2. \quad \text{Tính } P = 3f(0) + 2f(\pi)$$

Lời giải

Ta có $f'(x) = \tan x$ nên $f(x) = \int f'(x) dx = \int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C$

Ta có $\cos x > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right)$ và $\cos x < 0 \Leftrightarrow x \in \left(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi\right)$

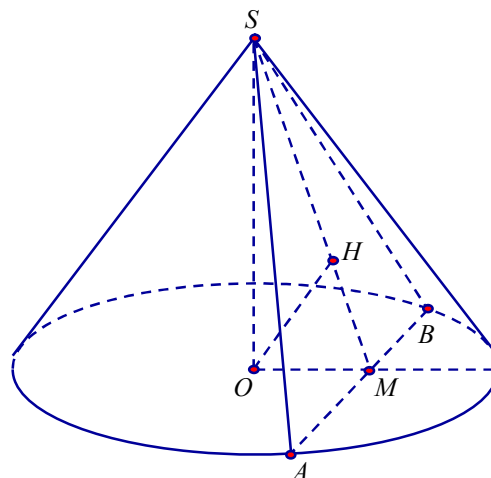
$$\text{Và } f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1, \quad f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 2$$

$$\text{Suy ra: } f(x) = \begin{cases} -\ln|\cos x| + 2 + \ln \frac{\sqrt{2}}{2} & \text{khi } x \in \left(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi\right) \\ -\ln|\cos x| + 1 + \ln \frac{\sqrt{2}}{2} & \text{khi } x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right) \end{cases}$$

$$\text{Do đó } P = 3f(0) + 2f(\pi) = 3\left(1 + \ln \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 2\left(2 + \ln \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 7 - 5 \ln \sqrt{2}$$

Câu 4. Cho hình nón đỉnh S đáy là hình tròn tâm O , SA, SB là hai đường sinh biết $SO = 3$, khoảng cách từ O đến (SAB) là 1 và diện tích ΔSAB là 18. Tính bán kính đáy của hình nón trên.

Lời giải



Gọi M là trung điểm AB , kẻ $OH \perp SM$ tại H , suy ra $OH \perp (SAB)$, nên

$$OH = d(O; (SAB)) = 1.$$

Đặt $a = OM$ và gọi r là bán kính hình tròn đáy của hình nón đã cho.

Ta có:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OM^2} \Rightarrow \frac{1}{OM^2} = \frac{1}{OH^2} - \frac{1}{SO^2} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2} = \frac{8}{9}. \text{ Suy ra } OM = \frac{3}{\sqrt{8}}.$$

$$\text{Từ đó: } SM = \sqrt{SO^2 + OM^2} = \sqrt{3^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right)^2} = \frac{9}{\sqrt{8}}. AB = 2MA = 2\sqrt{r^2 - OM^2} = 2\sqrt{r^2 - \frac{9}{8}}.$$

$$\text{Bởi vậy: } S_{\Delta SAB} = 18 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot AB \cdot SM = 18 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{r^2 - \frac{9}{8}} \cdot \frac{9}{\sqrt{8}} = 18$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{r^2 - \frac{9}{8}} = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow r^2 = \frac{265}{8} \Leftrightarrow r = \frac{\sqrt{530}}{4}.$$

Nguyễn Bảo Vương

Trắc nghiệm

Câu 1. Trong các hàm số sau, hàm số nào có một nguyên hàm là hàm số $F(x) = \ln|x|$?

- A. $f(x) = x$. B. $f(x) = \frac{1}{x}$. C. $f(x) = \frac{x^3}{2}$. D. $f(x) = |x|$.

Câu 2. Cho $f(x)$, $g(x)$ là các hàm số xác định và liên tục trên \mathbb{R} . Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

- A. $\int f(x)g(x)dx = \int f(x)dx \cdot \int g(x)dx$. B. $\int 2f(x)dx = 2\int f(x)dx$.
 C. $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$. D. $\int [f(x) - g(x)]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$.

Câu 3. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 5^x$.

- A. $\int f(x)dx = 5^x + C$. B. $\int f(x)dx = 5^x \ln 5 + C$.
 C. $\int f(x)dx = \frac{5^x}{\ln 5} + C$. D. $\int f(x)dx = \frac{5^{x+1}}{x+1} + C$.

Câu 4. Nếu $\int f(x)dx = \frac{1}{x} + \ln x + C$ thì $f(x)$ là

- A. $f(x) = \sqrt{x} + \ln x + C$. B. $f(x) = -\sqrt{x} + \frac{1}{x} + \ln x + C$.
 C. $f(x) = -\frac{1}{x^2} + \ln x + C$. D. $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$.

Câu 5. Hàm số $F(x) = e^{x^3}$ là một nguyên hàm của hàm số:

- A. $f(x) = e^{x^3}$. B. $f(x) = 3x^2 \cdot e^{x^3}$. C. $f(x) = \frac{e^{x^3}}{3x^2}$. D. $f(x) = x^3 \cdot e^{x^3-1}$.

Câu 6. Nếu $\int f(x)dx = \frac{x^3}{3} + e^x + C$ thì $f(x)$ bằng:

- A. $f(x) = x^2 + e^x$. B. $f(x) = \frac{x^4}{3} + e^x$. C. $f(x) = 3x^2 + e^x$. D. $f(x) = \frac{x^4}{12} + e^x$.

Câu 7. Tính tích phân $A = \int \frac{1}{x \ln x} dx$ bằng cách đặt $t = \ln x$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- A. $A = \int dt$. B. $A = \int \frac{1}{t^2} dt$. C. $A = \int t dt$. D. $A = \int \frac{1}{t} dt$.

Câu 8. Tính tích phân $I = \int_0^2 2^{2018x} dx$.

- A. $I = \frac{2^{4036} - 1}{\ln 2}$. B. $I = \frac{2^{4036} - 1}{2018}$. C. $I = \frac{2^{4036}}{2018 \ln 2}$. D. $I = \frac{2^{4036} - 1}{2018 \ln 2}$.

Câu 9. Giả sử f là hàm số liên tục trên khoảng K và a, b, c là ba số bất kỳ trên khoảng K . Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\int_a^a f(x) dx = 1$. B. $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$.

C. $\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$, $c \in (a; b)$. D. $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt$.

Câu 10. Tính $I = \int 3^x dx$.

A. $I = \frac{3^x}{\ln 3} + C$. B. $I = 3^x \ln 3 + C$. C. $I = 3^x + C$. D. $I = 3^x + \ln 3 + C$.

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và số thực k tùy ý. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$. B. $\int_a^b xf(x) dx = x \int_a^b f(x) dx$.

C. $\int_a^a kf(x) dx = 0$. D. $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$.

Câu 12. Cho $\int_a^c f(x) dx = 17$ và $\int_b^c f(x) dx = -11$ với $a < b < c$. Tính $I = \int_a^b f(x) dx$.

A. $I = -6$. B. $I = 6$. C. $I = 28$. D. $I = -28$.

Câu 13. Tích phân $\int_0^2 \frac{2}{2x+1} dx$ bằng.

A. $2 \ln 5$. B. $\frac{1}{2} \ln 5$. C. $\ln 5$. D. $4 \ln 5$.

Câu 14. Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên K , $a, b \in K$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

A. $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$. B. $\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$.

C. $\int_a^b f(x)g(x) dx = \int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b g(x) dx$. D. $\int_a^b [f(x) - g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$.

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, cho vector \vec{a} biểu diễn của các vector đơn vị là $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{k} - 3\vec{j}$. Tọa độ của vector \vec{a} là

A. $(1; 2; -3)$. B. $(2; -3; 1)$. C. $(2; 1; -3)$. D. $(1; -3; 2)$.

Câu 16. Cho $\vec{a} = (-2; 1; 3)$, $\vec{b} = (1; 2; m)$. Vector \vec{a} vuông góc với \vec{b} khi

A. $m = 1$. B. $m = -1$. C. $m = 2$. D. $m = 0$.

Câu 17. Trong không gian Oxy , phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu tâm $I(1; 0; -2)$, bán kính $r = 4$?

A. $(x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 16$. B. $(x+1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 16$.

C. $(x+1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4$. D. $(x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 4$.

- Câu 18.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;1;-1)$, $B(-1;0;4)$, $C(0;-2;-1)$. Phương trình nào sau đây là phương trình của mặt phẳng đi qua A và vuông góc BC .
A. $x-2y-5z=0$. **B.** $x-2y-5z-5=0$. **C.** $x-2y-5z+5=0$. **D.** $2x-y+5z-5=0$.
- Câu 19.** Trong không gian $Oxyz$, cho $A(-1;-1;1)$, $B(3;1;1)$. Phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn AB là
A. $2x+y-z-2=0$. **B.** $2x+y-2=0$. **C.** $x+2y-2=0$. **D.** $x+2y-z-2=0$.
- Câu 20.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x-z+1=0$. Tọa độ một vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) là
A. $\vec{n}=(2;-1;1)$. **B.** $\vec{n}=(2;0;1)$. **C.** $\vec{n}=(2;0;-1)$. **D.** $\vec{n}=(2;-1;0)$.
- Câu 21.** Cho hàm số $f(x)$ có $f'(x)=\frac{1}{2x-1}$ với mọi $x \neq \frac{1}{2}$ và $f(1)=1$. Khi đó giá trị của $f(5)$ bằng
A. $\ln 2$. **B.** $\ln 3$. **C.** $\ln 2+1$. **D.** $\ln 3+1$.
- Câu 22.** Tìm họ nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\frac{x-1}{x^2}$, $x \neq 0$?
A. $F(x)=\ln x+\frac{1}{x}+C$. **B.** $F(x)=\ln|x|-\frac{1}{x}+C$.
C. $F(x)=-\ln|x|+\frac{1}{x}+C$. **D.** $F(x)=\ln|x|+\frac{1}{x}+C$.
- Câu 23.** Hàm số nào trong các hàm số sau đây có một nguyên hàm bằng $\cos^2 x$?
A. $y=\frac{\cos^3 x}{3}$.
B. $y=-\frac{\cos^3 x}{3}+C(C \in \mathbb{R})$.
C. $y=-\sin 2x$.
D. $y=-\sin 2x+C(C \in \mathbb{R})$.
- Câu 24.** Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=2^x+\cos 6x$ là
A. $2^x \ln 2-6\sin 6x+C$. **B.** $2^x \ln 2+\frac{1}{6}\sin 6x+C$.
C. $2^x \ln 2-\frac{1}{6}\sin 6x+C$. **D.** $\frac{2^x}{\ln 2}+\frac{1}{6}\sin 6x+C$.
- Câu 25.** Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=(2x-1)\ln x$ là
A. $(x^2-x)\ln x-\frac{x^2}{2}-x+C$. **B.** $(x^2-x)\ln x-x^2-x+C$.
C. $(x^2-x)\ln x+x^2-x+C$. **D.** $(x^2-x)\ln x-\frac{x^2}{2}+x+C$.
- Câu 26.** Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{x}(2x-\ln x)$ là
A. $2x-\frac{\ln^2 x}{2}+C$. **B.** $2x-\frac{1}{x^2}+C$. **C.** $\frac{2\ln|x|}{x}-\frac{1}{x}+C$. **D.** $2x-\frac{\ln x}{x}+C$.

Câu 27. Cho tích phân $\int_{-\frac{\pi}{3}}^0 \cos 2x \cos 4x dx = a + b\sqrt{3}$, trong đó a, b là các hằng số hữu tỉ. Tính

$$e^a + \log_2 |b|.$$

- A. -2. B. -3. C. $\frac{1}{8}$. D. 0.

Câu 28. Tìm khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau

A. $\int_0^1 \sin(1-x) dx = \int_0^1 \sin x dx$. B. $\int_0^1 \cos(1-x) dx = -\int_0^1 \cos x dx$.

C. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \frac{x}{2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$. D. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \frac{x}{2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$.

Câu 29. Biết $f(x)$ là hàm liên tục trên \mathbb{R} và $\int_0^9 f(x) dx = 9$. Khi đó giá trị của $\int_1^4 f(3x-3) dx$ là

- A. 27. B. 3. C. 24. D. 0.

Câu 30. Cho $\int_0^6 f(x) dx = 12$ và $I = \int_0^2 f(3x) dx$. Tính I .

- A. $I = 6$. B. $I = 36$. C. $I = 2$. D. $I = 4$.

Câu 31. Cho $F(x) = \frac{1}{2x^2}$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)}{x}$. Tính $\int_1^e f'(x) \ln x dx$ bằng:

- A. $I = \frac{e^2 - 3}{2e^2}$. B. $I = \frac{2 - e^2}{e^2}$. C. $I = \frac{e^2 - 2}{e^2}$. D. $I = \frac{3 - e^2}{2e^2}$.

Câu 32. Trong không gian với hệ trục tọa độ, cho hình bình hành $ABCD$. Biết $A(2;1;-3)$, $B(0;-2;5)$ và $C(1;1;3)$. Diện tích hình bình hành $ABCD$ là

- A. $2\sqrt{87}$. B. $\frac{\sqrt{349}}{2}$. C. $\sqrt{349}$. D. $\sqrt{87}$.

Câu 33. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 5 = 0$. Tính diện tích mặt cầu (S) .

- A. 42π . B. 36π . C. 9π . D. 12π .

Câu 34. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2;0;1)$. Gọi A, B lần lượt là hình chiếu của M trên trục Ox và trên mặt phẳng (Oyz) . Viết phương trình mặt trung trực của đoạn AB .

- A. $4x - 2z - 3 = 0$. B. $4x - 2y - 3 = 0$. C. $4x - 2z + 3 = 0$. D. $4x + 2z + 3 = 0$.

Câu 35. Trong không gian $Oxyz$, phương trình của mặt phẳng (P) đi qua điểm $B(2;1;-3)$, đồng thời vuông góc với hai mặt phẳng $(Q): x + y + 3z = 0$, $(R): 2x - y + z = 0$ là

- A. $4x + 5y - 3z + 22 = 0$. B. $4x - 5y - 3z - 12 = 0$.
C. $2x + y - 3z - 14 = 0$. D. $4x + 5y - 3z - 22 = 0$.

Tự luận

Câu 1. Tính $I = \int_0^{\ln 2} \frac{1}{e^x + 3e^{-x} + 4} dx$

- Câu 2.** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1;2]$ thỏa mãn $\int_1^2 (x-1)^2 f(x) dx = -\frac{1}{3}$, $f(2) = 0$ và $\int_1^2 [f'(x)]^2 dx = 7$. Tính tích phân $I = \int_1^2 f(x) dx$.
- Câu 3.** Biết rằng $F(x)$ là một nguyên hàm trên \mathbb{R} của hàm số $f(x) = \frac{2017x}{(x^2+1)^{2018}}$ thỏa mãn $F(1) = 0$.
 Tìm giá trị nhỏ nhất m của $F(x)$.
- Câu 4.** Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh $AB = a$, góc tạo bởi (SAB) và (ABC) bằng 60° .
 Tính diện tích xung quanh của hình nón đỉnh S và có đường tròn đáy ngoại tiếp tam giác ABC

Nguyễn Bảo Vương

Trắc nghiệm

BẢNG ĐÁP ÁN

1.B	2.A	3.C	4.D	5.B	6.A	7.D	8.D	9.A	10.A
11.B	12.C	13.C	14.C	15.B	16.D	17.A	18.B	19.B	20.C
21.D	22.D	23.C	24.D	25.D	26.A	27.A	28.A	29.B	30.D
31.A	32.C	33.B	34.A	35.D					

Câu 1. Trong các hàm số sau, hàm số nào có một nguyên hàm là hàm số $F(x) = \ln|x|$?

- A.** $f(x) = x$. **B.** $f(x) = \frac{1}{x}$. **C.** $f(x) = \frac{x^3}{2}$. **D.** $f(x) = |x|$.

Lời giải

Áp dụng công thức SGK

Câu 2. Cho $f(x)$, $g(x)$ là các hàm số xác định và liên tục trên \mathbb{R} . Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

- A.** $\int f(x)g(x)dx = \int f(x)dx \cdot \int g(x)dx$. **B.** $\int 2f(x)dx = 2\int f(x)dx$.
C. $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$. **D.** $\int [f(x) - g(x)]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$.

Lời giải

Nguyên hàm không có tính chất nguyên hàm của tích bằng tích các nguyên hàm.
 Hoặc B, C, D đúng do đó là các tính chất cơ bản của nguyên hàm nên A sai.

Câu 3. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 5^x$.

- A.** $\int f(x)dx = 5^x + C$. **B.** $\int f(x)dx = 5^x \ln 5 + C$.
C. $\int f(x)dx = \frac{5^x}{\ln 5} + C$. **D.** $\int f(x)dx = \frac{5^{x+1}}{x+1} + C$.

Lời giải

Từ công thức nguyên hàm $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ ta có ngay đáp án **C**.

Câu 4. Nếu $\int f(x)dx = \frac{1}{x} + \ln x + C$ thì $f(x)$ là

- A.** $f(x) = \sqrt{x} + \ln x + C$. **B.** $f(x) = -\sqrt{x} + \frac{1}{x} + \ln x + C$.
C. $f(x) = -\frac{1}{x^2} + \ln x + C$. **D.** $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$.

Lời giải

Ta có $\left(\frac{1}{x} + \ln x + C\right)' = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x^2}$, suy ra $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$ là hàm số cần tìm.

Câu 5. Hàm số $F(x) = e^{x^3}$ là một nguyên hàm của hàm số:

- A. $f(x) = e^{x^3}$. B. $f(x) = 3x^2 \cdot e^{x^3}$. C. $f(x) = \frac{e^{x^3}}{3x^2}$. D. $f(x) = x^3 \cdot e^{x^3-1}$.

Lời giải

Ta có $F'(x) = (e^{x^3})' = (x^3)' \cdot e^{x^3} = 3x^2 \cdot e^{x^3}, \forall x \in \mathbb{R}$.

Câu 6. Nếu $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} + e^x + C$ thì $f(x)$ bằng:

- A. $f(x) = x^2 + e^x$. B. $f(x) = \frac{x^4}{3} + e^x$. C. $f(x) = 3x^2 + e^x$. D. $f(x) = \frac{x^4}{12} + e^x$.

Lời giải

Ta có $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} + e^x + C \Rightarrow f(x) = \left(\frac{x^3}{3} + e^x + C \right)' = x^2 + e^x$.

Câu 7. Tính tích phân $A = \int \frac{1}{x \ln x} dx$ bằng cách đặt $t = \ln x$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- A. $A = \int dt$. B. $A = \int \frac{1}{t^2} dt$. C. $A = \int t dt$. D. $A = \int \frac{1}{t} dt$.

Lời giải

Đặt $t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{1}{x} dx$. Khi đó $A = \int \frac{1}{x \ln x} dx = \int \frac{1}{t} dt$.

Câu 8. Tính tích phân $I = \int_0^2 2^{2018x} dx$.

- A. $I = \frac{2^{4036} - 1}{\ln 2}$. B. $I = \frac{2^{4036} - 1}{2018}$. C. $I = \frac{2^{4036}}{2018 \ln 2}$. D. $I = \frac{2^{4036} - 1}{2018 \ln 2}$.

Lời giải

Ta có: $I = \int_0^2 2^{2018x} dx = \left(\frac{1}{2018} \cdot \frac{2^{2018x}}{\ln 2} \right) \Big|_0^2 = \frac{2^{4036} - 1}{2018 \ln 2}$.

Câu 9. Giả sử f là hàm số liên tục trên khoảng K và a, b, c là ba số bất kỳ trên khoảng K . Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $\int_a^a f(x) dx = 1$. B. $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$.
 C. $\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx, c \in (a; b)$. D. $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt$.

Lời giải

Ta có: $\int_a^a f(x) dx = F(a) - F(a) = 0$.

Câu 10. Tính $I = \int 3^x dx$.

- A. $I = \frac{3^x}{\ln 3} + C$. B. $I = 3^x \ln 3 + C$. C. $I = 3^x + C$. D. $I = 3^x + \ln 3 + C$.

Lời giải

Ta có $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ nên $I = \frac{3^x}{\ln 3} + C$.

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và số thực k tùy ý. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

- A. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$. B. $\int_a^b xf(x)dx = x\int_a^b f(x)dx$.
- C. $\int_a^a kf(x)dx = 0$. D. $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.

Lời giải

Dựa vào tính chất của tích phân, A, C, D đúng nên B sai.

Câu 12. Cho $\int_a^c f(x)dx = 17$ và $\int_b^c f(x)dx = -11$ với $a < b < c$. Tính $I = \int_a^b f(x)dx$.

- A. $I = -6$. B. $I = 6$. C. $I = 28$. D. $I = -28$.

Lời giải

Với $a < b < c$: $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$.

$$\Rightarrow I = \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_b^c f(x)dx = 17 + 11 = 28.$$

Câu 13. Tích phân $\int_0^2 \frac{2}{2x+1} dx$ bằng.

- A. $2 \ln 5$. B. $\frac{1}{2} \ln 5$. C. $\ln 5$. D. $4 \ln 5$.

Lời giải

Ta có $\int_0^2 \frac{2}{2x+1} dx = \ln|2x+1| \Big|_0^2 = \ln 5$.

Câu 14. Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên K , $a, b \in K$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định sai?

- A. $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$. B. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$.
- C. $\int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b f(x)dx \cdot \int_a^b g(x)dx$. D. $\int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$.

Lời giải

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \neq \int_a^b f(x)dx \cdot \int_a^b g(x)dx$$

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, cho vector \vec{a} biểu diễn của các vector đơn vị là $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{k} - 3\vec{j}$. Tọa độ của vector \vec{a} là

- A. $(1; 2; -3)$. B. $(2; -3; 1)$. C. $(2; 1; -3)$. D. $(1; -3; 2)$.

Lời giải

$\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{k} - 3\vec{j} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ nên $\vec{a} = (2; -3; 1)$.

Câu 16. Cho $\vec{a} = (-2; 1; 3)$, $\vec{b} = (1; 2; m)$. Vector \vec{a} vuông góc với \vec{b} khi

- A.** $m = 1$. **B.** $m = -1$. **C.** $m = 2$. **D.** $m = 0$.

Lời giải

Ta có: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow -2 + 2 + 3m = 0 \Leftrightarrow m = 0$.

Câu 17. Trong không gian Oxy , phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu tâm $I(1; 0; -2)$, bán kính $r = 4$?

- A.** $(x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 16$. **B.** $(x+1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 16$.
C. $(x+1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4$. **D.** $(x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 4$.

Lời giải

Phương trình mặt cầu tâm $I(1; 0; -2)$, bán kính $r = 4$ có dạng $(x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 16$.

Câu 18. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2; 1; -1)$, $B(-1; 0; 4)$, $C(0; -2; -1)$. Phương trình nào sau đây là phương trình của mặt phẳng đi qua A và vuông góc BC .

- A.** $x - 2y - 5z = 0$. **B.** $x - 2y - 5z - 5 = 0$. **C.** $x - 2y - 5z + 5 = 0$. **D.** $2x - y + 5z - 5 = 0$.

Lời giải

Phương trình mặt phẳng qua $A(2; 1; -1)$ nhận $\vec{BC} = (1; -2; -5)$ làm vtpt:

$$x - 2 - 2(y - 1) - 5(z + 1) = 0 \Leftrightarrow x - 2y - 5z - 5 = 0.$$

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(-1; -1; 1)$, $B(3; 1; 1)$. Phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn AB là

- A.** $2x + y - z - 2 = 0$. **B.** $2x + y - 2 = 0$. **C.** $x + 2y - 2 = 0$. **D.** $x + 2y - z - 2 = 0$.

Lời giải

Gọi I là trung điểm của AB nên $I(1; 0; 1)$.

Mặt phẳng trung trực của đoạn AB có vtpt là $\vec{n} = \vec{AB} = (4; 2; 0) = 2(2; 1; 0)$.

Phương trình mặt phẳng cần tìm là: $2(x - 1) + 1(y - 0) = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 2 = 0$.

Câu 20. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) : $2x - z + 1 = 0$. Tọa độ một vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) là

- A.** $\vec{n} = (2; -1; 1)$. **B.** $\vec{n} = (2; 0; 1)$. **C.** $\vec{n} = (2; 0; -1)$. **D.** $\vec{n} = (2; -1; 0)$.

Lời giải

Vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n} = (2; 0; -1)$.

Câu 21. Cho hàm số $f(x)$ có $f'(x) = \frac{1}{2x-1}$ với mọi $x \neq \frac{1}{2}$ và $f(1) = 1$. Khi đó giá trị của $f(5)$ bằng

- A.** $\ln 2$. **B.** $\ln 3$. **C.** $\ln 2 + 1$. **D.** $\ln 3 + 1$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } \int f'(x) dx = f(x) + C \text{ nên } f(x) = \int \frac{1}{2x-1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{d(2x-1)}{2x-1} = \frac{1}{2} \ln|2x-1| + C$$

$$\text{Mặt khác theo đề ra ta có: } f(1) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \ln|2 \cdot 1 - 1| + C = 1 \Leftrightarrow C = 1 \text{ nên } f(x) = \frac{1}{2} \ln|2x-1| + 1$$

Do vậy $f(5) = \frac{1}{2} \ln|2.5-1| + 1 = \frac{1}{2} \ln 9 + 1 = \ln 3 + 1.$

Câu 22. Tìm họ nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{x-1}{x^2}, x \neq 0?$

A. $F(x) = \ln x + \frac{1}{x} + C.$ **B.** $F(x) = \ln|x| - \frac{1}{x} + C.$

C. $F(x) = -\ln|x| + \frac{1}{x} + C.$

D. $F(x) = \ln|x| + \frac{1}{x} + C.$

Lời giải

Chọn D

Xét $F(x) = \int \frac{x-1}{x^2} dx = \int \frac{x-1}{x^2} dx = \int (\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}) dx = \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{1}{x^2} dx = \ln|x| + \frac{1}{x} + C.$

Câu 23. Hàm số nào trong các hàm số sau đây có một nguyên hàm bằng $\cos^2 x?$

A. $y = \frac{\cos^3 x}{3}.$

B. $y = -\frac{\cos^3 x}{3} + C (C \in \mathbb{R}).$

C. $y = -\sin 2x.$

D. $y = -\sin 2x + C (C \in \mathbb{R}).$

Lời giải

Chọn C

Hàm số $F(x)$ được gọi là một nguyên hàm của $f(x)$ nếu $F'(x) = f(x).$

Ta có: $(\cos^2 x)' = -2 \sin x \cos x = -\sin 2x.$

Câu 24. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2^x + \cos 6x$ là

A. $2^x \ln 2 - 6 \sin 6x + C.$ **B.** $2^x \ln 2 + \frac{1}{6} \sin 6x + C.$

C. $2^x \ln 2 - \frac{1}{6} \sin 6x + C.$ **D.** $\frac{2^x}{\ln 2} + \frac{1}{6} \sin 6x + C.$

Lời giải

Chọn D

$\int f(x) dx = \int (2^x + \cos 6x) dx = \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{1}{6} \sin 6x + C.$

Câu 25. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = (2x-1) \ln x$ là

A. $(x^2 - x) \ln x - \frac{x^2}{2} - x + C.$

B. $(x^2 - x) \ln x - x^2 - x + C.$

C. $(x^2 - x) \ln x + x^2 - x + C.$

D. $(x^2 - x) \ln x - \frac{x^2}{2} + x + C.$

Lời giải

Chọn D

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = (2x-1)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = x^2 - x \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } \int f(x) dx = (x^2 - x) \ln x - \int (x-1) dx = (x^2 - x) \ln x - \frac{x^2}{2} + x + C.$$

Câu 26. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x}(2x - \ln x)$ là

A. $2x - \frac{\ln^2 x}{2} + C.$ **B.** $2x - \frac{1}{x^2} + C.$ **C.** $\frac{2 \ln|x|}{x} - \frac{1}{x} + C.$ **D.** $2x - \frac{\ln x}{x} + C.$

Lời giải

Chọn A

Ta có

$$\int f(x) dx = \int \frac{1}{x}(2x - \ln x) dx = \int 2 dx - \int \ln x d(\ln x) = 2x - \frac{1}{2} \ln^2 x + C.$$

Câu 27. Cho tích phân $\int_{-\frac{\pi}{3}}^0 \cos 2x \cos 4x dx = a + b\sqrt{3}$, trong đó a, b là các hằng số hữu tỉ. Tính $e^a + \log_2 |b|$.

A. $-2.$ **B.** $-3.$ **C.** $\frac{1}{8}.$ **D.** $0.$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \int_{-\frac{\pi}{3}}^0 \cos 2x \cos 4x dx = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{3}}^0 (\cos 6x + \cos 2x) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} \sin 6x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_{-\frac{\pi}{3}}^0 = -\frac{1}{8} \sqrt{3}.$$

Do đó ta có $a = 0, b = -\frac{1}{8}$. Vậy $e^a + \log_2 |b| = e^0 + \log_2 \frac{1}{8} = -2$.

Câu 28. Tìm khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau

A. $\int_0^1 \sin(1-x) dx = \int_0^1 \sin x dx.$ **B.** $\int_0^1 \cos(1-x) dx = -\int_0^1 \cos x dx.$

C. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \frac{x}{2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx.$ **D.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \frac{x}{2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx.$

Lời giải

Xét tích phân $\int_0^1 \sin(1-x) dx$

Đặt $1-x = t \Rightarrow dx = -dt$. Khi $x = 0 \Rightarrow t = 1$; Khi $x = 1 \Rightarrow t = 0$.

$$\text{Do đó } \int_0^1 \sin(1-x) dx = \int_1^0 \sin t (-dt) = \int_0^1 \sin t dt = \int_0^1 \sin x dx.$$

Câu 29. Biết $f(x)$ là hàm liên tục trên \mathbb{R} và $\int_0^9 f(x) dx = 9$. Khi đó giá trị của $\int_1^4 f(3x-3) dx$ là

A. 27.

B. 3.

C. 24.

D. 0.

Lời giải

$$\text{Gọi } I = \int_1^4 f(3x-3)dx.$$

$$\text{Đặt } t = 3x-3 \Rightarrow dt = 3dx \Rightarrow dx = \frac{1}{3}dt. \text{ Đổi cận: } x=1 \Rightarrow t=0; x=4 \Rightarrow t=9.$$

$$\text{Khi đó: } I = \frac{1}{3} \int_0^9 f(t)dt = \frac{1}{3} \cdot 9 = 3.$$

Câu 30. Cho $\int_0^6 f(x)dx = 12$. Tính $I = \int_0^2 f(3x)dx$.

A. $I = 6$.

B. $I = 36$.

C. $I = 2$.

D. $I = 4$.

Lời giải

$$\text{Ta có } I = \int_0^2 f(3x)dx = \int_0^2 f(3x) \frac{d(3x)}{3} = \frac{1}{3} \int_0^6 f(x)dx = \frac{12}{3} = 4.$$

Câu 31. Cho $F(x) = \frac{1}{2x^2}$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)}{x}$. Tính $\int_1^e f'(x) \ln x dx$ bằng:

A. $I = \frac{e^2 - 3}{2e^2}$.

B. $I = \frac{2 - e^2}{e^2}$.

C. $I = \frac{e^2 - 2}{e^2}$.

D. $I = \frac{3 - e^2}{2e^2}$.

Lời giải

$$\text{Do } F(x) = \frac{1}{2x^2} \text{ là một nguyên hàm của hàm số } \frac{f(x)}{x} \text{ nên } \frac{f(x)}{x} = \left(\frac{1}{2x^2} \right)' \Leftrightarrow f(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

$$\text{Tính } I = \int_1^e f'(x) \ln x dx. \text{ Đặt } \begin{cases} \ln x = u \\ f'(x) dx = dv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} dx = du \\ f(x) = v \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó } I = f(x) \cdot \ln(x) \Big|_1^e - \int_1^e \frac{f'(x)}{x} dx = -\frac{1}{x^2} \cdot \ln(x) \Big|_1^e - \frac{1}{2x^2} \Big|_1^e = \frac{e^2 - 3}{2e^2}.$$

Câu 32. Trong không gian với hệ trục tọa độ, cho hình bình hành $ABCD$. Biết $A(2;1;-3)$, $B(0;-2;5)$ và $C(1;1;3)$. Diện tích hình bình hành $ABCD$ là

A. $2\sqrt{87}$.

B. $\frac{\sqrt{349}}{2}$.

C. $\sqrt{349}$.

D. $\sqrt{87}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \overline{AB} = (-2; -3; 8) \text{ và } \overline{AC} = (-1; 0; 6) \Rightarrow [\overline{AB}, \overline{AC}] = (-18; 4; -3).$$

$$\text{Vậy: } S_{ABCD} = \left| [\overline{AB}, \overline{AC}] \right| = \sqrt{(-18)^2 + 4^2 + (-3)^2} = \sqrt{349}.$$

Câu 33. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 5 = 0$. Tính diện tích mặt cầu (S) .

A. 42π .

B. 36π .

C. 9π .

D. 12π .

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} - 5 = 3$.

Diện tích mặt cầu (S) : $S = 4\pi R^2 = 4\pi 3^2 = 36\pi$.

Câu 34. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2;0;1)$. Gọi A, B lần lượt là hình chiếu của M trên trục Ox và trên mặt phẳng (Oyz) . Viết phương trình mặt trung trực của đoạn AB .

A. $4x - 2z - 3 = 0$.

B. $4x - 2y - 3 = 0$.

C. $4x - 2z + 3 = 0$.

D. $4x + 2z + 3 = 0$.

Lời giải

A là hình chiếu của $M(2;0;1)$ trên trục Ox nên ta có $A(2;0;0)$.

B là hình chiếu của $M(2;0;1)$ trên mặt phẳng (Oyz) nên ta có $B(0;0;1)$.

Gọi I là trung điểm AB . Ta có $I\left(1;0;\frac{1}{2}\right)$.

Mặt trung trực đoạn AB đi qua I và nhận $\vec{BA} = (2;0;-1)$ làm véc tơ pháp tuyến nên có phương trình $2(x-1) - 1\left(z - \frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow 4x - 2z - 3 = 0$.

Câu 35. Trong không gian $Oxyz$, phương trình của mặt phẳng (P) đi qua điểm $B(2;1;-3)$, đồng thời vuông góc với hai mặt phẳng $(Q): x + y + 3z = 0$, $(R): 2x - y + z = 0$ là

A. $4x + 5y - 3z + 22 = 0$.

B. $4x - 5y - 3z - 12 = 0$.

C. $2x + y - 3z - 14 = 0$.

D. $4x + 5y - 3z - 22 = 0$.

Lời giải

Mặt phẳng $(Q): x + y + 3z = 0$, $(R): 2x - y + z = 0$ có các vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1 = (1;1;3)$ và $\vec{n}_2 = (2;-1;1)$.

Vì (P) vuông góc với hai mặt phẳng (Q) , (R) nên (P) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2] = (4;5;-3)$.

Ta lại có (P) đi qua điểm $B(2;1;-3)$ nên $(P): 4(x-2) + 5(y-1) - 3(z+3) = 0 \Leftrightarrow 4x + 5y - 3z - 22 = 0$.

Tự luận

Câu 1. Tính $I = \int_0^{\ln 2} \frac{1}{e^x + 3e^{-x} + 4} dx$

Lời giải

$$I = \int_0^{\ln 2} \frac{1}{e^x + 3e^{-x} + 4} dx = \int_0^{\ln 2} \frac{e^x dx}{e^{2x} + 4e^x + 3}$$

Đặt $t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx$. Đổi cận: với $x=0$ thì $t=1$, với $x=\ln 2$ thì $t=2$. Khi đó,

$$I = \int_1^2 \frac{dt}{t^2 + 4t + 3} = \int_1^2 \frac{1}{(t+1)(t+3)} dt = \frac{1}{2} \int_1^2 \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+3} \right) dt = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t+1}{t+3} \right| \Big|_1^2$$

$$= \frac{1}{2} \left(\ln \frac{3}{5} - \ln \frac{1}{2} \right).$$

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1;2]$ thỏa mãn $\int_1^2 (x-1)^2 f(x) dx = -\frac{1}{3}$,
 $f(2) = 0$ và $\int_1^2 [f'(x)]^2 dx = 7$. Tính tích phân $I = \int_1^2 f(x) dx$.

Lời giải

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = f(x) \\ dv = (x-1)^2 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = \frac{(x-1)^3}{3} \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó, } \int_1^2 (x-1)^2 f(x) dx = \left. \frac{(x-1)^3 f(x)}{3} \right|_1^2 - \frac{1}{3} \int_1^2 (x-1)^3 f'(x) dx$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{3} = -\frac{1}{3} \int_1^2 (x-1)^3 f'(x) dx \quad (\text{vì } f(2) = 0)$$

$$\Rightarrow \int_1^2 (x-1)^3 f'(x) dx = 1.$$

$$\text{Ta lại có: } \begin{cases} \int_1^2 [f'(x)]^2 dx = 7 \\ \int_1^2 14(x-1)^3 f'(x) dx = 14 \\ \int_1^2 49(x-1)^6 dx = 7(x-1)^7 \Big|_1^2 = 7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_1^2 [f'(x)]^2 dx - \int_1^2 14(x-1)^3 f'(x) dx + \int_1^2 49(x-1)^6 dx = 0$$

$$\Rightarrow \int_1^2 [f'(x) - 7(x-1)^3]^2 dx = 0 \quad (1), \text{ mà } \int_1^2 [f'(x) - 7(x-1)^3]^2 dx \geq 0.$$

$$\text{nên } (1) \Rightarrow f'(x) - 7(x-1)^3 = 0 \Rightarrow f'(x) = 7(x-1)^3 \Rightarrow f(x) = \frac{7(x-1)^4}{4} + C.$$

$$\text{Mà } f(2) = 0 \Leftrightarrow \frac{7}{4} + C = 0 \Leftrightarrow C = -\frac{7}{4} \Rightarrow f(x) = \frac{7}{4} [(x-1)^4 - 1].$$

$$\Rightarrow I = \int_1^2 f(x) dx = \frac{7}{4} \int_1^2 [(x-1)^4 - 1] dx = \frac{7}{4} \left[\frac{(x-1)^5}{5} - x \right] \Big|_1^2 = -\frac{7}{5}.$$

$$\text{Vậy } I = -\frac{7}{5}.$$

Câu 3. Biết rằng $F(x)$ là một nguyên hàm trên \mathbb{R} của hàm số $f(x) = \frac{2017x}{(x^2+1)^{2018}}$ thỏa mãn $F(1) = 0$.

Tìm giá trị nhỏ nhất m của $F(x)$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \int f(x) dx &= \int \frac{2017x}{(x^2+1)^{2018}} dx = \frac{2017}{2} \int (x^2+1)^{-2018} d(x^2+1) = \frac{2017}{2} \cdot \frac{(x^2+1)^{-2017}}{-2017} + C \\ &= -\frac{1}{2(x^2+1)^{2017}} + C = F(x) \end{aligned}$$

$$\text{Mà } F(1) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2 \cdot 2^{2017}} + C = 0 \Rightarrow C = \frac{1}{2^{2018}}$$

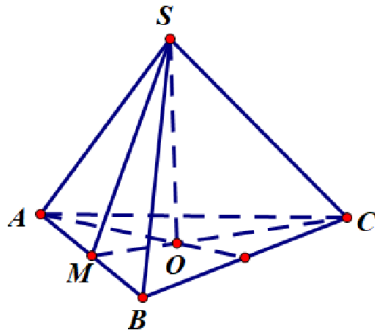
$$\text{Do đó } F(x) = -\frac{1}{2 \cdot (x^2+1)^{2017}} + \frac{1}{2^{2018}} \text{ suy ra}$$

$$F(x) \text{ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi } \frac{1}{2(x^2+1)^{2017}} \text{ lớn nhất} \Leftrightarrow (x^2+1) \text{ nhỏ nhất} \Leftrightarrow x = 0$$

$$\text{Vậy } m = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{2018}} = \frac{1-2^{2017}}{2^{2018}}.$$

Câu 4. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh $AB = a$, góc tạo bởi (SAB) và (ABC) bằng 60° .
 Tính diện tích xung quanh của hình nón đỉnh S và có đường tròn đáy ngoại tiếp tam giác ABC

Lời giải



Gọi M là trung điểm AB và gọi O là tâm của tam giác ABC ta có :

$$\begin{cases} AB \perp CM \\ AB \perp SO \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SCM) \Rightarrow AB \perp SM \text{ và } AB \perp CM$$

Do đó góc giữa (SAB) và (ABC) là $\widehat{SMO} = 60^\circ$.

$$\text{Mặt khác tam giác } ABC \text{ đều cạnh } a \text{ nên } CM = \frac{a\sqrt{3}}{2}. \text{ Suy ra } OM = \frac{1}{3}CM = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

$$SO = OM \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{6} \cdot \sqrt{3} = \frac{a}{2}.$$

Hình nón đã cho có chiều cao $h = SO = \frac{a}{2}$, bán kính đáy $R = OA = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, độ dài đường sinh

$$l = \sqrt{h^2 + R^2} = \frac{a\sqrt{21}}{6}.$$

$$\text{Diện tích xung quanh hình nón là: } S_{xq} = \pi \cdot R \cdot l = \pi \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{a\sqrt{21}}{6} = \frac{\sqrt{7}\pi a^2}{6}$$

Trắc nghiệm

Câu 1. Nguyên hàm của hàm số $y = x^2 - 3x + \frac{1}{x}$ là

- A. $\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} - \ln|x| + C$. B. $\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \frac{1}{x^2} + C$.
 C. $\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \ln x + C$. D. $\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \ln|x| + C$.

Câu 2. Họ các nguyên hàm của hàm số $y = \cos 4x$ là

- A. $-\frac{1}{4}\sin 4x + C$. B. $\frac{1}{4}\sin 4x + C$. C. $\sin 4x + C$. D. $\frac{1}{4}\sin x + C$.

Câu 3. Chọn mệnh đề đúng?

- A. $\int \sin(3-5x) dx = 5 \cos(3-5x) + C$. B. $\int \sin(3-5x) dx = -\frac{1}{5} \cos(3-5x) + C$.
 C. $\int \sin(3-5x) dx = \frac{1}{5} \cos(5x-3) + C$. D. $\int \sin(3-5x) dx = -\frac{1}{3} \cos(3-5x) + C$.

Câu 4. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 5^{2x}$.

- A. $\int 5^{2x} dx = 2 \cdot \frac{5^{2x}}{\ln 5} + C$. B. $\int 5^{2x} dx = \frac{25^x}{2 \ln 5} + C$.
 C. $\int 5^{2x} dx = 2 \cdot 5^{2x} \ln 5 + C$. D. $\int 5^{2x} dx = \frac{25^{x+1}}{x+1} + C$.

Câu 5. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos x$ là

- A. $-\sin x + C$. B. $\sin x + C$. C. $\cos x + C$. D. $-\cos x + C$.

Câu 6. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin(2x+1)$ là:

- A. $F(x) = -\frac{1}{2} \cos(2x+1) + C$. B. $F(x) = \frac{1}{2} \cos(2x+1) + C$.
 C. $F(x) = -\frac{1}{2} \cos(2x+1)$. D. $F(x) = \cos(2x+1)$.

Câu 7. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

- A. $\int f(x) dx = \ln^2 x + C$. B. $\int f(x) dx = \frac{1}{2} \ln^2 x + C$.
 C. $\int f(x) dx = \ln x + C$. D. $\int f(x) dx = e^x + C$

Câu 8. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) dx$.

- A. $I = \frac{\pi}{4}$. B. $I = -1$. C. $I = 0$. D. $I = 1$.

Câu 9. $\int_{-3}^0 \frac{1}{1-x} dx$ bằng:

- A. $-2 \ln 2$. B. $2 \ln 2 - 1$. C. $\ln 2$. D. $2 \ln 2$.

Câu 10. Tính tích phân $\int_0^1 3^x dx$.

- A. $\frac{2}{\ln 3}$. B. $\frac{3}{\ln 3}$. C. $\frac{9}{5}$. D. $2 \ln 3$

Câu 11. Cho hàm số $f(x)$ và $F(x)$ liên tục trên \mathbb{R} thỏa $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Tính $\int_0^1 f(x) dx$ biết $F(0) = 2$ và $F(1) = 5$.

- A. $\int_0^1 f(x) dx = -3$. B. $\int_0^1 f(x) dx = 7$. C. $\int_0^1 f(x) dx = 1$. D. $\int_0^1 f(x) dx = 3$.

Câu 12. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$. Tìm khẳng định sai.

- A. $\int_a^b f(x) dx = F(a) - F(b)$. B. $\int_a^a f(x) dx = 0$.
 C. $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$. D. $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$.

Câu 13. Tích phân $I = \int_0^{2018} 2^x dx$ bằng

- A. $2^{2018} - 1$. B. $\frac{2^{2018} - 1}{\ln 2}$. C. $\frac{2^{2018}}{\ln 2}$. D. 2^{2018} .

Câu 14. Khẳng định nào sau đây sai?

- A. $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$. B. $\int_a^b f(x) dx = \int_c^b f(x) dx + \int_a^c f(x) dx$.
 C. $\int_a^b f(x) dx = \int_b^a f(x) dx$. D. $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt$.

Câu 15. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ với $A(0; 0; 3)$, $B(0; 0; -1)$, $C(1; 0; -1)$, $D(0; 1; -1)$. Mệnh đề nào dưới đây sai?

- A. $AB \perp BD$. B. $AB \perp BC$. C. $AB \perp AC$. D. $AB \perp CD$.

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a} = (1; -1; 2)$, $\vec{b} = (3; 0; -1)$ và $\vec{c} = (-2; 5; 1)$. Tọa độ của vectơ $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ là:

- A. $\vec{u} = (-6; 6; 0)$. B. $\vec{u} = (6; -6; 0)$. C. $\vec{u} = (6; 0; -6)$. D. $\vec{u} = (0; 6; -6)$.

Câu 17. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 4z + 5 = 0$. Tọa độ tâm và bán kính của (S) là

- A. $I(2; 4; 4)$ và $R = 2$. B. $I(-1; 2; 2)$ và $R = 2$.

- C. $I(1; -2; -2)$ và $R=2$.
 D. $I(1; -2; -2)$ và $R=\sqrt{14}$.
- Câu 18.** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-2y+3z-1=0$. Mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến là
 A. $\vec{n} = (-2; 1; 3)$. B. $\vec{n} = (1; 3; -2)$. C. $\vec{n} = (1; -2; 1)$. D. $\vec{n} = (1; -2; 3)$.
- Câu 19.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $M(3; 0; 0)$, $N(0; -2; 0)$ và $P(0; 0; 2)$. Mặt phẳng (MNP) có phương trình là
 A. $\frac{x}{3} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{2} = -1$. B. $\frac{x}{3} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{2} = 0$. C. $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} + \frac{z}{-2} = 1$. D. $\frac{x}{3} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{2} = 1$.
- Câu 20.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(3; -1; -2)$ và mặt phẳng $(P): 3x-y+2z+4=0$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua M và song song với (P) ?
 A. $(Q): 3x-y+2z+6=0$. B. $(Q): 3x-y-2z-6=0$.
 C. $(Q): 3x-y+2z-6=0$. D. $(Q): 3x+y-2z-14=0$.
- Câu 21.** Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + 2^x$ thỏa mãn $F(0) = 0$. Ta có $F(x)$ bằng
 A. $x^2 + \frac{2^x - 1}{\ln 2}$. B. $x^2 + \frac{1 - 2^x}{\ln 2}$. C. $1 + (2^x - 1) \ln 2$. D. $x^2 + 2^x - 1$.
- Câu 22.** Tính nguyên hàm $\int \frac{dx}{x^2 - x}$ được kết quả là:
 A. $\ln \left| \frac{x-1}{x} \right| + C$. B. $\ln \left| \frac{x}{x-1} \right| + C$. C. $\ln |x^2 - x| + C$. D. $\ln \frac{x-1}{x} + C$.
- Câu 23.** Tìm họ nguyên hàm của hàm số $y = x^2 - 3^x + \frac{1}{x}$.
 A. $\frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} - \ln|x| + C, C \in \mathbb{R}$. B. $\frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} + \ln|x| + C, C \in \mathbb{R}$
 C. $\frac{x^3}{3} - 3^x + \frac{1}{x^2} + C, C \in \mathbb{R}$. D. $\frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} - \frac{1}{x^2} + C, C \in \mathbb{R}$.
- Câu 24.** Nếu $\int f(x) dx = 4x^3 + x^2 + C$ thì hàm số $f(x)$ bằng
 A. $f(x) = x^4 + \frac{x^3}{3} + x$. B. $f(x) = 12x^2 + 2x + C$.
 C. $f(x) = 12x^2 + 2x$. D. $f(x) = x^4 + \frac{x^3}{3}$.
- Câu 25.** Cho $F(x) = \frac{x^2 \cdot \ln x}{a} - \frac{x^2}{b}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = x \ln x$ (a, b là hằng số). Tính $a^2 - b$.
 A. 8. B. 0. C. 1. D. $\frac{1}{2}$.

Câu 26. Cho $\int_1^2 f(x)dx = 2$ và $\int_1^2 2g(x)dx = 8$. Khi đó thì $\int_1^2 [f(x) + g(x)]dx$ bằng
A. 6. **B.** 10. **C.** 18. **D.** 0.

Câu 27. Cho hàm số f liên tục trên đoạn $[0;6]$. Nếu $\int_1^5 f(x)dx = 2$ và $\int_1^3 f(x)dx = 7$ thì $\int_3^5 f(x)dx$ có giá trị bằng.
A. 5. **B.** -5. **C.** 9. **D.** -9.

Câu 28. Tích phân $I = \int_0^1 \frac{1}{x^2 - x - 2} dx$ có giá trị bằng.
A. $\frac{2\ln 2}{3}$. **B.** $-2\ln 2$. **C.** $-\frac{2\ln 2}{3}$. **D.** $2\ln 2$.

Câu 29. Cho $I = \int_0^4 x\sqrt{1+2x} dx$ và $u = \sqrt{2x+1}$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?
A. $I = \frac{1}{2} \int_1^3 x^2(x^2 - 1) dx$. **B.** $I = \int_1^3 u^2(u^2 - 1) du$.
C. $I = \frac{1}{2} \left(\frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} \right) \Big|_1^3$. **D.** $I = \frac{1}{2} \int_1^3 u^2(u^2 - 1) du$.

Câu 30. Cho tích phân $I = \int_1^e \frac{3\ln x + 1}{x} dx$. Nếu đặt $t = \ln x$ thì
A. $I = \int_0^1 \frac{3t+1}{e^t} dt$. **B.** $I = \int_1^e \frac{3t+1}{t} dt$. **C.** $I = \int_1^e (3t+1) dt$. **D.** $I = \int_0^1 (3t+1) dt$.

Câu 31. Biết $\int_2^3 \frac{5x+12}{x^2+5x+6} dx = a \ln 2 + b \ln 5 + c \ln 6$. Tính $S = 3a + 2b + c$.
A. 3. **B.** -14. **C.** -2. **D.** -11.

Câu 32. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Biết $A(2;4;0)$, $B(4;0;0)$, $C(-1;4;-7)$ và $D'(6;8;10)$. Tọa độ điểm B' là
A. $B'(8;4;10)$. **B.** $B'(6;12;0)$. **C.** $B'(10;8;6)$. **D.** $B'(13;0;17)$.

Câu 33. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;0;0)$, $C(0;0;3)$, $B(0;2;0)$. Tập hợp các điểm M thỏa mãn $MA^2 = MB^2 + MC^2$ là mặt cầu có bán kính là:
A. $R = 2$. **B.** $R = \sqrt{3}$. **C.** $R = 3$. **D.** $R = \sqrt{2}$.

Câu 34. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A = (4;0;1)$ và $B = (-2;2;3)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB ?
A. $3x - y - z = 0$. **B.** $3x + y + z - 6 = 0$.
C. $3x - y - z + 1 = 0$. **D.** $6x - 2y - 2z - 1 = 0$.

Câu 35. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có A trùng với gốc tọa độ. Cho $B(a;0;0)$, $D(0;a;0)$, $A'(0;0;b)$ với $a > 0$, $b > 0$. Gọi M là trung điểm của cạnh CC' . Xác định tỉ số $\frac{a}{b}$ để $(A'BD)$ vuông góc với (BDM) .

A. $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$.

B. $\frac{a}{b} = 1$.

C. $\frac{a}{b} = -1$.

D. $\frac{a}{b} = 2$.

Tự luận

Câu 1. Tính $\int_0^1 x \ln(x+2) dx$

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên \mathbb{R} thỏa mãn $3f'(x) \cdot e^{f^3(x)-x^2-1} - \frac{2x}{f^2(x)} = 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Biết

$f(0) = 1$, tính tích phân $\int_0^{\sqrt{7}} x \cdot f(x) dx$.

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{1}{x-1}$, $f(0) = 2017$, $f(2) = 2018$.

Tính $S = (f(3) - 2018)(f(-1) - 2017)$.

Câu 4. Cho hình nón đỉnh S , đáy là đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Biết rằng $AB = BC = 10a$, $AC = 12a$, góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAB) và (ABC) bằng 45° . Tính thể tích V của khối nón đã cho.

Nguyễn Bảo Vương

Trắc nghiệm

BẢNG ĐÁP ÁN

1.D	2.B	3.C	4.B	5.B	6.A	7.B	8.C	9.D	10.A
11.D	12.A	13.B	14.C	15.C	16.B	17.C	18.D	19.D	20.C
21.A	22.A	23.B	24.C	25.B	26.A	27.B	28.C	29.B	30.D
31.D		32.D	33.D	34.A	35.B				

Câu 1. Nguyên hàm của hàm số $y = x^2 - 3x + \frac{1}{x}$ là

- A. $\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} - \ln|x| + C$. B. $\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \frac{1}{x^2} + C$.
 C. $\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \ln x + C$. D. $\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \ln|x| + C$.

Lời giải

Áp dụng công thức nguyên hàm ta có $\int \left(x^2 - 3x + \frac{1}{x} \right) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \ln|x| + C$.

Câu 2. Họ các nguyên hàm của hàm số $y = \cos 4x$ là

- A. $-\frac{1}{4} \sin 4x + C$. B. $\frac{1}{4} \sin 4x + C$. C. $\sin 4x + C$. D. $\frac{1}{4} \sin x + C$.

Lời giải

Câu 3. Chọn mệnh đề đúng?

- A. $\int \sin(3-5x) dx = 5 \cos(3-5x) + C$. B. $\int \sin(3-5x) dx = -\frac{1}{5} \cos(3-5x) + C$.
 C. $\int \sin(3-5x) dx = \frac{1}{5} \cos(5x-3) + C$. D. $\int \sin(3-5x) dx = -\frac{1}{3} \cos(3-5x) + C$.

Lời giải

$\int \sin(3-5x) dx = \frac{1}{5} \cos(3-5x) + C = \cos(5x-3) + C$.

Câu 4. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 5^{2x}$.

- A. $\int 5^{2x} dx = 2 \cdot \frac{5^{2x}}{\ln 5} + C$. B. $\int 5^{2x} dx = \frac{25^x}{2 \ln 5} + C$.
 C. $\int 5^{2x} dx = 2 \cdot 5^{2x} \ln 5 + C$. D. $\int 5^{2x} dx = \frac{25^{x+1}}{x+1} + C$.

Lời giải

Ta có $\int 5^{2x} dx = \int 25^x dx = \frac{25^x}{\ln 25} + C = \frac{25^x}{2 \ln 5} + C$.

Câu 5. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos x$ là

- A. $-\sin x + C$. B. $\sin x + C$. C. $\cos x + C$. D. $-\cos x + C$.

Lời giải

Ta có: $\int f(x)dx = \int \cos x dx = \sin x + C$.

Câu 6. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin(2x+1)$ là:

A. $F(x) = -\frac{1}{2}\cos(2x+1) + C$.

B. $F(x) = \frac{1}{2}\cos(2x+1) + C$.

C. $F(x) = -\frac{1}{2}\cos(2x+1)$.

D. $F(x) = \cos(2x+1)$.

Lời giải

$$\int \sin(2x+1)dx = \frac{1}{2} \int \sin(2x+1)d(2x+1) = -\frac{1}{2}\cos(2x+1) + C.$$

Câu 7. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

A. $\int f(x)dx = \ln^2 x + C$. **B.** $\int f(x)dx = \frac{1}{2}\ln^2 x + C$.

C. $\int f(x)dx = \ln x + C$ **D.** $\int f(x)dx = e^x + C$

Lời giải

Ta có $\int f(x)dx = \int \ln x d(\ln x) = \frac{1}{2}\ln^2 x + C$.

Câu 8. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) dx$.

A. $I = \frac{\pi}{4}$.

B. $I = -1$.

C. $I = 0$.

D. $I = 1$.

Lời giải

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) dx = \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

Câu 9. $\int_{-3}^0 \frac{1}{1-x} dx$ bằng:

A. $-2\ln 2$.

B. $2\ln 2 - 1$.

C. $\ln 2$.

D. $2\ln 2$.

Lời giải

Ta có: $\int_{-3}^0 \frac{1}{1-x} dx = (-\ln|1-x|) \Big|_{-3}^0 = \ln 4 = 2\ln 2$.

Câu 10. Tính tích phân $\int_0^1 3^x dx$.

A. $\frac{2}{\ln 3}$.

B. $\frac{3}{\ln 3}$.

C. $\frac{9}{5}$.

D. $2\ln 3$

Lời giải

Áp dụng công thức ta có: $\int_0^1 3^x dx = \frac{3^x}{\ln 3} \Big|_0^1 = \frac{2}{\ln 3}$.

- Câu 11.** Cho hàm số $f(x)$ và $F(x)$ liên tục trên \mathbb{R} thỏa $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Tính $\int_0^1 f(x) dx$ biết $F(0) = 2$ và $F(1) = 5$.
- A.** $\int_0^1 f(x) dx = -3$. **B.** $\int_0^1 f(x) dx = 7$. **C.** $\int_0^1 f(x) dx = 1$. **D.** $\int_0^1 f(x) dx = 3$.

Lời giải

Ta có: $\int_0^1 f(x) dx = F(1) - F(0) = 3$.

- Câu 12.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$. Tìm khẳng định **sai**.
- A.** $\int_a^b f(x) dx = F(a) - F(b)$. **B.** $\int_a^a f(x) dx = 0$.
- C.** $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$. **D.** $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$.

Lời giải

Định nghĩa và tính chất của tích phân $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$.

- Câu 13.** Tích phân $I = \int_0^{2018} 2^x dx$ bằng

A. $2^{2018} - 1$. **B.** $\frac{2^{2018} - 1}{\ln 2}$. **C.** $\frac{2^{2018}}{\ln 2}$. **D.** 2^{2018} .

Lời giải

$$I = \int_0^{2018} 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} \Big|_0^{2018} = \frac{2^{2018} - 1}{\ln 2}$$

- Câu 14.** Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$. **B.** $\int_a^b f(x) dx = \int_c^b f(x) dx + \int_a^c f(x) dx$.

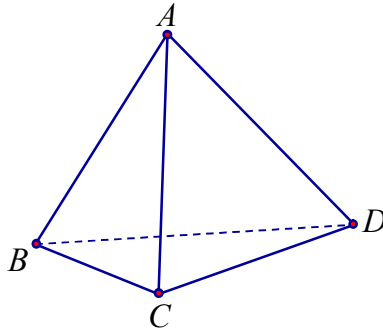
C. $\int_a^b f(x) dx = \int_b^a f(x) dx$. **D.** $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt$.

Lời giải

Chọn $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$.

- Câu 15.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ với $A(0; 0; 3)$, $B(0; 0; -1)$, $C(1; 0; -1)$, $D(0; 1; -1)$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?
- A.** $AB \perp BD$. **B.** $AB \perp BC$. **C.** $AB \perp AC$. **D.** $AB \perp CD$.

Lời giải



Ta có $\overline{AB} = (0; 0; -4)$, $\overline{AC} = (1; 0; -4) \Rightarrow \overline{AB} \cdot \overline{AC} = 16 \neq 0 \Rightarrow AB$ và AC không vuông góc.

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a} = (1; -1; 2)$, $\vec{b} = (3; 0; -1)$ và $\vec{c} = (-2; 5; 1)$. Toạ độ của vectơ $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ là:

- A.** $\vec{u} = (-6; 6; 0)$. **B.** $\vec{u} = (6; -6; 0)$. **C.** $\vec{u} = (6; 0; -6)$. **D.** $\vec{u} = (0; 6; -6)$.

Lời giải

$$\vec{u} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c} = (1+3+2; -1+0-5; 2-1-1) = (6; -6; 0).$$

Câu 17. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 4z + 5 = 0$. Toạ độ tâm và bán kính của (S) là

- A.** $I(2; 4; 4)$ và $R = 2$. **B.** $I(-1; 2; 2)$ và $R = 2$.
C. $I(1; -2; -2)$ và $R = 2$. **D.** $I(1; -2; -2)$ và $R = \sqrt{14}$.

Lời giải

Phương trình mặt cầu có dạng: $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ ($a^2 + b^2 + c^2 > d$)

$$\Rightarrow a = 1, b = -2, c = -2, d = 5.$$

Vậy tâm mặt cầu là $I(1; -2; -2)$ và bán kính mặt cầu $R = \sqrt{1+4+4-5} = 2$.

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + 3z - 1 = 0$. Mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến là

- A.** $\vec{n} = (-2; 1; 3)$. **B.** $\vec{n} = (1; 3; -2)$. **C.** $\vec{n} = (1; -2; 1)$. **D.** $\vec{n} = (1; -2; 3)$.

Lời giải

Mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1; -2; 3)$.

Câu 19. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $M(3; 0; 0)$, $N(0; -2; 0)$ và $P(0; 0; 2)$. Mặt phẳng (MNP) có phương trình là

- A.** $\frac{x}{3} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{2} = -1$. **B.** $\frac{x}{3} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{2} = 0$. **C.** $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} + \frac{z}{-2} = 1$. **D.** $\frac{x}{3} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{2} = 1$.

Lời giải

Mặt phẳng (MNP) có phương trình là $\frac{x}{3} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{2} = 1$.

Câu 20. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(3; -1; -2)$ và mặt phẳng $(P): 3x - y + 2z + 4 = 0$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua M và song song với (P) ?

- A.** $(Q): 3x - y + 2z + 6 = 0$. **B.** $(Q): 3x - y - 2z - 6 = 0$.

C. (Q): $3x - y + 2z - 6 = 0$.

D. (Q): $3x + y - 2z - 14 = 0$.

Lời giải

Vì (Q) // (P) nên (Q): $3x - y + 2z + m = 0$ ($m \neq 4$)

Mà $M(3; -1; -2) \in (P) \Rightarrow m = -6$ (thỏa mãn).

Vậy (Q): $3x - y + 2z - 6 = 0$.

Câu 21. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + 2^x$ thỏa mãn $F(0) = 0$. Ta có $F(x)$ bằng

A. $x^2 + \frac{2^x - 1}{\ln 2}$.

B. $x^2 + \frac{1 - 2^x}{\ln 2}$.

C. $1 + (2^x - 1) \ln 2$.

D. $x^2 + 2^x - 1$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\int (2x + 2^x) dx = x^2 + \frac{2^x}{\ln 2} + C$. Do đó.

Theo giả thiết $F(0) = 0 \Leftrightarrow 0^2 + \frac{2^0}{\ln 2} + C = 0 \Leftrightarrow C = -\frac{1}{\ln 2}$.

Vậy $F(x) = x^2 + \frac{2^x}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2} = x^2 + \frac{2^x - 1}{\ln 2}$.

Câu 22. Tính nguyên hàm $\int \frac{dx}{x^2 - x}$ được kết quả là:

A. $\ln \left| \frac{x-1}{x} \right| + C$.

B. $\ln \left| \frac{x}{x-1} \right| + C$.

C. $\ln |x^2 - x| + C$.

D. $\ln \frac{x-1}{x} + C$.

Lời giải

Chọn A

$\int \frac{dx}{x^2 - x} = \int \frac{dx}{x(x-1)} = \int \frac{1}{x-1} dx - \int \frac{dx}{x} = \ln |x-1| - \ln |x| + C = \ln \left| \frac{x-1}{x} \right| + C$.

Câu 23. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $y = x^2 - 3^x + \frac{1}{x}$.

A. $\frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} - \ln |x| + C, C \in \mathbb{R}$.

B. $\frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} + \ln |x| + C, C \in \mathbb{R}$.

C. $\frac{x^3}{3} - 3^x + \frac{1}{x^2} + C, C \in \mathbb{R}$.

D. $\frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} - \frac{1}{x^2} + C, C \in \mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\int \left(x^2 - 3^x + \frac{1}{x} \right) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} + \ln |x| + C, C \in \mathbb{R}$.

Câu 24. Nếu $\int f(x) dx = 4x^3 + x^2 + C$ thì hàm số $f(x)$ bằng

A. $f(x) = x^4 + \frac{x^3}{3} + x$. B. $f(x) = 12x^2 + 2x + C$.

C. $f(x) = 12x^2 + 2x$.

D. $f(x) = x^4 + \frac{x^3}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Theo định nghĩa nguyên hàm ta có: $f(x) = (4x^3 + x^2 + C)' = 12x^2 + 2x$.

Câu 25. Cho $F(x) = \frac{x^2 \cdot \ln x}{a} - \frac{x^2}{b}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = x \ln x$ (a, b là hằng số). Tính $a^2 - b$.

A. 8.

B. 0.

C. 1.

D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}.$$

$$\int x \ln x dx = \frac{x^2 \ln x}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C.$$

Vậy $a = 2, b = 4 \Rightarrow a^2 - b = 0$.

Câu 26. Cho $\int_1^2 f(x) dx = 2$ và $\int_1^2 2g(x) dx = 8$. Khi đó thì $\int_1^2 [f(x) + g(x)] dx$ bằng

A. 6.

B. 10.

C. 18.

D. 0.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Có } \int_1^2 f(x) dx = 2, \int_1^2 2g(x) dx = 8 \Rightarrow \int_1^2 g(x) dx = 4.$$

$$\text{Suy ra } \int_1^2 [f(x) + g(x)] dx = \int_1^2 f(x) dx + \int_1^2 g(x) dx = 2 + 4 = 6.$$

Câu 27. Cho hàm số f liên tục trên đoạn $[0; 6]$. Nếu $\int_1^5 f(x) dx = 2$ và $\int_1^3 f(x) dx = 7$ thì $\int_3^5 f(x) dx$ có giá trị bằng.

A. 5.

B. -5.

C. 9.

D. -9.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } \int_1^3 f(x) dx + \int_3^5 f(x) dx = \int_1^5 f(x) dx \Leftrightarrow 7 + \int_3^5 f(x) dx = 2 \Rightarrow \int_3^5 f(x) dx = -5.$$

Câu 28. Tích phân $I = \int_0^1 \frac{1}{x^2 - x - 2} dx$ có giá trị bằng.

A. $\frac{2 \ln 2}{3}$.

B. $-2 \ln 2$.

C. $-\frac{2 \ln 2}{3}$.

D. $2 \ln 2$.

Lời giải

Chọn C

$$I = \int_0^1 \frac{1}{x^2 - x - 2} dx = \int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x-2)} dx = \frac{1}{3} \int_0^1 \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+1} \right) dx$$

$$= \frac{1}{3} (\ln|x-2| - \ln|x+1|) \Big|_0^1 = \frac{1}{3} \left(\ln \left| \frac{x-2}{x+1} \right| \right) \Big|_0^1 = \frac{-2 \ln 2}{3}$$

Câu 29. Cho $I = \int_0^4 x\sqrt{1+2x} dx$ và $u = \sqrt{2x+1}$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $I = \frac{1}{2} \int_1^3 x^2(x^2-1) dx$. **B.** $I = \int_1^3 u^2(u^2-1) du$.

C. $I = \frac{1}{2} \left(\frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} \right) \Big|_1^3$. **D.** $I = \frac{1}{2} \int_1^3 u^2(u^2-1) du$.

Lời giải

$$I = \int_0^4 x\sqrt{1+2x} dx$$

Đặt $u = \sqrt{2x+1} \Rightarrow x = \frac{1}{2}(u^2-1) \Rightarrow dx = u du$, đổi cận: $x=0 \Rightarrow u=1$, $x=4 \Rightarrow u=3$.

Khi đó $I = \frac{1}{2} \int_1^3 (u^2-1)u^2 du$.

Câu 30. Cho tích phân $I = \int_1^e \frac{3 \ln x + 1}{x} dx$. Nếu đặt $t = \ln x$ thì

A. $I = \int_0^1 \frac{3t+1}{e^t} dt$. **B.** $I = \int_1^e \frac{3t+1}{t} dt$. **C.** $I = \int_1^e (3t+1) dt$. **D.** $I = \int_0^1 (3t+1) dt$.

Lời giải

Đặt $t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{1}{x} dx$. Đổi cận $x=e \Rightarrow t=1$; $x=1 \Rightarrow t=0$.

Khi đó $I = \int_1^e \frac{3 \ln x + 1}{x} dx = \int_0^1 (3t+1) dt$.

Câu 31. Biết $\int_2^3 \frac{5x+12}{x^2+5x+6} dx = a \ln 2 + b \ln 5 + c \ln 6$. Tính $S = 3a + 2b + c$.

A. 3. **B.** -14. **C.** -2. **D.** -11.

Lời giải

Ta có: $\frac{5x+12}{x^2+5x+6} = \frac{5x+12}{(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3} = \frac{(A+B)x+3A+2B}{x^2+5x+6}$.

$$\begin{cases} A+B=5 \\ 3A+2B=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=3 \end{cases}$$

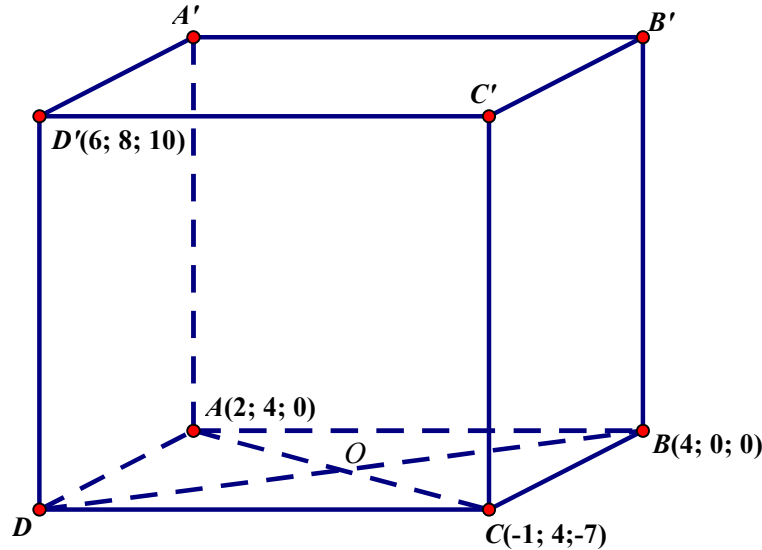
Nên $\int_2^3 \frac{5x+12}{x^2+5x+6} dx = \int_2^3 \frac{2}{x+2} dx + \int_2^3 \frac{3}{x+3} dx = 2 \ln|x+2| \Big|_2^3 + 3 \ln|x+3| \Big|_2^3$

$= 3 \ln 6 - \ln 5 - 2 \ln 4 = -4 \ln 2 - \ln 5 + 3 \ln 6$. Vậy $S = 3a + 2b + c = -11$.

Câu 32. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Biết $A(2;4;0)$, $B(4;0;0)$, $C(-1;4;-7)$ và $D'(6;8;10)$. Tọa độ điểm B' là

- A. $B'(8;4;10)$. B. $B'(6;12;0)$. C. $B'(10;8;6)$. **D. $B'(13;0;17)$.**

Lời giải



Giả sử $D(a;b;c)$, $B'(a';b';c')$

$$\text{Gọi } O = AC \cap BD \Rightarrow O\left(\frac{1}{2}; 4; \frac{-7}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 8 \\ c = -7 \end{cases}$$

Vậy $\overrightarrow{DD'} = (9; 0; 17)$, $\overrightarrow{BB'} = (a' - 4; b'; c')$. Do $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp nên

$$\overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{BB'} \Rightarrow \begin{cases} a' = 13 \\ b' = 0 \\ c' = 17 \end{cases} \text{ . Vậy } B'(13; 0; 17) \text{ .}$$

Câu 33. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;0;0)$, $C(0;0;3)$, $B(0;2;0)$. Tập hợp các điểm M thỏa mãn $MA^2 = MB^2 + MC^2$ là mặt cầu có bán kính là:

- A. $R = 2$. B. $R = \sqrt{3}$. C. $R = 3$. **D. $R = \sqrt{2}$.**

Lời giải

Giả sử $M(x; y; z)$.

$$\text{Ta có: } MA^2 = (x-1)^2 + y^2 + z^2; MB^2 = x^2 + (y-2)^2 + z^2; MC^2 = x^2 + y^2 + (z-3)^2.$$

$$MA^2 = MB^2 + MC^2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 + z^2 = x^2 + (y-2)^2 + z^2 + x^2 + y^2 + (z-3)^2$$

$$\Leftrightarrow -2x + 1 = (y-2)^2 + x^2 + (z-3)^2 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 2.$$

Vậy tập hợp các điểm M thỏa mãn $MA^2 = MB^2 + MC^2$ là mặt cầu có bán kính là $R = \sqrt{2}$.

Câu 34. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(4;0;1)$ và $B(-2;2;3)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB ?

- A. $3x - y - z = 0$.** B. $3x + y + z - 6 = 0$.
C. $3x - y - z + 1 = 0$. D. $6x - 2y - 2z - 1 = 0$.

Lời giải

Gọi (P) là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB .

Véc tơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}_{(P)} = \overline{AB} = (-6; 2; 2)$

(P) đi qua trung điểm M của AB . Tọa độ trung điểm $M(1; 1; 2)$

Vậy phương trình trung trực của đoạn thẳng AB là: $(P): 3x - y - z = 0$.

Câu 35. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có A trùng với gốc tọa độ. Cho $B(a; 0; 0)$, $D(0; a; 0)$, $A'(0; 0; b)$ với $a > 0$, $b > 0$. Gọi M là trung điểm của cạnh CC' . Xác định tỉ số $\frac{a}{b}$ để $(A'BD)$ vuông góc với (BDM) .

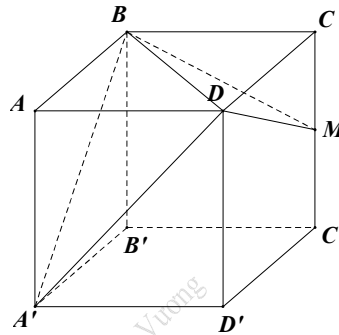
A. $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$.

B. $\frac{a}{b} = 1$.

C. $\frac{a}{b} = -1$.

D. $\frac{a}{b} = 2$.

Lời giải



Ta có: $(A'BD): \frac{x}{a} + \frac{y}{a} + \frac{z}{b} = 1 \Leftrightarrow bx + by + az - ab = 0$.

Nên $\vec{n}_1 = (b; b; a)$ là vectơ pháp tuyến của $(A'BD)$.

Để thấy $C(a; a; 0)$, $C' = (a; a; b)$ nên $M\left(a; a; \frac{b}{2}\right)$. Khi đó $\overline{BD} = (-a; a; 0)$, $\overline{BM} = \left(0; a; \frac{b}{2}\right)$.

$[\overline{BD}, \overline{BM}] = \left(\frac{ab}{2}; \frac{ab}{2}; -a^2\right)$ nên $\vec{n}_2 = (b; b; -2a)$ là vectơ pháp tuyến của (BDM) .

Do $(A'BD)$ vuông góc với (BDM) nên $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Rightarrow 2b^2 - 2a^2 = 0 \Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow \frac{a}{b} = 1$.

Tự luận

Câu 1. Tính $\int_0^1 x \ln(x+2) dx$,

Lời giải

Gọi $I = \int_0^1 x \ln(x+2) dx$.

Đặt $\begin{cases} u = \ln(x+2) \\ dv = x dx \end{cases}$. Suy ra $du = \frac{1}{x+2} dx$ và chọn $v = \frac{1}{2} x^2$

$$I = \int_0^1 x \ln(x+2) dx = \frac{1}{2} x^2 \ln(x+2) \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{x+2} dx = \frac{1}{2} \ln 3 - \frac{1}{2} J.$$

$$J = \int_0^1 \frac{x^2}{x+2} dx = \int_0^1 \left[(x-2) + \frac{4}{x+2} \right] dx = \left[\frac{1}{2}(x-2)^2 + 4 \ln|x+2| \right]_0^1 = 4 \ln 3 - 4 \ln 2 - \frac{3}{2}.$$

$$\text{Do đó } I = \frac{1}{2} \ln 3 - \frac{1}{2} \left(4 \ln 3 - 4 \ln 2 - \frac{3}{2} \right) = -\frac{3}{2} \ln 3 + 2 \ln 2 + \frac{3}{4}.$$

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên \mathbb{R} thỏa mãn $3f'(x) \cdot e^{f^3(x)-x^2-1} - \frac{2x}{f^2(x)} = 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Biết

$$f(0) = 1, \text{ tính tích phân } \int_0^{\sqrt{7}} x \cdot f(x) dx.$$

Lời giải

$$\text{Ta có } 3f'(x) \cdot e^{f^3(x)-x^2-1} - \frac{2x}{f^2(x)} = 0 \Leftrightarrow 3f^2(x) \cdot f'(x) \cdot e^{f^3(x)} = 2x \cdot e^{x^2+1}$$

$$\Rightarrow \int 3f^2(x) \cdot f'(x) \cdot e^{f^3(x)} dx = \int 2x \cdot e^{x^2+1} dx \Rightarrow \int e^{f^3(x)} d(f^3(x)) = \int e^{x^2+1} d(x^2+1) \Rightarrow e^{f^3(x)} = e^{x^2+1} + C.$$

Mặt khác, vì $f(0) = 1$ nên $C = 0$.

$$\text{Do đó } e^{f^3(x)} = e^{x^2+1} \Leftrightarrow f^3(x) = x^2 + 1 \Leftrightarrow f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 1}.$$

$$\text{Vậy } \int_0^{\sqrt{7}} x \cdot f(x) dx = \int_0^{\sqrt{7}} x \cdot \sqrt[3]{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{7}} \sqrt[3]{x^2 + 1} d(x^2 + 1) = \frac{3}{8} \left[(x^2 + 1) \sqrt[3]{x^2 + 1} \right]_0^{\sqrt{7}} = \frac{45}{8}.$$

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{1}{x-1}$, $f(0) = 2017$, $f(2) = 2018$.

$$\text{Tính } S = (f(3) - 2018)(f(-1) - 2017).$$

Lời giải

$$\text{Ta có } f(x) = \int \frac{1}{x-1} dx = \ln|x-1| + C = \begin{cases} \ln(x-1) + C_1 & \text{khi } x > 1 \\ \ln(1-x) + C_2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}.$$

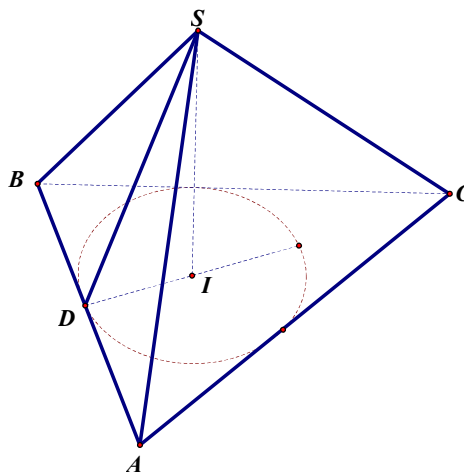
$$\text{Lại có } f(0) = 2017 \Rightarrow \ln(1-0) + C_2 = 2017 \Rightarrow C_2 = 2017.$$

$$f(2) = 2018 \Rightarrow \ln(2-1) + C_1 = 2018 \Rightarrow C_1 = 2018.$$

$$\text{Do đó } S = [\ln(3-1) + 2018 - 2018][\ln(1-(-1)) + 2017 - 2017] = \ln^2 2.$$

Câu 4. Cho hình nón đỉnh S , đáy là đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Biết rằng $AB = BC = 10a$, $AC = 12a$, góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) bằng 45° . Tính thể tích V của khối nón đã cho.

Lời giải



Hạ $ID \perp AB$, khi đó góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAB) và (ABC) chính là $\widehat{SDI} = 45^\circ$ nên $ID = SI = r = h$.

$$\text{Lại có } S_{\Delta ABC} = p \cdot r \Rightarrow r = \frac{S_{\Delta ABC}}{p}.$$

$$\text{Tính được } p = 16a, S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 48a^2.$$

$$\text{Suy ra } r = 3a. \text{ Vậy } V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi (3a)^3 = 9\pi a^3.$$

Nguyễn Bảo Vương

Trắc nghiệm

Câu 1. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. $\int f'(x)dx = f(x) + C.$

B. $\int f'(ax+b)dx = \frac{1}{a}.f(x) + C.$

C. $\int f'(x)dx = f''(x) + C.$

D. $\int f'(x)dx = a.f(ax+b) + C.$

Câu 2. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x + 2x$ thỏa mãn $F(0) = \frac{3}{2}$. Tìm $F(x)$.

A. $F(x) = e^x + x^2 + \frac{5}{2}.$ **B.** $F(x) = 2e^x + x^2 - \frac{1}{2}.$

C. $F(x) = e^x + x^2 + \frac{3}{2}.$ **D.** $F(x) = e^x + x^2 + \frac{1}{2}.$

Câu 3. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 5x^4 + 2$ là

A. $x^5 + 2x + C.$

B. $\frac{1}{5}x^5 + 2x + C.$

C. $10x + C.$

D. $x^5 + 2.$

Câu 4. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2$ là?

A. $\int x^2 dx = \frac{x^2}{2} + C.$

B. $\int x^2 dx = 2x + C.$

C. $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C.$

D. $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}.$

Câu 5. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin 3x$ là:

A. $-\frac{1}{3}\cos 3x + C.$

B. $\frac{1}{3}\cos 3x + C.$

C. $3\cos 3x + C.$

D. $-3\cos 3x + C.$

Câu 6. Cho biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Tìm $I = \int [2f(x) + 1] dx$.

A. $I = 2F(x) + 1 + C.$

B. $I = 2xF(x) + 1 + C.$

C. $I = 2xF(x) + x + C.$

D. $I = 2F(x) + x + C.$

Câu 7. Tìm họ nguyên hàm $\int \cos^2 x \sin x dx$ ta được kết quả là

A. $-\cos^2 x + C.$

B. $\frac{1}{3}\cos^3 x + C.$

C. $-\frac{1}{3}\cos^3 x + C.$

D. $\frac{1}{3}\sin^3 x + C.$

Câu 8. Tính tích phân $I = \int_0^1 2e^x dx$.

A. $I = e^2 - 2e.$

B. $I = 2e.$

C. $I = 2e + 2.$

D. $I = 2e - 2.$

Câu 9. Biết $\int_2^3 \frac{1}{x+1} dx = \ln \frac{m}{n}$ (với m, n là những số thực dương và $\frac{m}{n}$ tối giản), khi đó, tổng $m + n$ bằng

A. 12.

B. 7.

C. 1.

D. 5.

Câu 10. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx$.

A. $I = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$. B. $I = \frac{\sqrt{2}}{2}$. C. $I = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. D. $I = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$.

Câu 11. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và a là số dương. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $\int_a^a f(x) dx = 0$. B. $\int_a^a f(x) dx = a^2$. C. $\int_a^a f(x) dx = 2a$. D. $\int_a^a f(x) dx = 1$.

Câu 12. Biết $\int f(x) dx = F(x) + C$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $\int_a^b f(x) dx = F(b) + F(a)$. B. $\int_a^b f(x) dx = F(b) \cdot F(a)$.
 C. $\int_a^b f(x) dx = F(a) - F(b)$. D. $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$.

Câu 13. Cho hàm số $f(t)$ liên tục trên K và $a, b \in K$, $F(t)$ là một nguyên hàm của $f(t)$ trên K . Chọn khẳng định sai trong các khẳng định sau.

A. $F(a) - F(b) = \int_a^b f(t) dt$. B. $\int_a^b f(t) dt = F(t)|_a^b$.
 C. $\int_a^b f(t) dt = \left(\int_a^b f(t) dt \right)|_a^b$. D. $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt$.

Câu 14. Tích phân $I = \int_0^2 (2x-1) dx$ có giá trị bằng:

A. 1. B. 2. C. 3. D. 0.

Câu 15. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các vec tơ $\vec{a} = (-1; 1; 0)$; $\vec{b} = (1; 1; 0)$ và $\vec{c} = (1; 1; 1)$. Mệnh đề nào dưới đây sai?

A. $\vec{c} \perp \vec{b}$. B. $|\vec{c}| = \sqrt{3}$. C. $\vec{a} \perp \vec{b}$. D. $|\vec{a}| = \sqrt{2}$.

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; -2; 4)$. Hình chiếu vuông góc của A trên trục Oy là điểm

A. $P(0; 0; 4)$. B. $Q(1; 0; 0)$. C. $N(0; -2; 0)$. D. $M(0; -2; 4)$.

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 8z + 1 = 0$. Tâm và bán kính của (S) lần lượt là

A. $I(-1; 3; -4)$, $R = 5$. B. $I(1; -3; 4)$, $R = 5$.
 C. $I(2; -6; 8)$, $R = \sqrt{103}$. D. $I(1; -3; 4)$, $R = 25$.

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P): x + 2y - 3z + 3 = 0$ có một vectơ pháp tuyến là

A. $(1; -2; 3)$. B. $(1; 2; -3)$. C. $(-1; 2; -3)$. D. $(1; 2; 3)$.

Câu 19. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng đi qua các điểm $A(2; 0; 0)$, $B(0; 3; 0)$, $C(0; 0; 4)$ có phương trình là

A. $6x + 4y + 3z + 12 = 0$. B. $6x + 4y + 3z = 0$.

C. $6x+4y+3z-12=0$. D. $6x+4y+3z-24=0$.

Câu 20. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, điểm nào sau đây không thuộc mặt phẳng $(P):x+y+z-1=0$.

A. $K(0;0;1)$. B. $J(0;1;0)$. C. $I(1;0;0)$. D. $O(0;0;0)$.

Câu 21. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^2$ là

A. $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$. B. $\int x^2 dx = \frac{x^2}{2} + C$. C. $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$. D. $\int x^2 dx = 2x + C$.

Câu 22. Gọi $F(x)=(ax^2+bx+c)e^x$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)=(x-1)^2 e^x$. Tính $S=a+2b+c$.

A. $S=3$. B. $S=-2$. C. $S=0$. D. $S=4$.

Câu 23. Với C là hằng số, nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\frac{x^2-x+1}{x-1}$ là

A. $F(x)=\frac{x^2}{2}+\ln|x-1|+C$. B. $F(x)=x+\frac{1}{x-1}+C$.
C. $F(x)=x^2+\ln|x-1|+C$. D. $F(x)=1+\frac{1}{(x-1)^2}+C$.

Câu 24. Tìm $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^x-1$ trên $(-\infty;+\infty)$, biết $F(0)=2$.

A. $F(x)=\ln x-x-1$. B. $F(x)=e^x-x-1$. C. $F(x)=\frac{1}{e^x}-x+1$. D. $F(x)=e^x-x+1$.

Câu 25. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=2x(3+2\ln x)$ và $F(1)=3$. Khẳng định nào đúng trong các khẳng định sai?

A. $2x^2+x^2\ln x+1$. B. $2x^2+2x^2\ln x-1$. C. $4x^2+2x^2\ln x$. D. $4x^2+2x^2\ln x-1$.

Câu 26. Cho $\int_0^1\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)dx=a\ln 2+b\ln 3$ với a, b là các số nguyên. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $a+b=2$. B. $a-2b=0$. C. $a+b=-2$. D. $a+2b=0$.

Câu 27. Biết $\int_3^5\frac{x^2+x+1}{x+1}dx=a+\ln\frac{b}{2}$ với a, b là các số nguyên. Tính $S=a-2b$.

A. $S=-2$. B. $S=5$. C. $S=2$. D. $S=10$.

Câu 28. Kết quả của tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2x-1-\sin x)dx$ được viết ở dạng $\pi\left(\frac{\pi}{a}-\frac{1}{b}\right)-1$ $a, b \in \mathbb{Z}$. Khẳng định nào sau đây là sai?

A. $a+2b=8$. B. $a+b=5$. C. $2a-3b=2$. D. $a-b=2$.

Câu 29. Cho $\int_0^4 f(x)dx=16$. Tính $\int_0^2 f(2x)dx$.

A. 16. B. 4. C. 32. D. 8.

Câu 30. Biết rằng $\int_0^1 x \cos 2x dx = \frac{1}{4}(a \sin 2 + b \cos 2 + c)$, với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Khẳng định nào sau đây đúng ?

A. $a + b + c = 1$. B. $a - b + c = 0$. C. $2a + b + c = -1$. D. $a + 2b + c = 1$.

Câu 31. Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x - 5 \sin x + 6} dx = a \ln \frac{4}{c} + b$, tính tổng $S = a + b + c$

A. $S = 1$. B. $S = 4$. C. $S = 3$. D. $S = 0$.

Câu 32. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2; 3; 1)$, $\vec{b} = (-1; 5; 2)$, $\vec{c} = (4; -1; 3)$ và $\vec{x} = (-3; 22; 5)$. Đẳng thức nào đúng trong các đẳng thức sau?

A. $\vec{x} = 2\vec{a} - 3\vec{b} - \vec{c}$. B. $\vec{x} = -2\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c}$.

C. $\vec{x} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}$. D. $\vec{x} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$.

Câu 33. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tìm tất cả các giá trị m để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 4z + m = 0$ là phương trình của một mặt cầu.

A. $m > 6$. B. $m \geq 6$. C. $m \leq 6$. D. $m < 6$.

Câu 34. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1; 0; 1)$, $B(-2; 1; 1)$. Phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn AB là

A. $x - y + 2 = 0$. B. $-x + y + 2 = 0$. C. $x - y - 2 = 0$. D. $x - y + 1 = 0$.

Câu 35. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (α) qua $A(2; -1; 5)$ và chứa trục Ox có vectơ pháp tuyến

$\vec{u} = (a; b; c)$. Khi đó tỉ số $\frac{b}{c}$ là

A. $\frac{b}{c} = 5$.

B. $\frac{b}{c} = \frac{1}{5}$.

C. $\frac{b}{c} = -5$.

D. $\frac{b}{c} = -\frac{1}{5}$.

Tự luận

Câu 1. Tính $\int \frac{\ln(x+3)}{x^2} dx$.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} thỏa mãn điều kiện $3f(x) - f(-x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3}}$. Tính

$\int_{-1}^1 f(x) dx$

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên \mathbb{R} thỏa mãn

$3f^2(x) \cdot f'(x) - 4x \cdot e^{-f^3(x) + 2x^2 + x + 1} = 1 = f(0)$. Tính $I = \int_0^{\frac{-1 + \sqrt{4089}}{4}} (4x + 1) f(x) dx$

Câu 4. Cho hình thang cân $ABCD$ có các cạnh đáy $AB = 2a$, $CD = 4a$ và cạnh bên $AD = BC = 3a$. Tính theo a thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay hình thang cân $ABCD$ xung quanh trục đối xứng của nó.

Trắc nghiệm

BẢNG ĐÁP ÁN

1.A	2.D	3.A	4.C	5.A	6.D	7.C	8.D	9.B	10.A
11.A	12.D	13.A	14.B	15.A	16.C	17.B	18.B	19.C	20.D
21.A	22.B	23.A	24.D	25.A	26.D	27.C	28.B	29.D	30.B
31.B	32.C	33.D	34.A	35.A					

Câu 1. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. $\int f'(x)dx = f(x) + C.$

B. $\int f'(ax+b)dx = \frac{1}{a}.f(x) + C.$

C. $\int f'(x)dx = f''(x) + C.$

D. $\int f'(x)dx = a.f(ax+b) + C.$

Lời giải

Ta có $\int f'(x)dx = f(x) + C$ nên A đúng.

Câu 2. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x + 2x$ thỏa mãn $F(0) = \frac{3}{2}$. Tìm $F(x)$.

A. $F(x) = e^x + x^2 + \frac{5}{2}.$ **B.** $F(x) = 2e^x + x^2 - \frac{1}{2}.$

C. $F(x) = e^x + x^2 + \frac{3}{2}.$ **D.** $F(x) = e^x + x^2 + \frac{1}{2}.$

Lời giải

$F(x) = \int (e^x + 2x)dx = e^x + x^2 + C.$

$F(0) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow e^0 + C = \frac{3}{2} \Leftrightarrow C = \frac{1}{2}.$

$F(x) = e^x + x^2 + \frac{1}{2}.$

Câu 3. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 5x^4 + 2$ là

A. $x^5 + 2x + C.$

B. $\frac{1}{5}x^5 + 2x + C.$

C. $10x + C.$

D. $x^5 + 2.$

Lời giải

Ta có: $\int f(x)dx = \int (5x^4 + 2)dx = x^5 + 2x + C.$

Câu 4. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2$ là?

A. $\int x^2 dx = \frac{x^2}{2} + C.$

B. $\int x^2 dx = 2x + C.$

C. $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C.$

D. $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}.$

Lời giải

Ta có $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C.$

Câu 5. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin 3x$ là:

- A.** $-\frac{1}{3}\cos 3x + C$. **B.** $\frac{1}{3}\cos 3x + C$. **C.** $3\cos 3x + C$. **D.** $-3\cos 3x + C$.

Lời giải

Ta có $\int \sin 3x dx = \frac{1}{3} \int \sin 3x d3x = -\frac{1}{3} \cos 3x + C$.

Câu 6. Cho biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Tìm $I = \int [2f(x) + 1] dx$.

- A.** $I = 2F(x) + 1 + C$. **B.** $I = 2xF(x) + 1 + C$.
C. $I = 2xF(x) + x + C$. **D.** $I = 2F(x) + x + C$.

Lời giải

Ta có: $I = \int [2f(x) + 1] dx = 2 \int f(x) dx + \int 1 dx = 2F(x) + x + C$.

Câu 7. Tìm họ nguyên hàm $\int \cos^2 x \sin x dx$ ta được kết quả là

- A.** $-\cos^2 x + C$. **B.** $\frac{1}{3}\cos^3 x + C$. **C.** $-\frac{1}{3}\cos^3 x + C$. **D.** $\frac{1}{3}\sin^3 x + C$.

Lời giải

Chọn C

$\int \cos^2 x \sin x dx = -\int \cos^2 x d(\cos x) = -\frac{1}{3}\cos^3 x + C$.

Câu 8. Tính tích phân $I = \int_0^1 2e^x dx$.

- A.** $I = e^2 - 2e$. **B.** $I = 2e$. **C.** $I = 2e + 2$. **D.** $I = 2e - 2$.

Lời giải

Ta có $I = \int_0^1 2e^x dx = 2e^x \Big|_0^1 = 2e - 2$.

Câu 9. Biết $\int_2^3 \frac{1}{x+1} dx = \ln \frac{m}{n}$ (với m, n là những số thực dương và $\frac{m}{n}$ tối giản), khi đó, tổng $m + n$ bằng

- A.** 12. **B.** 7. **C.** 1. **D.** 5.

Lời giải

$\int_2^3 \frac{1}{x+1} dx = \ln|x+1| \Big|_2^3 = \ln \frac{4}{3}$. Suy ra $m = 4, n = 3 \Rightarrow m + n = 7$.

Câu 10. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx$.

- A.** $I = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$. **B.** $I = \frac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $I = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $I = \frac{2 + \sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Ta có $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$.

Câu 11. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và a là số dương. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- A.** $\int_a^a f(x)dx = 0$. **B.** $\int_a^a f(x)dx = a^2$. **C.** $\int_a^a f(x)dx = 2a$. **D.** $\int_a^a f(x)dx = 1$.

Lời giải

Ta có $\int_a^a f(x)dx = F(a) - F(a) = 0$.

Câu 12. Biết $\int f(x)dx = F(x) + C$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- A.** $\int_a^b f(x)dx = F(b) + F(a)$. **B.** $\int_a^b f(x)dx = F(b).F(a)$.
C. $\int_a^b f(x)dx = F(a) - F(b)$. **D.** $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Lời giải

Chọn $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

Câu 13. Cho hàm số $f(t)$ liên tục trên K và $a, b \in K$, $F(t)$ là một nguyên hàm của $f(t)$ trên K . Chọn khẳng định sai trong các khẳng định sau.

- A.** $F(a) - F(b) = \int_a^b f(t)dt$. **B.** $\int_a^b f(t)dt = F(t)|_a^b$.
C. $\int_a^b f(t)dt = \left(\int_a^b f(t)dt \right)|_a^b$. **D.** $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$.

Lời giải

Theo định nghĩa ta có: $\int_a^b f(t)dt = F(t)|_a^b = F(b) - F(a)$. Suy ra **phương án A** sai.

Câu 14. Tích phân $I = \int_0^2 (2x-1)dx$ có giá trị bằng:

- A.** 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

$I = \int_0^2 (2x-1)dx = (x^2 - x)|_0^2 = 2$.

Câu 15. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các vec tơ $\vec{a} = (-1; 1; 0)$; $\vec{b} = (1; 1; 0)$ và $\vec{c} = (1; 1; 1)$. Mệnh đề nào dưới đây sai?

- A.** $\vec{c} \perp \vec{b}$. **B.** $|\vec{c}| = \sqrt{3}$. **C.** $\vec{a} \perp \vec{b}$. **D.** $|\vec{a}| = \sqrt{2}$.

Lời giải

Ta có: $\vec{c} \cdot \vec{b} = 2$ nên $\vec{c} \not\perp \vec{b}$

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; -2; 4)$. Hình chiếu vuông góc của A trên trục Oy là điểm

- A. $P(0;0;4)$. B. $Q(1;0;0)$. C. $N(0;-2;0)$. D. $M(0;-2;4)$.

Lời giải

Hình chiếu vuông góc của $A(1;-2;4)$ trên trục Oy là điểm $N(0;-2;0)$.

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 8z + 1 = 0$. Tâm và bán kính của (S) lần lượt là

- A. $I(-1;3;-4)$, $R = 5$. B. $I(1;-3;4)$, $R = 5$.
C. $I(2;-6;8)$, $R = \sqrt{103}$. D. $I(1;-3;4)$, $R = 25$.

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-3;4)$ và bán kính $R = \sqrt{1 + (-3)^2 + 4^2 - 1} = 5$.

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P): x + 2y - 3z + 3 = 0$ có một vector pháp tuyến là

- A. $(1;-2;3)$. B. $(1;2;-3)$. C. $(-1;2;-3)$. D. $(1;2;3)$.

Lời giải

Một vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n} = (1;2;-3)$.

Câu 19. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng đi qua các điểm $A(2;0;0)$, $B(0;3;0)$, $C(0;0;4)$ có phương trình là

- A. $6x + 4y + 3z + 12 = 0$. B. $6x + 4y + 3z = 0$.
C. $6x + 4y + 3z - 12 = 0$. D. $6x + 4y + 3z - 24 = 0$.

Lời giải

Phương trình mặt phẳng (ABC) có dạng $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1 \Leftrightarrow 6x + 4y + 3z - 12 = 0$.

Câu 20. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, điểm nào sau đây không thuộc mặt phẳng $(P): x + y + z - 1 = 0$.

- A. $K(0;0;1)$. B. $J(0;1;0)$. C. $I(1;0;0)$. D. $O(0;0;0)$.

Lời giải

Với $O(0;0;0)$, thay vào (P) ta được: $-1 \neq 0$.

Câu 21. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2$ là

- A. $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$. B. $\int x^2 dx = \frac{x^2}{2} + C$. C. $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$. D. $\int x^2 dx = 2x + C$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$.

Câu 22. Gọi $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = (x-1)^2 e^x$. Tính $S = a + 2b + c$.

- A. $S = 3$. B. $S = -2$. C. $S = 0$. D. $S = 4$.

Lời giải

Chọn B

Do $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ nên ta có

$$F'(x) = f(x) \Leftrightarrow (ax^2 + (2a+b)x + b+c)e^x = (x-1)^2 e^x. \text{ Do đó ta có}$$

$$\begin{cases} a=1 \\ 2a+b=-2 \\ b+c=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-4 \\ c=5 \end{cases} \Rightarrow S = a+2b+c = -2.$$

Câu 23. Với C là hằng số, nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{x^2-x+1}{x-1}$ là

A. $F(x) = \frac{x^2}{2} + \ln|x-1| + C.$

B. $F(x) = x + \frac{1}{x-1} + C.$

C. $F(x) = x^2 + \ln|x-1| + C.$

D. $F(x) = 1 + \frac{1}{(x-1)^2} + C.$

Lời giải

Chọn A

Ta có $f(x) = \frac{x^2-x+1}{x-1} = x + \frac{1}{x-1}$. Do đó

$$F(x) = \int f(x)dx = \int \left(x + \frac{1}{x-1}\right)dx = \frac{x^2}{2} + \ln|x-1| + C.$$

Câu 24. Tìm $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x - 1$ trên $(-\infty; +\infty)$, biết $F(0) = 2$.

A. $F(x) = \ln x - x - 1.$ **B.** $F(x) = e^x - x - 1.$ **C.** $F(x) = \frac{1}{e^x} - x + 1.$ **D.** $F(x) = e^x - x + 1.$

Lời giải

Chọn D

Ta có: $F(x) = \int f(x)dx = \int (e^x - 1)dx = e^x - x + C.$

Theo bài: $F(0) = 2 \Leftrightarrow e^0 - 0 + C = 2 \Leftrightarrow 1 + C = 2 \Leftrightarrow C = 1.$

Vậy $F(x) = e^x - x + 1.$

Câu 25. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x(3+2\ln x)$ và $F(1) = 3$. Khẳng định nào đúng trong các khẳng định **sai**?

A. $2x^2 + x^2 \ln x + 1.$ **B.** $2x^2 + 2x^2 \ln x - 1.$ **C.** $4x^2 + 2x^2 \ln x.$ **D.** $4x^2 + 2x^2 \ln x - 1.$

Lời giải

Chọn A

➤ Cách 1: Đặt $\begin{cases} u = 3 + 2\ln x \\ dv = 2x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{2}{x} dx \\ v = x^2 \end{cases}$

$$\int f(x)dx = x^2(3 + 2\ln x) - \int 2x dx = x^2(3 + 2\ln x) - x^2 + C = 2x^2 + 2x^2 \ln x + C.$$

Ta có: $F(1) = 3 \Rightarrow 2 + C = 3 \Rightarrow C = 1.$ Vậy $F(x) = 2x^2 + 2x^2 \ln x + 1.$

➤ Cách 2: Casio

$$\frac{\int_1^x 2x(3 + 2\ln x)dx + 3}{1} \xrightarrow[\text{CACL}]{x=2} \neq 1$$

Dáp án A

Câu 26. Cho $\int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx = a \ln 2 + b \ln 3$ với a, b là các số nguyên. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

- A.** $a+b=2$. **B.** $a-2b=0$. **C.** $a+b=-2$. **D.** $a+2b=0$.

Lời giải

Ta có: $\int_0^1 \frac{dx}{x+1} = \ln|x+1| \Big|_0^1 = \ln 2$ và $\int_0^1 \frac{dx}{x+2} = \ln|x+2| \Big|_0^1 = \ln 3 - \ln 2$

Do đó $\int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx = \ln 2 - (\ln 3 - \ln 2) = 2 \ln 2 - \ln 3 \Rightarrow a = 2, b = -1$.

Vậy $a+2b=0$.

Câu 27. Biết $\int_3^5 \frac{x^2+x+1}{x+1} dx = a + \ln \frac{b}{2}$ với a, b là các số nguyên. Tính $S = a - 2b$.

- A.** $S = -2$. **B.** $S = 5$. **C.** $S = 2$. **D.** $S = 10$.

Lời giải

Ta có $\int_3^5 \frac{x^2+x+1}{x+1} dx = \int_3^5 \left(x + \frac{1}{x+1} \right) dx = \left(\frac{1}{2}x^2 + \ln|x+1| \right) \Big|_3^5 = \frac{25}{2} + \ln 6 - \frac{9}{2} - \ln 4 = 8 + \ln \frac{3}{2}$.

Vậy $a = 8, b = 3$. Suy ra $S = a - 2b = 8 - 2 \cdot 3 = 2$.

Câu 28. Kết quả của tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x-1-\sin x) dx$ được viết ở dạng $\pi \left(\frac{\pi}{a} - \frac{1}{b} \right) - 1$ $a, b \in \mathbb{Z}$. Khẳng định

nào sau đây là **sai**?

- A.** $a+2b=8$. **B.** $a+b=5$. **C.** $2a-3b=2$. **D.** $a-b=2$.

Lời giải

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x-1-\sin x) dx = \left(x^2 - x + \cos x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi}{2} - 1 = \pi \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right) - 1$.

Vậy $a = 4, b = 2$. Suy ra $a+b=6$. Vậy B sai.

Câu 29. Cho $\int_0^4 f(x) dx = 16$. Tính $\int_0^2 f(2x) dx$

- A.** 16. **B.** 4. **C.** 32. **D.** 8.

Lời giải

Xét tích phân $\int_0^2 f(2x) dx$ ta có

Đặt $2x = t \Rightarrow dx = \frac{1}{2} dt$. Khi $x = 0$ thì $t = 0$; khi $x = 2$ thì $t = 4$.

Do đó $\int_0^2 f(2x) dx = \frac{1}{2} \int_0^4 f(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^4 f(x) dx = \frac{1}{2} \cdot 16 = 8$.

Câu 30. Biết rằng $\int_0^1 x \cos 2x dx = \frac{1}{4}(a \sin 2 + b \cos 2 + c)$, với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Khẳng định nào sau đây **đúng** ?

- A.** $a+b+c=1$. **B.** $a-b+c=0$. **C.** $2a+b+c=-1$. **D.** $a+2b+c=1$.

Lời giải

$$\text{Đặt } I = \int_0^1 x \cos 2x dx \text{ Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = \cos 2x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2} x \sin 2x \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \sin 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2 + \frac{1}{4} \cos 2x \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \sin 2 + \frac{1}{4} \cos 2 - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{4} (2 \sin 2 + \cos 2 - 1) \Rightarrow a - b + c = 0.$$

Câu 31. Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x - 5 \sin x + 6} dx = a \ln \frac{4}{c} + b$, tính tổng $S = a + b + c$

- A.** $S = 1$. **B.** $S = 4$. **C.** $S = 3$. **D.** $S = 0$.

Lời giải

Đặt $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$. $x = 0 \Rightarrow t = 0$, $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x - 5 \sin x + 6} dx = \int_0^1 \frac{1}{t^2 - 5t + 6} dt = \int_0^1 \left(\frac{1}{t-3} - \frac{1}{t-2} \right) dt = \ln \left| \frac{t-3}{t-2} \right| \Big|_0^1 = \ln 2 - \ln \frac{3}{2} = \ln \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow a = 1, b = 0, c = 3 \Rightarrow S = a + b + c = 4.$$

Câu 32. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2; 3; 1)$, $\vec{b} = (-1; 5; 2)$, $\vec{c} = (4; -1; 3)$ và $\vec{x} = (-3; 22; 5)$. Đẳng thức nào đúng trong các đẳng thức sau?

- A.** $\vec{x} = 2\vec{a} - 3\vec{b} - \vec{c}$. **B.** $\vec{x} = -2\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c}$.
C. $\vec{x} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}$. **D.** $\vec{x} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$.

Lời giải

Đặt: $\vec{x} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$, $m, n, p \in \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow (-3; 22; 5) = m(2; 3; 1) + n(-1; 5; 2) + p(4; -1; 3) \Rightarrow \begin{cases} 2m - n + 4p = -3 \\ 3m + 5n - p = 22 \\ m + 2n + 3p = 5 \end{cases} (I).$$

Giải hệ phương trình (I) ta được: $\begin{cases} m = 2 \\ n = 3 \\ p = -1 \end{cases}$.

Vậy $\vec{x} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}$.

Câu 33. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tìm tất cả các giá trị m để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 4z + m = 0$ là phương trình của một mặt cầu.

- A.** $m > 6$. **B.** $m \geq 6$. **C.** $m \leq 6$. **D.** $m < 6$.

Lời giải

Ta có:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 4z + m = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 6 - m.$$

Để phương trình này là phương trình mặt cầu thì $6 - m > 0 \Leftrightarrow m < 6$.

Vậy giá trị cần tìm của m là $m < 6$.

Câu 34. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1; 0; 1)$, $B(-2; 1; 1)$. Phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn AB là

- A.** $x - y + 2 = 0$. **B.** $-x + y + 2 = 0$. **C.** $x - y - 2 = 0$. **D.** $x - y + 1 = 0$.

Lời giải

Gọi $I\left(-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}; 1\right)$ là trung điểm của AB .

Ta có: $\overline{AB} = (-1; 1; 0)$.

Ta thấy mặt phẳng trung trực của đoạn AB đi qua $I\left(-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}; 1\right)$ và nhận $\overline{AB} = (-1; 1; 0)$ làm một vector pháp tuyến.

Nên phương trình mặt phẳng cần tìm là: $x - y + 2 = 0$.

Câu 35. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (α) qua $A(2; -1; 5)$ và chứa trục Ox có vector pháp tuyến

$\vec{u} = (a; b; c)$. Khi đó tỉ số $\frac{b}{c}$ là

- A.** $\frac{b}{c} = 5$. **B.** $\frac{b}{c} = \frac{1}{5}$. **C.** $\frac{b}{c} = -5$. **D.** $\frac{b}{c} = -\frac{1}{5}$.

Lời giải

Ta có: $\vec{i} = (1; 0; 0)$, $\overline{OA} = (2; -1; 5) \Rightarrow [\overline{OA}, \vec{i}] = (0; 5; 1)$ là một VTPT của (α) .

Do đó $\vec{u} = (0; 5k; k)$ với $k \neq 0$. Vậy $\frac{b}{c} = 5$.

Tự luận

Câu 1. Tính $\int \frac{\ln(x+3)}{x^2} dx$.

Lời giải

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln(x+3) \\ dv = \frac{dx}{x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x+3} \\ v = -\frac{1}{x} \end{cases}$$

$$\text{Ta có } \int \frac{\ln(x+3)}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \ln(x+3) + \int \frac{dx}{x(x+3)} = -\frac{1}{x} \ln(x+3) + \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x}{x+3} \right| + C.$$

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} thỏa mãn điều kiện $3f(x) - f(-x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3}}$. Tính

$$\int_{-1}^1 f(x) dx$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } 3f(x) - f(-x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3}} \Rightarrow \int_{-1}^1 [3f(x) - f(-x)] dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3}} dx$$

$$\Leftrightarrow 3 \int_{-1}^1 f(x) dx - \int_{-1}^1 f(-x) dx = \ln 3. (*)$$

Xét tích phân $\int_{-1}^1 f(-x) dx$

$$\text{Đặt } t = -x \Leftrightarrow x = -t \Leftrightarrow dx = -dt.$$

$$\text{Đổi cận: } x = -1 \Rightarrow t = 1; x = 1 \Rightarrow t = -1.$$

$$\text{Khi đó: } \int_{-1}^1 f(-x) dx = - \int_1^{-1} f(t) dt = \int_{-1}^1 f(t) dt = \int_{-1}^1 f(x) dx.$$

$$\text{Do đó: } (*) \Leftrightarrow 3 \int_{-1}^1 f(x) dx - \int_{-1}^1 f(x) dx = \ln 3 \Leftrightarrow \int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{\ln 3}{2}.$$

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên \mathbb{R} thỏa mãn

$$3f^2(x) \cdot f'(x) - 4x \cdot e^{-f^3(x)+2x^2+x+1} = 1 = f(0). \text{ Tính } I = \int_0^{\frac{-1+\sqrt{4089}}{4}} (4x+1) f(x) dx$$

Lời giải

$$\text{Ta có } 3f^2(x) \cdot f'(x) - 4x \cdot e^{-f^3(x)+2x^2+x+1} = 1 \Leftrightarrow 3f^2(x) \cdot f'(x) \cdot e^{f^3(x)} - 4x \cdot e^{2x^2+x+1} = e^{f^3(x)}$$

$$\Leftrightarrow \left(e^{f^3(x)} - e^{2x^2+x+1} \right)' = e^{f^3(x)} - e^{2x^2+x+1} \Leftrightarrow \left(\ln \left| e^{f^3(x)} - e^{2x^2+x+1} \right| \right)' = 1$$

$$\Rightarrow \int \left(\ln \left| e^{f^3(x)} - e^{2x^2+x+1} \right| \right)' dx = \int dx \Rightarrow e^{f^3(x)} - e^{2x^2+x+1} = C \cdot e^x.$$

$$\text{Với } x = 0 \Rightarrow e^{f^3(0)} - e = C \Rightarrow C = 0 \text{ (vì } f(0) = 1) \Rightarrow e^{f^3(x)} = e^{2x^2+x+1} \Leftrightarrow f^3(x) = 2x^2 + x + 1.$$

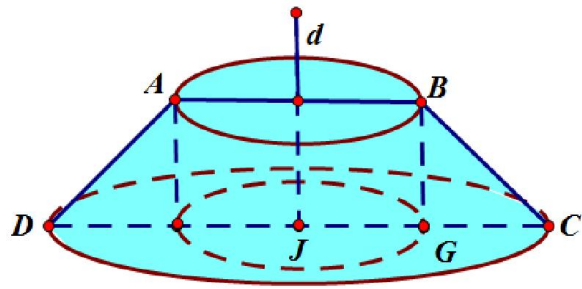
$$\text{Do đó } f(x) = \sqrt[3]{2x^2 + x + 1} \Rightarrow I = \int_0^{\frac{-1+\sqrt{4089}}{4}} (4x+1) \sqrt[3]{2x^2 + x + 1} dx.$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt[3]{2x^2 + x + 1} \Leftrightarrow t^3 = 2x^2 + x + 1 \Rightarrow 3t^2 dt = (4x+1) dx. \text{ Đổi cận } \begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 1 \\ x = \frac{-1+\sqrt{4089}}{4} \Rightarrow t = 8 \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó } I = \int_1^8 3t^3 dt = \frac{12285}{4}.$$

Câu 4. Cho hình thang cân $ABCD$ có các cạnh đáy $AB = 2a$, $CD = 4a$ và cạnh bên $AD = BC = 3a$. Tính theo a thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay hình thang cân $ABCD$ xung quanh trục đối xứng của nó.

Lời giải



Khi quay hình thang cân $ABCD$ xung quanh trục đối xứng d của nó ta được khối nón cụt như hình vẽ.

Áp dụng công thức tính thể tích khối nón cụt là $V = \frac{1}{3}h.(B + B' + \sqrt{BB'})$.

Với $h = BG = \sqrt{BC^2 - CG^2} = 2a\sqrt{2}$ và $B + B' + \sqrt{BB'} = \pi(a^2 + 4a^2 + 2a^2) = 7\pi a^2$.

Do đó $V = \frac{1}{3}h.(B + B' + \sqrt{BB'}) = \frac{14\sqrt{2}}{3}\pi a^3$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 1. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos 2x$.

A. $\int f(x) dx = \frac{1}{2} \sin 2x + C$.

B. $\int f(x) dx = -\frac{1}{2} \sin 2x + C$.

C. $\int f(x) dx = 2 \sin 2x + C$.

D. $\int f(x) dx = -2 \sin 2x + C$.

Câu 2. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{1-2x}$ là

A. $\int f(x) dx = -2 \ln|1-2x| + C$.

B. $\int f(x) dx = 2 \ln|1-2x| + C$.

C. $\int f(x) dx = -\frac{1}{2} \ln|1-2x| + C$.

D. $\int f(x) dx = \ln|1-2x| + C$.

Câu 3. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x(1+e^{-x})$.

A. $\int f(x) dx = e^x + 1 + C$.

B. $\int f(x) dx = e^x + x + C$.

C. $\int f(x) dx = -e^x + x + C$.

D. $\int f(x) dx = e^x + C$.

Câu 4. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos 2x$.

A. $\int \cos 2x dx = 2 \sin 2x + C$.

B. $\int \cos 2x dx = -\frac{1}{2} \sin 2x + C$.

C. $\int \cos 2x dx = \sin 2x + C$.

D. $\int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x + C$.

Câu 5. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{5x+4}$ là

A. $\frac{1}{\ln 5} \ln|5x+4| + C$.

B. $\ln|5x+4| + C$.

C. $\frac{1}{5} \ln|5x+4| + C$.

D. $\frac{1}{5} \ln(5x+4) + C$.

Câu 6. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $\int f'(x) dx = f(x) + C$ với mọi hàm $f(x)$ có đạo hàm trên \mathbb{R} .

B. $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$ với mọi hàm $f(x)$, $g(x)$ có đạo hàm trên \mathbb{R} .

C. $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$ với mọi hằng số k và với mọi hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên \mathbb{R} .

D. $\int [f(x) - g(x)] dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$ với mọi hàm $f(x)$, $g(x)$ có đạo hàm trên \mathbb{R} .

Câu 7. Hàm số $F(x) = x^2 \ln(\sin x - \cos x)$ là nguyên hàm của hàm số nào dưới đây?

A. $f(x) = \frac{x^2}{\sin x - \cos x}$.

B. $f(x) = 2x \ln(\sin x - \cos x) + \frac{x^2}{\sin x - \cos x}$.

C. $f(x) = 2x \ln(\sin x - \cos x) + \frac{x^2(\cos x + \sin x)}{\sin x - \cos x}$.

D. $f(x) = \frac{x^2(\sin x + \cos x)}{\sin x - \cos x}$.

Câu 8. Tích phân $\int_0^1 e^{-x} dx$ bằng

- A. $e-1$. B. $\frac{1}{e}-1$. C. $\frac{e-1}{e}$. D. $\frac{1}{e}$.

Câu 9. Tích phân $\int_1^3 e^x dx$ bằng

- A. e^{-2} . B. $e^3 - e$. C. $e - e^3$. D. e^2 .

Câu 10. Tính tích phân $I = \int_0^1 (2x+1) dx$.

- A. $I = 3$. B. $I = 2$. C. $I = -3$. D. $I = 1$.

Câu 11. Cho $\int_0^1 f(x) dx = 2$, $\int_1^2 f(x) dx = 4$, khi đó $\int_0^2 f(x) dx = ?$

- A. 6. B. 2. C. 1. D. 3.

Câu 12. Tích phân $\int_0^1 e^{2x} dx$ bằng

- A. $e^2 - 1$. B. $e - 1$. C. $\frac{e^2 - 1}{2}$. D. $e + \frac{1}{2}$.

Câu 13. Tính phân $\int_0^2 (x^2 - 2) dx$ bằng.

- A. $\frac{4}{3}$. B. $-\frac{4}{3}$. C. $\frac{2}{3}$. D. $-\frac{2}{3}$.

Câu 14. Tích phân $\int_1^2 3^{x-1} dx$ bằng:

- A. $\frac{3}{2}$. B. $\frac{2}{\ln 3}$. C. $2 \ln 3$. D. 2.

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(4;2;1)$ và điểm $B(2;0;5)$. Tọa độ vector \overline{AB} là

- A. $(2;2;-4)$. B. $(-2;-2;4)$. C. $(-1;-1;2)$. D. $(1;1;-2)$.

Câu 16. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;0;3)$, $B(2;3;-4)$, $C(-3;1;2)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

- A. $D(-2;4;-5)$. B. $D(4;2;9)$. C. $D(6;2;-3)$. D. $D(-4;-2;9)$.

Câu 17. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-5)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 16$. Tính bán kính của (S) .

- A. 4. B. 16. C. 7. D. 5.

- Câu 18.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;0;0)$, $B(0;-2;0)$ và $C(0;0;3)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt phẳng (ABC) .
- A. $\frac{x}{3} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{1} = 1$. B. $\frac{x}{1} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{3} = 1$. C. $\frac{x}{-2} + \frac{y}{1} + \frac{z}{3} = 1$. D. $\frac{x}{3} + \frac{y}{1} + \frac{z}{-2} = 1$.
- Câu 19.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): y - 2z + 1 = 0$. Vector nào dưới đây là một vector pháp tuyến của (P) ?
- A. $\vec{n} = (1; -2; 1)$. B. $\vec{n} = (1; -2; 0)$. C. $\vec{n} = (0; 1; -2)$. D. $\vec{n} = (0; 2; 4)$.
- Câu 20.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, vector nào sau đây **không phải** là vector pháp tuyến của mặt phẳng $(P): x + 3y - 5z + 2 = 0$.
- A. $\vec{n} = (-3; -9; 15)$. B. $\vec{n} = (-1; -3; 5)$.
C. $\vec{n} = (2; 6; -10)$. D. $\vec{n} = (-2; -6; -10)$.
- Câu 21.** Nếu $\int f(x)dx = 4x^3 + x^2 + C$ thì hàm số $f(x)$ bằng
- A. $f(x) = x^4 + \frac{x^3}{3} + Cx$. B. $f(x) = 12x^2 + 2x + C$.
C. $f(x) = 12x^2 + 2x$. D. $f(x) = x^4 + \frac{x^3}{3}$.
- Câu 22.** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ và có một nguyên hàm là $F(x)$. Tìm $I = \int [2f(x) + f'(x) + 1]dx$?
- A. $I = 2F(x) + xf(x) + C$. B. $I = 2xF(x) + x + 1$
C. $I = 2xF(x) + f(x) + x + C$. D. $I = 2F(x) + f(x) + x + C$.
- Câu 23.** Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos x - 2x$.
- A. $\int f(x)dx = \sin x - x^2 + C$. B. $\int f(x)dx = -\sin x - x^2 + C$.
C. $\int f(x)dx = \sin x - x^2$. D. $\int f(x)dx = \sin x - x^2$.
- Câu 24.** Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 1 + 2^x \ln 2$. Biết $F(1) = 10$, tính $F(0)$.
- A. $F(0) = 8$ B. $F(0) = 7$ C. $F(0) = 6$ D. $F(0) = 9$.
- Câu 25.** Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2(1 + 3 \ln x)$ là:
- A. $\frac{2x^3}{3} + x^3 \ln x + C$. B. $x^3 \ln x$. C. $x^3 \ln x + C$. D. $x^3 + x^3 \ln x + C$.
- Câu 26.** Biết $f(x)$ là hàm số liên tục trên \mathbb{R} , a là số thực thỏa mãn $0 < a < \pi$ và $\int_0^a f(x)dx = \int_a^\pi f(x)dx = 1$. Tính tích phân $\int_0^\pi f(x)dx$ bằng
- A. 0. B. 2. C. $\frac{1}{2}$. D. 1.
- Câu 27.** Tất cả giá trị của b thỏa mãn $\int_1^b (2x - 6)dx = 0$

A. $b = -5$ hoặc $b = 5$. B. $b = -1$ hoặc $b = 1$.

C. $b = -3$ hoặc $b = 3$. D. $b = 1$ hoặc $b = 5$.

Câu 28. Cho hàm số $f(x)$ có $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;3]$, $f(-1)=3$ và $\int_{-1}^3 f'(x)dx = 10$ giá trị của

$f(3)$ bằng

A. -13.

B. -7.

C. 13.

D. 7.

Câu 29. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và các tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)dx = 4$ và $\int_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2 + 1} dx = 2$, tính tích

phân $I = \int_0^1 f(x)dx$.

A. 2.

B. 6.

C. 3.

D. 1.

Câu 30. Cho $\int_1^2 \frac{1}{x^2 + 5x + 6} dx = a \ln 2 + b \ln 3 + c \ln 5$ với a, b, c là các số nguyên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a + b + c = 4$.

B. $a + b + c = -3$.

C. $a + b + c = 2$.

D. $a + b + c = 6$.

Câu 31. Tích phân $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{2x+1}} dx$ bằng

A. $\sqrt{2}$.

B. 3.

C. 2.

D. $\sqrt{5}$.

Câu 32. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(1;0;1)$, $B(2;1;2)$, $D(1;-1;1)$, $C'(4;5;-5)$. Tính tọa độ đỉnh A' của hình hộp.

A. $A'(4;6;-5)$.

B. $A'(2;0;2)$.

C. $A'(3;5;-6)$.

D. $A'(3;4;-6)$.

Câu 33. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(0;-2;1)$ và mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z + 3 = 0$. Biết mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có diện tích là 2π . Viết phương trình mặt cầu (S) .

A. $(S): x^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 3$.

B. $(S): x^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 1$.

C. $(S): x^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 3$.

D. $(S): x^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 2$

Câu 34. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 4z - 2 = 0$ và mặt phẳng $(\alpha): x + 4y + z - 11 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (P) , biết (P) song song với giá của vectơ $\vec{v} = (1;6;2)$, vuông góc với (α) và tiếp xúc với (S) .

A. $\begin{cases} x - 2y + z + 3 = 0 \\ x - 2y + z - 21 = 0 \end{cases}$

B. $\begin{cases} 3x + y + 4z + 1 = 0 \\ 3x + y + 4z - 2 = 0 \end{cases}$

C. $\begin{cases} 4x - 3y - z + 5 = 0 \\ 4x - 3y - z - 27 = 0 \end{cases}$

D. $\begin{cases} 2x - y + 2z + 3 = 0 \\ 2x - y + 2z - 21 = 0 \end{cases}$

Câu 35. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;1)$, $B(1;3;-5)$. Viết phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn AB .

A. $y - 2z + 2 = 0$.

B. $y - 3z + 4 = 0$.

C. $y - 2z - 6 = 0$.

D. $y - 3z - 8 = 0$.

Tự luận

Câu 1. Tính $\int_0^2 \frac{x-1}{x^2+4x+3} dx$

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $(f'(x))^2 + 4f(x) = 8x^2 + 4, \forall x \in [0;1]$ và $f(1) = 2$. Tính $\int_0^1 f(x) dx$.

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng $(0; +\infty) \setminus \{e\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{1}{x(\ln x - 1)}$, $f\left(\frac{1}{e^2}\right) = \ln 6$ và $f(e^2) = 3$. Tính biểu thức $f\left(\frac{1}{e}\right) + f(e^3)$

Câu 4. Cho hình nón tròn xoay có chiều cao $h = 20$ cm, bán kính đáy $r = 25$ cm. Mặt phẳng (α) đi qua đỉnh của hình nón cách tâm của đáy 12 cm. Tính diện tích thiết diện của hình nón cắt bởi mp (α) .

Nguyễn Bảo Vương

Trắc nghiệm

BẢNG ĐÁP ÁN

1.A	2.C	3.B	4.D	5.C	6.C	7.C	8.C	9.B	10.B
11.A	12.C	13.B	14.B	15.B	16.D	17.A	18.B	19.C	20.D
21.C	22.D	23.A	24.A	25.C	26.B	27.D	28.C	29.B	30.C
31.C	32.C	33.C	34.D	35.D					

Câu 1. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos 2x$.

A. $\int f(x) dx = \frac{1}{2} \sin 2x + C$.

B. $\int f(x) dx = -\frac{1}{2} \sin 2x + C$.

C. $\int f(x) dx = 2 \sin 2x + C$.

D. $\int f(x) dx = -2 \sin 2x + C$.

Lời giải

Ta có: $I = \int f(x) dx = \int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x + C$.

Câu 2. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{1-2x}$ là

A. $\int f(x) dx = -2 \ln|1-2x| + C$.

B. $\int f(x) dx = 2 \ln|1-2x| + C$.

C. $\int f(x) dx = -\frac{1}{2} \ln|1-2x| + C$.

D. $\int f(x) dx = \ln|1-2x| + C$.

Lời giải

Ta có $\int \frac{1}{1-2x} dx = -\frac{1}{2} \ln|1-2x| + C$.

Câu 3. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x(1+e^{-x})$.

A. $\int f(x) dx = e^x + 1 + C$.

B. $\int f(x) dx = e^x + x + C$.

C. $\int f(x) dx = -e^x + x + C$.

D. $\int f(x) dx = e^x + C$.

Lời giải

Ta có: $\int f(x) dx = \int (e^x + 1) dx = e^x + x + C$.

Câu 4. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos 2x$.

A. $\int \cos 2x dx = 2 \sin 2x + C$.

B. $\int \cos 2x dx = -\frac{1}{2} \sin 2x + C$.

C. $\int \cos 2x dx = \sin 2x + C$.

D. $\int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x + C$.

Lời giải

Theo công thức nguyên hàm mở rộng: $\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$.

$\Rightarrow \int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x + C$.

Câu 5. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{5x+4}$ là

A. $\frac{1}{\ln 5} \ln|5x+4| + C.$

B. $\ln|5x+4| + C.$

C. $\frac{1}{5} \ln|5x+4| + C.$

D. $\frac{1}{5} \ln(5x+4) + C.$

Lời giải

Chọn C

$$\int \frac{1}{5x+4} dx = \frac{1}{5} \int \frac{1}{5x+4} d(5x+4) = \ln|5x+4| + C.$$

Câu 6. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $\int f'(x) dx = f(x) + C$ với mọi hàm $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}.$

B. $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$ với mọi hàm $f(x), g(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}.$

C. $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$ với mọi hằng số k và với mọi hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}.$

D. $\int [f(x) - g(x)] dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$ với mọi hàm $f(x), g(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}.$

Lời giải

$$\int kf(x) dx = k \int f(x) dx \text{ với mọi hằng số } k \neq 0 \text{ và với mọi hàm số } f(x) \text{ có đạo hàm trên } \mathbb{R}.$$

Câu 7. Hàm số $F(x) = x^2 \ln(\sin x - \cos x)$ là nguyên hàm của hàm số nào dưới đây?

A. $f(x) = \frac{x^2}{\sin x - \cos x}.$

B. $f(x) = 2x \ln(\sin x - \cos x) + \frac{x^2}{\sin x - \cos x}.$

C. $f(x) = 2x \ln(\sin x - \cos x) + \frac{x^2(\cos x + \sin x)}{\sin x - \cos x}.$

D. $f(x) = \frac{x^2(\sin x + \cos x)}{\sin x - \cos x}.$

Lời giải

Chọn C

Vì $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ nên

$$f(x) = F'(x) = 2x \cdot \ln(\sin x - \cos x) + x^2 \cdot \frac{(\sin x - \cos x)'}{\sin x - \cos x} = 2x \cdot \ln(\sin x - \cos x) + x^2 \cdot \frac{\cos x + \sin x}{\sin x - \cos x}.$$

Câu 8. Tích phân $\int_0^1 e^{-x} dx$ bằng

A. $e-1.$

B. $\frac{1}{e}-1.$

C. $\frac{e-1}{e}.$

D. $\frac{1}{e}.$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \int_0^1 e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^1 = -\left(\frac{1}{e} - 1\right) = \frac{e-1}{e}.$$

Câu 9. Tích phân $\int_1^3 e^x dx$ bằng

- A. e^{-2} . **B.** $e^3 - e$. **C.** $e - e^3$. **D.** e^2 .

Lời giải

Ta có: $\int_1^3 e^x dx = e^x \Big|_1^3 = e^3 - e$.

Câu 10. Tính tích phân $I = \int_0^1 (2x+1) dx$.

- A. $I = 3$. **B.** $I = 2$. **C.** $I = -3$. **D.** $I = 1$.

Lời giải

$I = \int_0^1 (2x+1) dx = (x^2 + x) \Big|_0^1 = 2$.

Câu 11. Cho $\int_0^1 f(x) dx = 2$, $\int_1^2 f(x) dx = 4$, khi đó $\int_0^2 f(x) dx = ?$

- A.** 6. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

$\int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx = 6$.

Câu 12. Tích phân $\int_0^1 e^{2x} dx$ bằng

- A. $e^2 - 1$. **B.** $e - 1$. **C.** $\frac{e^2 - 1}{2}$. **D.** $e + \frac{1}{2}$.

Lời giải

Ta có $\int_0^1 e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2} = \frac{e^2 - 1}{2}$.

Câu 13. Tính phân $\int_0^2 (x^2 - 2) dx$ bằng.

- A. $\frac{4}{3}$. **B.** $-\frac{4}{3}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $-\frac{2}{3}$.

Lời giải

$\int_0^2 (x^2 - 2) dx = \left(\frac{x^3}{3} - 2x \right) \Big|_0^2 = -\frac{4}{3}$

Câu 14. Tích phân $\int_1^2 3^{x-1} dx$ bằng:

- A. $\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{2}{\ln 3}$. **C.** $2 \ln 3$. **D.** 2.

Lời giải

Ta có $I = \int_1^2 3^{x-1} dx = \frac{3^{x-1}}{\ln 3} \Big|_1^2 = \frac{3}{\ln 3} - \frac{1}{\ln 3} = \frac{2}{\ln 3}$.

- Câu 15.** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(4; 2; 1)$ và điểm $B(2; 0; 5)$. Tọa độ vector \overline{AB} là
A. $(2; 2; -4)$. **B.** $(-2; -2; 4)$. **C.** $(-1; -1; 2)$. **D.** $(1; 1; -2)$.

Lời giải

Tọa độ vector $\overline{AB} = (-2; -2; 4)$.

- Câu 16.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1; 0; 3)$, $B(2; 3; -4)$, $C(-3; 1; 2)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.
A. $D(-2; 4; -5)$. **B.** $D(4; 2; 9)$. **C.** $D(6; 2; -3)$. **D.** $D(-4; -2; 9)$.

Lời giải

Ta có $\overline{BA} = (-1; -3; 7)$, gọi $D(x; y; z)$, $\overline{CD} = (x+3; y-1; z-2)$.

$$ABCD \text{ là hình bình hành khi } \overline{BA} = \overline{CD} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3 = -1 \\ y-1 = -3 \\ z-2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = -2 \\ z = 9 \end{cases} \Rightarrow D(-4; -2; 9)$$

- Câu 17.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-5)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 16$. Tính bán kính của (S) .
A. 4. **B.** 16. **C.** 7. **D.** 5.

Lời giải

Ta có $R = \sqrt{16} = 4$.

- Câu 18.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 0; 0)$, $B(0; -2; 0)$ và $C(0; 0; 3)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt phẳng (ABC) .
A. $\frac{x}{3} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{1} = 1$. **B.** $\frac{x}{1} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{3} = 1$. **C.** $\frac{x}{-2} + \frac{y}{1} + \frac{z}{3} = 1$. **D.** $\frac{x}{3} + \frac{y}{1} + \frac{z}{-2} = 1$.

Lời giải

Mặt phẳng qua ba điểm A, B, C là mặt phẳng chắn có phương trình: $\frac{x}{1} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{3} = 1$.

- Câu 19.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): y - 2z + 1 = 0$. Vector nào dưới đây là một vector pháp tuyến của (P) ?
A. $\vec{n} = (1; -2; 1)$. **B.** $\vec{n} = (1; -2; 0)$. **C.** $\vec{n} = (0; 1; -2)$. **D.** $\vec{n} = (0; 2; 4)$.

Lời giải

Phương trình $(P): y - 2z + 1 = 0$ nên (P) có một vector pháp tuyến là $\vec{n} = (0; 1; -2)$.

- Câu 20.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, vector nào sau đây **không phải** là vector pháp tuyến của mặt phẳng $(P): x + 3y - 5z + 2 = 0$.
A. $\vec{n} = (-3; -9; 15)$. **B.** $\vec{n} = (-1; -3; 5)$.
C. $\vec{n} = (2; 6; -10)$. **D.** $\vec{n} = (-2; -6; -10)$.

Lời giải

Vector pháp tuyến của mặt phẳng $\vec{n}_{(P)} = (1; 3; -5)$.

Vì vectơ $\vec{n} = (-2; -6; -10)$ không cùng phương với $\vec{n}_{(P)}$ nên **không phải** là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) .

Câu 21. Nếu $\int f(x)dx = 4x^3 + x^2 + C$ thì hàm số $f(x)$ bằng

A. $f(x) = x^4 + \frac{x^3}{3} + Cx$. **B.** $f(x) = 12x^2 + 2x + C$.

C. $f(x) = 12x^2 + 2x$. **D.** $f(x) = x^4 + \frac{x^3}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $f(x) = \left(\int f(x)dx\right)' = (4x^3 + x^2 + C)' = 12x^2 + 2x$

Câu 22. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ và có một nguyên hàm là $F(x)$. Tìm

$I = \int [2f(x) + f'(x) + 1] dx$?

A. $I = 2F(x) + xf(x) + C$.

B. $I = 2xF(x) + x + 1$

C. $I = 2xF(x) + f(x) + x + C$.

D. $I = 2F(x) + f(x) + x + C$.

Lời giải

Chọn D

Ta có

$$I = \int [2f(x) + f'(x) + 1] dx$$

$$= \int 2f(x) dx + \int f'(x) dx + \int 1 dx$$

$$= 2F(x) + f(x) + x + C$$

$$I = \int [2f(x) + f'(x) + 1] dx = 2F(x) + f(x) + x + C$$

Câu 23. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos x - 2x$.

A. $\int f(x) dx = \sin x - x^2 + C$.

B. $\int f(x) dx = -\sin x - x^2 + C$.

C. $\int f(x) dx = \sin x - x^2$.

D. $\int f(x) dx = \sin x - x^2$.

Lời giải

Chọn A

$$\int f(x) dx = \int (\cos x - 2x) dx = \sin x - x^2 + C$$

Vậy, ta chọn **A**.

Câu 24. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 1 + 2^x \ln 2$. Biết $F(1) = 10$, tính $F(0)$.

A. $F(0) = 8$

B. $F(0) = 7$

C. $F(0) = 6$

D. $F(0) = 9$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $F(x) = \int f(x) dx = \int (1 + 2^x \ln 2) dx = x + 2^x + C$. Vì $F(1) = 10 \Rightarrow 1 + 2^1 + C = 10 \Leftrightarrow C = 7$

$F(x) = x + 2^x + 7 \Rightarrow F(0) = 8$. Chọn đáp án **A**.

Câu 25. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2(1 + 3 \ln x)$ là:

- A. $\frac{2x^3}{3} + x^3 \ln x + C$. B. $x^3 \ln x$. **C. $x^3 \ln x + C$.** D. $x^3 + x^3 \ln x + C$.

Lời giải

Chọn **C**

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = 1 + 3 \ln x \\ dv = x^2 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{3}{x} dx \\ v = \frac{x^3}{3} \end{cases}$$

$$\int f(x) dx = \frac{x^3}{3}(1 + 3 \ln x) - \int x^2 dx = \frac{x^3}{3}(1 + 3 \ln x) - \frac{x^3}{3} + C = x^3 \ln x + C.$$

Câu 26. Biết $f(x)$ là hàm số liên tục trên \mathbb{R} , a là số thực thỏa mãn $0 < a < \pi$ và

$$\int_0^a f(x) dx = \int_a^\pi f(x) dx = 1. \text{ Tính tích phân } \int_0^\pi f(x) dx \text{ bằng}$$

- A. 0. **B. 2.** C. $\frac{1}{2}$. D. 1.

Lời giải

$$\int_0^\pi f(x) dx = \int_0^a f(x) dx + \int_a^\pi f(x) dx = 1 + 1 = 2.$$

Câu 27. Tất cả giá trị của b thỏa mãn $\int_1^b (2x - 6) dx = 0$

- A. $b = -5$ hoặc $b = 5$. B. $b = -1$ hoặc $b = 1$.
C. $b = -3$ hoặc $b = 3$. **D. $b = 1$ hoặc $b = 5$.**

Lời giải

$$\int_1^b (2x - 6) dx = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 6x) \Big|_1^b = 0 \Leftrightarrow b^2 - 6b + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ b = 5 \end{cases}$$

Câu 28. Cho hàm số $f(x)$ có $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 3]$, $f(-1) = 3$ và $\int_{-1}^3 f'(x) dx = 10$ giá trị của $f(3)$ bằng

- A. -13. B. -7. **C. 13.** D. 7.

Lời giải

$$\text{Ta có } \int_{-1}^3 f'(x) dx = 10 \Rightarrow f(x) \Big|_{-1}^3 = 10 \Leftrightarrow f(3) - f(-1) = 10 \Leftrightarrow f(3) = f(-1) + 10 = 13.$$

Câu 29. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và các tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x) dx = 4$ và $\int_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2 + 1} dx = 2$, tính tích

$$\text{phân } I = \int_0^1 f(x) dx.$$

- A. 2. **B. 6.** C. 3. D. 1.

Lời giải

$$\text{Xét } I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{f(\tan x)}{1 + \tan^2 x} (1 + \tan^2 x) dx.$$

$$\text{Đặt } u = \tan x \Rightarrow du = (1 + \tan^2 x) dx$$

Khi $x = 0$ thì $u = 0$; khi $x = \frac{\pi}{4}$ thì $u = 1$.

Nên $I = \int_0^1 \frac{f(u)}{1+u^2} du = \int_0^1 \frac{f(x)}{1+x^2} dx$. Suy ra $\int_0^1 \frac{f(x)}{1+x^2} dx = 4$.

Mặt khác $\int_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2+1} dx = \int_0^1 \frac{[(x^2+1)-1]f(x)}{x^2+1} dx = \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 \frac{f(x)}{1+x^2} dx$.

Do đó $2 = \int_0^1 f(x) dx - 4 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx = 6$.

Câu 30. Cho $\int_1^2 \frac{1}{x^2+5x+6} dx = a \ln 2 + b \ln 3 + c \ln 5$ với a, b, c là các số nguyên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $a+b+c=4$. B. $a+b+c=-3$. C. $a+b+c=2$. D. $a+b+c=6$.

Lời giải

Ta có: $\int_1^2 \frac{1}{x^2+5x+6} dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x+2} + \frac{-1}{x+3} \right) dx = (\ln|x+2| - \ln|x+3|) \Big|_1^2$
 $= (\ln 4 - \ln 5) - (\ln 3 - \ln 4) = 2 \ln 4 - \ln 3 - \ln 5 = 4 \ln 2 - \ln 3 - \ln 5$.

Vậy $a+b+c = 4 + (-1) + (-1) = 2$.

Câu 31. Tích phân $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{2x+1}} dx$ bằng

- A. $\sqrt{2}$. B. 3. C. 2. D. $\sqrt{5}$.

Lời giải

Ta có $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{2x+1}} dx = \int_0^4 (2x+1)^{-\frac{1}{2}} dx = (2x+1)^{\frac{1}{2}} \Big|_0^4 = 2$.

Câu 32. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(1;0;1)$, $B(2;1;2)$, $D(1;-1;1)$, $C'(4;5;-5)$. Tính tọa độ đỉnh A' của hình hộp.

- A. $A'(4;6;-5)$. B. $A'(2;0;2)$. C. $A'(3;5;-6)$. D. $A'(3;4;-6)$.

Lời giải

Theo quy tắc hình hộp ta có: $\overline{AB} + \overline{AD} + \overline{AA'} = \overline{AC'}$.

Suy ra $\overline{AA'} = \overline{AC'} - \overline{AB} - \overline{AD}$.

Lại có: $\overline{AC'} = (3;5;-6)$, $\overline{AB} = (1;1;1)$, $\overline{AD} = (0;-1;0)$.

Do đó: $\overline{AA'} = (2;5;-7)$.

Suy ra $A'(3;5;-6)$.

Câu 33. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(0;-2;1)$ và mặt phẳng $(P): x+2y-2z+3=0$. Biết mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có diện tích là 2π . Viết phương trình mặt cầu (S) .

- A. $(S): x^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 3$. B. $(S): x^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 1$.

C. $(S): x^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 3.$

D. $(S): x^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 2$

Lời giải.

Ta có $h = d(I, (P)) = 1$

Gọi (C) là đường tròn giao tuyến có bán kính r .

Vì $S = r^2 \cdot \pi = 2\pi \Leftrightarrow r = \sqrt{2}.$

Mà $R^2 = r^2 + h^2 = 3 \Rightarrow R = \sqrt{3}.$

Vậy phương trình mặt cầu tâm $I(0; -2; 1)$ và bán kính $R = \sqrt{3}.$

$(S): x^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 3$

Câu 34. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 4z - 2 = 0$ và mặt phẳng $(\alpha): x + 4y + z - 11 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (P) , biết (P) song song với giá của vectơ $\vec{v} = (1; 6; 2)$, vuông góc với (α) và tiếp xúc với (S) .

A. $\begin{cases} x - 2y + z + 3 = 0 \\ x - 2y + z - 21 = 0 \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} 3x + y + 4z + 1 = 0 \\ 3x + y + 4z - 2 = 0 \end{cases}$

C. $\begin{cases} 4x - 3y - z + 5 = 0 \\ 4x - 3y - z - 27 = 0 \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} 2x - y + 2z + 3 = 0 \\ 2x - y + 2z - 21 = 0 \end{cases}$

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; -3; 2)$ và bán kính $R = 4$.

Vì mặt phẳng (P) song song với giá của vectơ $\vec{v} = (1; 6; 2)$, vuông góc với (α) nên có vec tơ pháp tuyến $\vec{n} = [\vec{n}_{(\alpha)}, \vec{v}] = (2; -1; 2)$.

Mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z + D = 0$.

Vì (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) nên ta có:

$$d(I; (P)) = R \Leftrightarrow \frac{|2 \cdot 1 + 3 + 2 \cdot 2 + D|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 4 \Leftrightarrow |D + 9| = 12 \Leftrightarrow \begin{cases} D = -21 \\ D = 3 \end{cases}$$

Vậy phương trình mặt phẳng (α) là: $\begin{cases} 2x - y + 2z + 3 = 0 \\ 2x - y + 2z - 21 = 0 \end{cases}$

Câu 35. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 1; 1)$, $B(1; 3; -5)$. Viết phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn AB .

A. $y - 2z + 2 = 0.$ **B.** $y - 3z + 4 = 0.$ **C.** $y - 2z - 6 = 0.$ **D.** $y - 3z - 8 = 0.$

Lời giải

Tọa độ trung điểm M của đoạn AB là: $M(1; 2; -2)$.

Mặt phẳng trung trực của đoạn AB đi qua M và có vectơ pháp tuyến $\vec{AB} = (0; 2; -6)$ có phương trình $2y - 6z - 16 = 0$ hay $y - 3z - 8 = 0$.

Tự luận

Câu 1. Tính $\int_0^2 \frac{x-1}{x^2+4x+3} dx$

Lời giải

Ta có: $\frac{x-1}{x^2+4x+3} = \frac{x-1}{(x+1)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+3}$

$$A = \frac{x-1}{x+3} \Big|_{x=-1} = -1, B = \frac{x-1}{x+1} \Big|_{x=-3} = 2$$

$$\int_0^2 \frac{x-1}{x^2+4x+3} dx = \int_0^2 \left(\frac{-1}{x+1} + \frac{2}{x+3} \right) dx = -\ln|x+1| \Big|_0^2 + 2\ln|x+3| \Big|_0^2 = -\ln 3 + 2\ln 5 - 2\ln 3 = 2\ln 5 - 3\ln 3$$

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $(f'(x))^2 + 4f(x) = 8x^2 + 4, \forall x \in [0;1]$ và $f(1) = 2$. Tính $\int_0^1 f(x) dx$.

Lời giải

Có $(f'(x))^2 + 4f(x) = 8x^2 + 4 \Rightarrow \int_0^1 (f'(x))^2 dx + 4 \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (8x^2 + 4) dx = \frac{20}{3}$. (1)

Ta có $\int_0^1 xf'(x) dx = xf(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 f(x) dx = 2 - \int_0^1 f(x) dx \Rightarrow -4 \int_0^1 xf'(x) dx = -8 + 4 \int_0^1 f(x) dx$. (2)

$$\int_0^1 (2x)^2 dx = \frac{4}{3}$$
. (3)

Cộng vế với vế của (1), (2), (3) ta được $\int_0^1 (f'(x) - 2x)^2 dx = 0 \Rightarrow f'(x) = 2x \Rightarrow f(x) = x^2 + C$.

Có $f(1) = C + 1 = 2 \Rightarrow C = 1 \Rightarrow f(x) = x^2 + 1$.

Do đó $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (x^2 + 1) dx = \frac{4}{3}$.

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng $(0; +\infty) \setminus \{e\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{1}{x(\ln x - 1)}$,

$f\left(\frac{1}{e^2}\right) = \ln 6$ và $f(e^2) = 3$. Tính biểu thức $f\left(\frac{1}{e}\right) + f(e^3)$

Lời giải

Ta có $f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{1}{x(\ln x - 1)} dx = \int \frac{1}{\ln x - 1} d(\ln x) = \ln|\ln x - 1| + C$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} \ln|\ln x - 1| + C_1 & \text{khi } 0 < x < e \\ \ln|\ln x - 1| + C_2 & \text{khi } x > e \end{cases}$$

Do $f\left(\frac{1}{e^2}\right) = \ln 6 \Rightarrow \ln\left|\ln \frac{1}{e^2} - 1\right| + C_1 = \ln 6 \Leftrightarrow \ln 3 + C_1 = \ln 6 \Leftrightarrow C_1 = \ln 2$

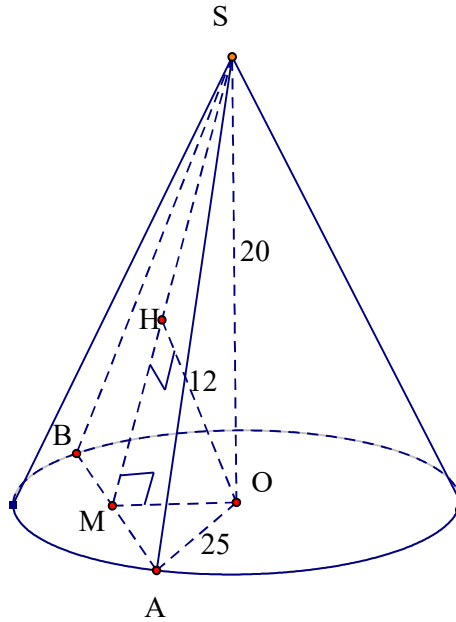
Đồng thời $f(e^2) = 3 \Rightarrow \ln|\ln e^2 - 1| + C_2 = 3 \Leftrightarrow C_2 = 3$

Khi đó: $f\left(\frac{1}{e}\right) + f(e^3) = \ln\left|\ln \frac{1}{e} - 1\right| + \ln 2 + \ln|\ln e^3 - 1| + 3 = 3(\ln 2 + 1)$.

Câu 4. Cho hình nón tròn xoay có chiều cao $h = 20$ cm, bán kính đáy $r = 25$ cm. Mặt phẳng (α) đi qua đỉnh của hình nón cách tâm của đáy 12 cm. Tính diện tích thiết diện của hình nón cắt bởi mp (α) .

Lời giải

Ta có hình vẽ sau :



Ta có: $d(O, (\alpha)) = OH = 12$.

Diện tích thiết diện của hình nón cắt bởi mp (α) là: $S_{\Delta SAB} = \frac{1}{2} SM \cdot AB = SM \cdot MA$.

Trong tam giác SMO vuông tại O : $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OM^2} \Leftrightarrow \frac{1}{12^2} = \frac{1}{20^2} + \frac{1}{OM^2} \Leftrightarrow OM = 15$.

Suy ra $SM = \sqrt{SO^2 + OM^2} = \sqrt{20^2 + 15^2} = 25$.

Mặt khác ta có: M là trung điểm của AB và $OM \perp AB$.

Xét tam giác MOA vuông tại M : $MA = \sqrt{OA^2 - OM^2} = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20$.

Vậy $S_{\Delta SAB} = SM \cdot MA = 25 \cdot 20 = 500$ (cm²).

Nguyễn Bảo Vương

Trắc nghiệm

Câu 1. Nguyên hàm $\int \sin 2x dx$ bằng:

- A. $-\frac{1}{2} \cos 2x + C$. B. $\cos 2x + C$. C. $\frac{1}{2} \cos 2x + C$. D. $-\cos 2x + C$.

Câu 2. Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{3x+1}$ trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$ Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $F(x) = \frac{1}{3} \ln(3x+1) + C$. B. $F(x) = \frac{1}{3} \ln(-3x-1) + C$.
 C. $F(x) = \ln|3x+1| + C$. D. $F(x) = \ln(-3x-1) + C$.

Câu 3. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 - 2x + 1$ là

- A. $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2 + x + C$. B. $F(x) = 2x - 2 + C$.
 C. $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x + C$. D. $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + x + C$.

Câu 4. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin 2x$ là

- A. $-\cos 2x + C$. B. $\cos 2x + C$. C. $-\cos^2 x + C$. D. $-\sin^2 x + C$.

Câu 5. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = -e^{-x}$ là

- A. $-e^{-x} + C$. B. $-e^x + C$. C. $e^{-x} + C$. D. $e^x + C$.

Câu 6. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + \sin 2x$ là

- A. $x^2 - \frac{1}{2} \cos 2x + C$. B. $x^2 + \frac{1}{2} \cos 2x + C$. C. $x^2 - 2 \cos 2x + C$. D. $x^2 + 2 \cos 2x + C$.

Câu 7. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{5x-3}$.

- A. $\int f(x) dx = -\frac{1}{3} e^{5x-3} + c$. B. $\int f(x) dx = e^{5x-3} + c$.
 C. $\int f(x) dx = \frac{1}{5} e^{5x-3} + c$. D. $\int f(x) dx = 5e^{5x-3} + c$.

Câu 8. Tích phân $I = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} + 2\right) dx$ bằng

- A. $I = \ln 2 + 2$. B. $I = \ln 2 + 1$. C. $I = \ln 2 - 1$. D. $I = \ln 2 + 3$.

Câu 9. Cho các số thực a, b và các mệnh đề:

1. $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$. 2. $\int_a^b 2f(x) dx = 2 \int_a^b f(x) dx$.
 3. $\int_a^b f^2(x) dx = \left[\int_a^b f(x) dx \right]^2$. 4. $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(u) du$.

Số mệnh đề đúng trong 4 mệnh đề trên là:

A. 3. B. 4. C. 2. D. 1.

Câu 10. Biết $\int_a^b (2x-1)dx = 1$. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

A. $b-a = 1$. B. $a^2 - b^2 = a - b - 1$. C. $b^2 - a^2 = b - a + 1$. D. $a - b = 1$.

Câu 11. Tích phân $\int_1^2 3^{x-1} dx$ bằng

A. $\frac{2}{\ln 3}$. B. $2 \ln 3$. C. $\frac{3}{2}$. D. 2.

Câu 12. Tính $I = \int_0^1 e^{3x} \cdot dx$.

A. $I = e^3 - 1$. B. $I = e - 1$. C. $\frac{e^3 - 1}{3}$. D. $I = e^3 + \frac{1}{2}$.

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và số thực k tùy ý. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$. B. $\int_a^b xf(x)dx = x \int_a^b f(x)dx$.
 C. $\int_a^a kf(x)dx = 0$. D. $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.

Câu 14. Tính tích phân $I = \int_0^3 \frac{dx}{x+2}$.

A. $I = \frac{4581}{5000}$. B. $I = \log \frac{5}{2}$. C. $I = \ln \frac{5}{2}$. D. $I = -\frac{21}{100}$.

Câu 15. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(2; 1; -2)$ và $N(4; -5; 1)$. Tìm độ dài đoạn thẳng MN .

A. 49. B. 7. C. $\sqrt{7}$. D. $\sqrt{41}$.

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; 3)$. Tìm tọa độ điểm A_1 là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (Oyz) .

A. $A_1(1; 0; 0)$. B. $A_1(0; 2; 3)$. C. $A_1(1; 0; 3)$. D. $A_1(1; 2; 0)$.

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 2z + m = 0$ là phương trình của một mặt cầu.

A. $m \leq 6$. B. $m < 6$. C. $m > 6$. D. $m \geq 6$.

Câu 18. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng (P) đi qua các điểm $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$ và $C(0; 0; c)$ với $abc \neq 0$. Viết phương trình của mặt phẳng (P) .

A. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0$. B. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0$. C. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} + 1 = 0$. D. $ax + by + cz - 1 = 0$.

Câu 19. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): -3x + 2z - 1 = 0$. Vectơ \vec{n} nào sau đây là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) .

A. $\vec{n} = (3; 2; -1)$. B. $\vec{n} = (-3; 2; -1)$. C. $\vec{n} = (-3; 0; 2)$. D. $\vec{n} = (3; 0; 2)$.

Câu 20. Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $A(2; 0; 0)$, $B(0; -2; 0)$, $C(0; 0; -1)$. Viết phương trình mặt phẳng (ABC) .

A. $\frac{x}{-2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{1} = 0$. B. $\frac{x}{-2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{1} = 1$. C. $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{1} = 1$. D. $\frac{x}{2} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{-1} = 1$.

Câu 21. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{2x-1}$. Biết $F(1) = 2$. Giá trị của $F(2)$ là

A. $F(2) = \frac{1}{2} \ln 3 + 2$. B. $F(2) = \ln 3 + 2$. C. $F(2) = \frac{1}{2} \ln 3 - 2$. D. $F(2) = 2 \ln 3 - 2$.

Câu 22. Biết $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (2x^2 - 5x + 2)e^{-x}$ trên \mathbb{R} . Giá trị của biểu thức $f(F(0))$ bằng

A. $9e$. B. $3e$. C. $20e^2$. D. $-\frac{1}{e}$.

Câu 23. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3 \cos x + \frac{1}{x^2}$ trên $(0; +\infty)$.

A. $\int f(x) dx = 3 \cos x + \ln x + C$. B. $\int f(x) dx = 3 \sin x - \frac{1}{x} + C$.
C. $\int f(x) dx = -3 \sin x + \frac{1}{x} + C$. D. $\int f(x) dx = 3 \cos x + \frac{1}{x} + C$.

Câu 24. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 1 + 2^x \ln 2$. Biết $F(1) = 10$, tính $F(0)$.

A. $F(0) = 8$ B. $F(0) = 7$ C. $F(0) = 6$ D. $F(0) = 9$.

Câu 25. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = (1 + 2x)[1 + \ln(x + 1)]$ là

A. $x + \frac{x^2}{2} + (x + x^2) \ln x + C$. B. $x + \frac{3x^2}{2} + (x + x^2) \ln x + C$.
C. $x + \frac{x^2}{2} - (x + x^2) \ln x + C$. D. $x + \frac{3x^2}{2} + (x + x^2) \ln x + C$.

Câu 26. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(-2; 3)$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên khoảng $(-2; 3)$. Tính $I = \int_{-1}^2 [f(x) + 2x] dx$, biết $F(-1) = 1$ và $F(2) = 4$.

A. $I = 6$. B. $I = 10$. C. $I = 3$. D. $I = 9$.

Câu 27. Biết $\int_0^3 \frac{dx}{(x+2)(x+4)} = a \ln 2 + b \ln 5 + c \ln 7$, ($a, b, c \in \mathbb{Q}$). Giá trị của biểu thức $2a + 3b - c$ bằng

A. 5. B. 4. C. 2. D. 3.

Câu 28. Cho $\int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{x}{3x + \sqrt{9x^2 - 1}} dx = a + b\sqrt{2}$, với a, b là các số hữu tỉ. Khi đó, giá trị của a là:

A. $-\frac{26}{27}$. B. $\frac{26}{27}$. C. $\frac{27}{26}$. D. $-\frac{25}{27}$.

Câu 29. Cho f là hàm số liên tục thỏa $\int_0^1 f(x) dx = 7$. Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot f(\sin x) dx$.

- A. 1. B. 9. C. 3. D. 7.

Câu 30. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và thỏa mãn $\int_{-5}^1 f(x) dx = 9$. Tính tích phân $\int_0^2 [f(1-3x)+9] dx$.

- A. 27. B. 21. C. 15. D. 75.

Câu 31. Biết $f(x)$ là hàm số liên tục trên \mathbb{R} và $\int_0^9 f(x) dx = 9$. Khi đó tính $I = \int_2^5 f(3x-6) dx$.

- A. $I = 27$. B. $I = 3$. C. $I = 24$. D. $I = 0$.

Câu 32. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vector \vec{u} và \vec{v} tạo với nhau một góc 120° và $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 5$. Tính $|\vec{u} + \vec{v}|$

- A. $\sqrt{19}$. B. -5 . C. 7. D. $\sqrt{39}$.

Câu 33. Mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 6z - 2 = 0$ có tâm I và bán kính R lần lượt là

- A. $I(-1; 2; -3)$. B. $I(1; -2; 3)$ $R = 4$.
C. $I(-1; 2; -3)$, $R = 16$. D. $I(-1; 2; -3)$, $R = \sqrt{12}$.

Câu 34. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(-3; 1; 4)$ và gọi A, B, C lần lượt là hình chiếu của M trên các trục Ox, Oy, Oz . Phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt phẳng song song với mặt phẳng (ABC) ?

- A. $4x - 12y - 3z + 12 = 0$. B. $3x + 12y - 4z + 12 = 0$.
C. $3x + 12y - 4z - 12 = 0$. D. $4x - 12y - 3z - 12 = 0$.

Câu 35. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; 4; 1)$, $B(-1; 1; 3)$ và mặt phẳng $(P): x - 3y + 2z - 5 = 0$. Một mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với (P) có dạng là $ax + by + cz - 11 = 0$. Tính $a + b + c$.

- A. $a + b + c = 10$. B. $a + b + c = 3$. C. $a + b + c = 5$. D. $a + b + c = -7$.

Tự luận

Câu 1. Tính $\int_2^{e+1} \frac{\ln(x-1)}{(x-1)^2} dx$

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(1) = 5$ và $2xf'(x) + f(x) = 6x$ với mọi $x > 0$. Tính $\int_4^9 f(x) dx$.

Câu 3. Cho $f(x) = \frac{x}{\cos^2 x}$ trên $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của $xf'(x)$ thỏa mãn $F(0) = 0$. Biết $a \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ thỏa mãn $\tan a = 3$. Tính $F(a) - 10a^2 + 3a$.

Câu 4. Cho hình một hình nón (N) có đáy là hình tròn tâm O . Đường kính $2a$ và đường cao $SO = a$. Cho điểm H thay đổi trên đoạn SO . Một mặt phẳng (P) vuông góc với SO tại H và cắt hình nón theo đường tròn (C). Khối nón có đỉnh O và đáy là đường tròn (C) có thể tích lớn nhất bằng bao nhiêu?

Nguyễn Bảo Vương

Trắc nghiệm

BẢNG ĐÁP ÁN

1.A	2.B	3.C	4.C	5.C	6.A	7.C	8.A	9.C	10.C
11.A	12.C	13.B	14.C	15.B	16.B	17.B	18.B	19.C	20.D
21.A	22.A	23.B	24.A	25.A	26.A	27.D	28.B	29.D	30.B
31.B	32.A	33.A	34.D	35.C					

Câu 1. Nguyên hàm $\int \sin 2x dx$ bằng:

- A.** $-\frac{1}{2}\cos 2x + C$. **B.** $\cos 2x + C$. **C.** $\frac{1}{2}\cos 2x + C$. **D.** $-\cos 2x + C$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \int \sin 2x dx = \frac{1}{2} \int \sin 2x d2x = -\frac{1}{2} \cos 2x + C.$$

Câu 2. Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{3x+1}$ trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$ Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.** $F(x) = \frac{1}{3} \ln(3x+1) + C$. **B.** $F(x) = \frac{1}{3} \ln(-3x-1) + C$.
C. $F(x) = \ln|3x+1| + C$. **D.** $F(x) = \ln(-3x-1) + C$.

Lời giải

$$F(x) = \int \frac{1}{3x+1} dx = \frac{1}{3} \ln|3x+1| + C = \frac{1}{3} \ln(-3x-1) + C \quad (\text{do } x \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)).$$

Câu 3. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 - 2x + 1$ là

- A.** $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2 + x + C$. **B.** $F(x) = 2x - 2 + C$.
C. $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x + C$. **D.** $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + x + C$.

Lời giải

$$F(x) = \int f(x) dx = \int (x^2 - 2x + 1) dx = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x + C.$$

Câu 4. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin 2x$ là

- A.** $-\cos 2x + C$. **B.** $\cos 2x + C$. **C.** $-\cos^2 x + C$. **D.** $-\sin^2 x + C$.

Lời giải

$$\int f(x) dx = \int \sin 2x dx = -\frac{1}{2} \cos 2x + C = -\frac{1}{2} (2 \cos^2 x - 1) + C = -\cos^2 x + C.$$

Câu 5. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = -e^{-x}$ là

- A.** $-e^{-x} + C$. **B.** $-e^x + C$. **C.** $e^{-x} + C$. **D.** $e^x + C$.

Lời giải

Ta có: $\int -e^{-x} dx = -\int e^{-x} dx = e^{-x} + C$.

Câu 6. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + \sin 2x$ là

- A. $x^2 - \frac{1}{2} \cos 2x + C$. B. $x^2 + \frac{1}{2} \cos 2x + C$. C. $x^2 - 2 \cos 2x + C$. D. $x^2 + 2 \cos 2x + C$.

Lời giải

Ta có $\int f(x) dx = \int (2x + \sin 2x) dx = x^2 - \frac{1}{2} \cos 2x + C$.

Câu 7. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{5x-3}$.

- A. $\int f(x) dx = -\frac{1}{3} e^{5x-3} + c$. B. $\int f(x) dx = e^{5x-3} + c$.
 C. $\int f(x) dx = \frac{1}{5} e^{5x-3} + c$. D. $\int f(x) dx = 5e^{5x-3} + c$.

Lời giải

Chọn C

$\int e^{5x-3} dx = \int e^{5x-3} \frac{d(5x-3)}{5} = \frac{1}{5} e^{5x-3} + c$.

Câu 8. Tích phân $I = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} + 2 \right) dx$ bằng

- A. $I = \ln 2 + 2$. B. $I = \ln 2 + 1$. C. $I = \ln 2 - 1$. D. $I = \ln 2 + 3$.

Lời giải

Ta có: $I = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} + 2 \right) dx = (\ln|x| + 2x) \Big|_1^2 = \ln 2 + 4 - 2 = \ln 2 + 2$.

Câu 9. Cho các số thực a, b và các mệnh đề:

1. $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$. 2. $\int_a^b 2f(x) dx = 2 \int_a^b f(x) dx$.
 3. $\int_a^b f^2(x) dx = \left[\int_a^b f(x) dx \right]^2$. 4. $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(u) du$.

Số mệnh đề đúng trong 4 mệnh đề trên là:

- A. 3. B. 4. C. 2. D. 1.

Lời giải

Theo định nghĩa và tính chất của tích phân ta có 1 và 4 đúng.

Câu 10. Biết $\int_a^b (2x-1) dx = 1$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $b-a=1$. B. $a^2-b^2=a-b-1$. C. $b^2-a^2=b-a+1$. D. $a-b=1$.

Lời giải

Ta có: $\int_a^b (2x-1) dx = (x^2-x) \Big|_a^b = b^2-b-(a^2-a)$.

Mà $\int_a^b (2x-1) dx = 1 \Leftrightarrow b^2-b-a^2+a=1 \Leftrightarrow b^2-a^2=b-a+1$.

Câu 11. Tích phân $\int_1^2 3^{x-1} dx$ bằng

- A.** $\frac{2}{\ln 3}$. **B.** $2 \ln 3$. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** 2.

Lời giải

Ta có $\int_1^2 3^{x-1} dx = \int_1^2 3^{x-1} d(x-1) = \left. \frac{3^{x-1}}{\ln 3} \right|_1^2 = \frac{2}{\ln 3}$.

Câu 12. Tính $I = \int_0^1 e^{3x} . dx$.

- A.** $I = e^3 - 1$. **B.** $I = e - 1$. **C.** $\frac{e^3 - 1}{3}$. **D.** $I = e^3 + \frac{1}{2}$.

Lời giải

Ta có $I = \int_0^1 e^{3x} . dx = \left. \frac{1}{3} e^{3x} \right|_{x=0}^{x=1} = \frac{e^3 - 1}{3}$.

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và số thực k tùy ý. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

- A.** $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$. **B.** $\int_a^b xf(x) dx = x \int_a^b f(x) dx$.
C. $\int_a^a kf(x) dx = 0$. **D.** $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$.

Lời giải

Dựa vào tính chất của tích phân, A, C, D đúng nên B sai.

Câu 14. Tính tích phân $I = \int_0^3 \frac{dx}{x+2}$.

- A.** $I = \frac{4581}{5000}$. **B.** $I = \log \frac{5}{2}$. **C.** $I = \ln \frac{5}{2}$. **D.** $I = -\frac{21}{100}$.

Lời giải

Ta có: $I = \int_0^3 \frac{dx}{x+2} = \ln|x+2| \Big|_0^3 = \ln \frac{5}{2}$.

Câu 15. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(2;1;-2)$ và $N(4;-5;1)$. Tìm độ dài đoạn thẳng MN .

- A.** 49. **B.** 7. **C.** $\sqrt{7}$. **D.** $\sqrt{41}$.

Lời giải

Ta có: $MN = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2 + (z_N - z_M)^2} = 7$.

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;3)$. Tìm tọa độ điểm A_1 là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (Oyz) .

- A.** $A_1(1;0;0)$. **B.** $A_1(0;2;3)$. **C.** $A_1(1;0;3)$. **D.** $A_1(1;2;0)$.

Lời giải

Tọa độ điểm A_1 là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (Oyz) là: $A_1(0;2;3)$.

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 2z + m = 0$ là phương trình của một mặt cầu.

- A. $m \leq 6$. B. $m < 6$. C. $m > 6$. D. $m \geq 6$.

Lời giải

Ta có $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 2z + m = 0$ là phương trình của một mặt cầu

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 - d > 0 \Leftrightarrow 2^2 + (-1)^2 + 1^2 - m > 0 \Leftrightarrow m < 6.$$

Câu 18. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng (P) đi qua các điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$ và $C(0;0;c)$ với $abc \neq 0$. Viết phương trình của mặt phẳng (P) .

- A. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0$. B. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0$. C. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} + 1 = 0$. D. $ax + by + cz - 1 = 0$.

Lời giải

Áp dụng phương trình mặt chắn ta được phương trình của mặt phẳng (P) là:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0.$$

Câu 19. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): -3x + 2z - 1 = 0$. Vector \vec{n} nào sau đây là một vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) .

- A. $\vec{n} = (3;2;-1)$. B. $\vec{n} = (-3;2;-1)$. C. $\vec{n} = (-3;0;2)$. D. $\vec{n} = (3;0;2)$.

Lời giải

$$\vec{n} = (-3;0;2)$$

Câu 20. Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $A(2;0;0)$, $B(0;-2;0)$, $C(0;0;-1)$. Viết phương trình mặt phẳng (ABC) .

- A. $\frac{x}{-2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{1} = 0$. B. $\frac{x}{-2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{1} = 1$. C. $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{1} = 1$. D. $\frac{x}{2} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{-1} = 1$.

Lời giải

Phương trình mặt phẳng (ABC) theo đoạn chắn: $\frac{x}{2} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{-1} = 1$.

Câu 21. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{2x-1}$. Biết $F(1) = 2$. Giá trị của $F(2)$ là

- A. $F(2) = \frac{1}{2} \ln 3 + 2$. B. $F(2) = \ln 3 + 2$. C. $F(2) = \frac{1}{2} \ln 3 - 2$. D. $F(2) = 2 \ln 3 - 2$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } F(x) = \int \frac{1}{2x-1} dx = \frac{1}{2} \ln |2x-1| + C.$$

$$\text{Theo đề: } F(1) = 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \ln |1| + C = 2 \Leftrightarrow C = 2$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{2} \ln |2x-1| + 2 \Rightarrow F(2) = \frac{1}{2} \ln 3 + 2.$$

Câu 22. Biết $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (2x^2 - 5x + 2)e^{-x}$ trên \mathbb{R} .

Giá trị của biểu thức $f(F(0))$ bằng

A. $9e$.

B. $3e$.

C. $20e^2$.

D. $-\frac{1}{e}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $f(x) = F'(x) = (2ax + b)e^{-x} - (ax^2 + bx + c)e^{-x} = [-ax^2 + (2a - b)x + (b - c)]e^{-x}$.

Đồng nhất với $f(x)$ ta được

$$\begin{cases} -a = 2 \\ 2a - b = -5 \\ b - c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \\ c = -1 \end{cases}. \text{ Do đó } F(x) = (-2x^2 + x - 1)e^{-x} \Rightarrow F(0) = -1.$$

Vậy $f(F(0)) = f(-1) = 9e$.

Câu 23. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3 \cos x + \frac{1}{x^2}$ trên $(0; +\infty)$.

A. $\int f(x)dx = 3 \cos x + \ln x + C$.

B. $\int f(x)dx = 3 \sin x - \frac{1}{x} + C$.

C. $\int f(x)dx = -3 \sin x + \frac{1}{x} + C$.

D. $\int f(x)dx = 3 \cos x + \frac{1}{x} + C$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\int f(x)dx = \int \left(3 \cos x + \frac{1}{x^2} \right) dx = 3 \sin x - \frac{1}{x} + C$.

Câu 24. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 1 + 2^x \ln 2$. Biết $F(1) = 10$, tính $F(0)$.

A. $F(0) = 8$

B. $F(0) = 7$

C. $F(0) = 6$

D. $F(0) = 9$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $F(x) = \int f(x)dx = \int (1 + 2^x \ln 2) dx = x + 2^x + C$. Vì $F(1) = 10 \Rightarrow 1 + 2^1 + C = 10 \Leftrightarrow C = 7$

$F(x) = x + 2^x + 7 \Rightarrow F(0) = 8$. Chọn đáp án **A**.

Câu 25. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = (1 + 2x)[1 + \ln(x + 1)]$ là

A. $x + \frac{x^2}{2} + (x + x^2) \ln x + C$.

B. $x + \frac{3x^2}{2} + (x + x^2) \ln x + C$.

C. $x + \frac{x^2}{2} - (x + x^2) \ln x + C$.

D. $x + \frac{3x^2}{2} + (x + x^2) \ln x + C$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = 1 + \ln(x + 1) \\ dv = (1 + 2x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x + 1} dx \\ v = x + x^2 \end{cases}$$

$$\int f(x) dx = (x+x^2)[1+\ln(x+1)] - \int x dx = (x+x^2)[1+\ln(x+1)] - \frac{x^2}{2} + C$$

$$= x + \frac{x^2}{2} + (x+x^2)\ln x + C.$$

Câu 26. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(-2; 3)$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên khoảng $(-2; 3)$. Tính $I = \int_{-1}^2 [f(x) + 2x] dx$, biết $F(-1) = 1$ và $F(2) = 4$.

- A.** $I = 6$. **B.** $I = 10$. **C.** $I = 3$. **D.** $I = 9$.

Lời giải

$$I = \int_{-1}^2 [f(x) + 2x] dx = F(x) \Big|_{-1}^2 + x^2 \Big|_{-1}^2 = F(2) - F(-1) + (4 - 1) = 4 - 1 + 3 = 6.$$

Câu 27. Biết $\int_0^3 \frac{dx}{(x+2)(x+4)} = a \ln 2 + b \ln 5 + c \ln 7$, ($a, b, c \in \mathbb{Q}$). Giá trị của biểu thức $2a + 3b - c$ bằng

- A.** 5. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x+2)(x+4)} = \frac{1}{2} \int_0^3 \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+4} \right) dx = \frac{1}{2} (\ln|x+2| - \ln|x+4|) \Big|_0^3 = \frac{1}{2} \ln 5 - \frac{1}{2} \ln 7 + \frac{1}{2} \ln 2.$$

Khi đó: $2a + 3b - c = 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 3$.

Câu 28. Cho $\int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{x}{3x + \sqrt{9x^2 - 1}} dx = a + b\sqrt{2}$, với a, b là các số hữu tỉ. Khi đó, giá trị của a là:

- A.** $-\frac{26}{27}$. **B.** $\frac{26}{27}$. **C.** $\frac{27}{26}$. **D.** $-\frac{25}{27}$.

Lời giải

Ta có: $\int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{x}{3x + \sqrt{9x^2 - 1}} dx = \int_{\frac{1}{3}}^1 x(3x - \sqrt{9x^2 - 1}) dx = \left[x^3 - \frac{2}{27}(9x^2 - 1)^{\frac{3}{2}} \right]_{\frac{1}{3}}^1 = \frac{26}{27} - \frac{32\sqrt{2}}{27}$.

Câu 29. Cho f là hàm số liên tục thỏa $\int_0^1 f(x) dx = 7$. Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot f(\sin x) dx$.

- A.** 1. **B.** 9. **C.** 3. **D.** 7.

Lời giải

Đặt $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$. Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 0$, $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$.

Ta có $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot f(\sin x) dx = \int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 f(x) dx = 7$.

Câu 30. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và thỏa mãn $\int_{-5}^1 f(x)dx = 9$. Tính tích phân

$$\int_0^2 [f(1-3x)+9]dx.$$

A. 27.

B. 21.

C. 15.

D. 75.

Lời giải

$$\text{Đặt } t = 1 - 3x \Rightarrow dt = -3dx.$$

$$\text{Với } x = 0 \rightarrow t = 1 \text{ và } x = 2 \rightarrow t = -5.$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \int_0^2 [f(1-3x)+9]dx &= \int_0^2 f(1-3x)dx + \int_0^2 9dx = \int_1^{-5} [f(t)] \frac{dt}{-3} + 9x \Big|_0^2 = \frac{1}{3} \int_{-5}^1 [f(x)]dx + 18 \\ &= \frac{1}{3} \cdot 9 + 18 = 21. \end{aligned}$$

Câu 31. Biết $f(x)$ là hàm số liên tục trên \mathbb{R} và $\int_0^9 f(x)dx = 9$. Khi đó tính $I = \int_2^5 f(3x-6)dx$.

A. $I = 27$.

B. $I = 3$.

C. $I = 24$.

D. $I = 0$.

Lời giải

$$\text{Đặt } t = 3x - 6 \Rightarrow dt = 3dx.$$

$$\text{Đổi cận: } x = 2 \Rightarrow t = 0 \text{ và } x = 5 \Rightarrow t = 9.$$

$$I = \int_2^5 f(3x-6)dx = \frac{1}{3} \int_0^9 f(t)dt = 3.$$

Câu 32. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ \vec{u} và \vec{v} tạo với nhau một góc 120° và $|\vec{u}| = 2, |\vec{v}| = 5$. Tính

$$|\vec{u} + \vec{v}|$$

A. $\sqrt{19}$.

B. -5 .

C. 7 .

D. $\sqrt{39}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \left(|\vec{u} + \vec{v}| \right)^2 &= (\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}\vec{v} + \vec{v}^2 = |\vec{u}|^2 + 2|\vec{u}||\vec{v}|\cos(\vec{u}; \vec{v}) + |\vec{v}|^2 \\ &= 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) + 5^2 = 19. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } |\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{19}.$$

Câu 33. Mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 6z - 2 = 0$ có tâm I và bán kính R lần lượt là

A. $I(-1; 2; -3)$.

B. $I(1; -2; 3) R = 4$.

C. $I(-1; 2; -3), R = 16$.

D. $I(-1; 2; -3), R = \sqrt{12}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \\ c = -3 \\ d = -2 \end{cases} \Rightarrow I(-1; 2; -3), R = 4.$$

Câu 34. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(-3;1;4)$ và gọi A, B, C lần lượt là hình chiếu của M trên các trục Ox, Oy, Oz . Phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt phẳng song song với mặt phẳng (ABC) ?

- A. $4x - 12y - 3z + 12 = 0$. B. $3x + 12y - 4z + 12 = 0$.
 C. $3x + 12y - 4z - 12 = 0$. D. $4x - 12y - 3z - 12 = 0$.

Lời giải

A, B, C lần lượt là hình chiếu của M trên các trục Ox, Oy, Oz nên $A(-3;0;0), B(0;1;0), C(0;0;4)$.

Phương trình mặt phẳng (ABC) : $\frac{x}{-3} + y + \frac{z}{4} = 1 \Leftrightarrow 4x - 12y - 3z + 12 = 0$.

Vậy phương trình mặt phẳng song song với mặt phẳng (ABC) là: $4x - 12y - 3z - 12 = 0$.

Câu 35. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;4;1), B(-1;1;3)$ và mặt phẳng $(P): x - 3y + 2z - 5 = 0$. Một mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với (P) có dạng là $ax + by + cz - 11 = 0$. Tính $a + b + c$.

- A. $a + b + c = 10$. B. $a + b + c = 3$. C. $a + b + c = 5$. D. $a + b + c = -7$.

Lời giải

Ta có $\overline{AB} = (-3; -3; 2)$, (P) có vtpt $\vec{n} = (1; -3; 2)$, (Q) có vtpt $\vec{k} = [\overline{AB}, \vec{n}] = (0; 8; 12)$

$\Rightarrow (Q)$ có dạng: $2(y - 4) + 3(z - 1) = 0 \Leftrightarrow 2y + 3z - 11 = 0$.

Vậy $a + b + c = 5$.

Tự luận

Câu 1. Tính $\int_2^{e+1} \frac{\ln(x-1)}{(x-1)^2} dx$

Lời giải

$$+ \text{Đặt: } \begin{cases} u = \ln(x-1) \\ dv = \frac{1}{(x-1)^2} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x-1} dx \\ v = -\frac{1}{x-1} \end{cases}$$

$$+ \text{Ta có: } \int_2^{e+1} \frac{\ln(x-1)}{(x-1)^2} dx = \left(\ln(x-1) \left(-\frac{1}{x-1} \right) \right) \Big|_2^{e+1} + \int_2^{e+1} \frac{1}{(x-1)^2} dx$$

$$= -\frac{1}{e} \ln e + 1 \cdot \ln 1 - \frac{1}{x-1} \Big|_2^{e+1} = -\frac{1}{e} - \frac{1}{e} + 1 = 1 - 2e^{-1}.$$

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(1) = 5$ và $2xf'(x) + f(x) = 6x$ với mọi $x > 0$. Tính $\int_4^9 f(x) dx$.

Lời giải

$$\text{Ta có } 2xf'(x) + f(x) = 6x \Rightarrow \sqrt{x} \cdot f'(x) + \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot f(x) = 3\sqrt{x}.$$

$$\Rightarrow (\sqrt{x} \cdot f(x))' = 3\sqrt{x} \Rightarrow \int (\sqrt{x} \cdot f(x))' dx = 3 \int \sqrt{x} dx \Rightarrow \sqrt{x} \cdot f(x) = 2x\sqrt{x} + C \Rightarrow f(x) = 2x + \frac{C}{\sqrt{x}}. M$$

$$\text{ặt khác } f(1) = 5 \Rightarrow 2 + C = 5 \Rightarrow C = 3 \Rightarrow f(x) = 2x + \frac{3}{\sqrt{x}}.$$

Khi đó $\int_4^9 f(x)dx = \int_4^9 \left(2x + \frac{3}{\sqrt{x}}\right) dx = 71.$

Câu 3. Cho $f(x) = \frac{x}{\cos^2 x}$ trên $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của $xf'(x)$ thỏa mãn $F(0) = 0$.
 Biết $a \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ thỏa mãn $\tan a = 3$. Tính $F(a) - 10a^2 + 3a$.

Lời giải

Ta có: $F(x) = \int xf'(x) dx = \int xdf(x) = xf(x) - \int f(x) dx$

Ta lại có: $\int f(x) dx = \int \frac{x}{\cos^2 x} dx = \int x d(\tan x) = x \tan x - \int \tan x dx = x \tan x - \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$
 $= x \tan x + \int \frac{1}{\cos x} d(\cos x) = x \tan x + \ln|\cos x| + C \Rightarrow F(x) = xf(x) - x \tan x - \ln|\cos x| + C$

Lại có: $F(0) = 0 \Rightarrow C = 0$, do đó: $F(x) = xf(x) - x \tan x - \ln|\cos x|$.

$\Rightarrow F(a) = af(a) - a \tan a - \ln|\cos a|$

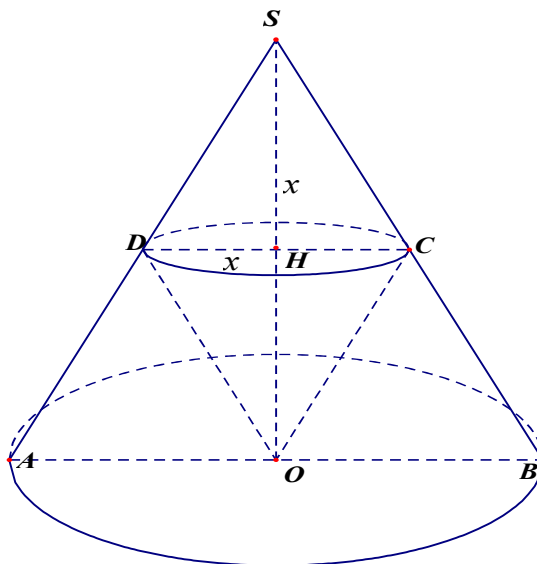
Khi đó $f(a) = \frac{a}{\cos^2 a} = a(1 + \tan^2 a) = 10a$ và

$\frac{1}{\cos^2 a} = 1 + \tan^2 a = 10 \Leftrightarrow \cos^2 a = \frac{1}{10} \Leftrightarrow |\cos a| = \frac{1}{\sqrt{10}}$.

Vậy $F(a) - 10a^2 + 3a = 10a^2 - 3a - \ln\left|\frac{1}{\sqrt{10}}\right| - 10a^2 + 3a = \frac{1}{2} \ln 10$.

Câu 4. Cho hình một hình nón (N) có đáy là hình tròn tâm O . Đường kính $2a$ và đường cao $SO = a$. Cho điểm H thay đổi trên đoạn SO . Một mặt phẳng (P) vuông góc với SO tại H và cắt hình nón theo đường tròn (C). Khối nón có đỉnh O và đáy là đường tròn (C) có thể tích lớn nhất bằng bao nhiêu?

Lời giải



Gọi H là tâm đường tròn (C). Do $AB = 2a, SO = a$ nên $\triangle SAB$ vuông tại S .

Đặt $SH = x (0 \leq x \leq a) \Rightarrow HO = a - x$.

Thể tích của khối nón đỉnh O là:

$$V = \frac{1}{3} \pi x^2 (a - x) = \frac{1}{6} \pi x \cdot x \cdot (2a - 2x) \leq \frac{1}{6} \pi \frac{(x + x + 2a - 2x)^3}{27} = \frac{4\pi a^3}{81}.$$

Vậy GTLN của V bằng $\frac{4\pi a^3}{81}$.

Nguyễn Bảo Vương

Trắc nghiệm

Câu 1. Tất cả nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{2x+3}$ là

- A. $\frac{1}{2} \ln(2x+3) + C$. B. $\frac{1}{2} \ln|2x+3| + C$. C. $\ln|2x+3| + C$. D. $\frac{1}{\ln 2} \ln|2x+3| + C$.

Câu 2. Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{2x+3}$ là

- A. $\int f(x) dx = \frac{1}{3} e^{2x+3} + C$. B. $\int f(x) dx = e^{2x+3} + C$.
 C. $\int f(x) dx = \frac{1}{2} e^{2x+3} + C$. D. $\int f(x) dx = 2e^{2x+3} + C$.

Câu 3. Tìm $\int \frac{6x+2}{3x-1} dx$.

- A. $F(x) = 2x + \frac{4}{3} \ln|3x-1| + C$. B. $F(x) = 2x + 4 \ln|3x-1| + C$.
 C. $F(x) = \frac{4}{3} \ln|3x-1| + C$. D. $F(x) = 2x + 4 \ln(3x-1) + C$.

Câu 4. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sin 3x$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$.

- A. $F(x) = -\frac{\cos 3x}{3} + \frac{5}{3}$. B. $F(x) = -\frac{\cos 3x}{3} + 2$.
 C. $F(x) = -\cos 3x + 2$. D. $F(x) = \cos 3x + 2$.

Câu 5. Tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos 2x$ là:

- A. $2 \sin 2x + C$. B. $\sin 2x + C$. C. $\frac{1}{2} \sin 2x + C$. D. $-\frac{1}{2} \sin 2x + C$.

Câu 6. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

- A. $\int dx = x + 2C$ (C là hằng số). B. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ (C là hằng số; $n \in \mathbb{Z}$).
 C. $\int 0 dx = C$ (C là hằng số). D. $\int e^x dx = e^x - C$ (C là hằng số).

Câu 7. Tính nguyên hàm $I = \int \frac{1}{x \ln x} dx$ bằng cách đặt $t = \ln x$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- A. $I = \int t dt$. B. $I = \int \frac{1}{t} dt$. C. $I = \int \frac{1}{t^2} dt$. D. $\int dt$.

Câu 8. $\int_0^1 e^{3x+1} dx$ bằng

- A. $\frac{1}{3}(e^4 - e)$. B. $e^4 - e$. C. $\frac{1}{3}(e^4 + e)$. D. $e^3 - e$.

Câu 9. $\int_1^2 \frac{dx}{2x+3}$ bằng

A. $2\ln\frac{7}{5}$. B. $\frac{1}{2}\ln 35$. C. $\ln\frac{7}{5}$. D. $\frac{1}{2}\ln\frac{7}{5}$.

Câu 10. Tính tích phân $I = \int_0^3 \sqrt{x+1} dx$.

A. $I = 21$. B. $I = 7$. C. $I = \frac{21}{2}$. D. $I = \frac{14}{3}$.

Câu 11. Cho tích phân $\int_1^2 4^x dx$ bằng.

A. $\frac{6}{\ln 2}$. B. $6\ln 2$. C. $\frac{40}{3}$. D. $-\frac{40}{3}$.

Câu 12. Tính tích phân $I = \int_1^2 \frac{1}{x^6} dx$.

A. $I = -\frac{31}{125}$. B. $I = \frac{31}{125}$. C. $I = \frac{31}{160}$. D. $I = \frac{24}{125}$.

Câu 13. Nếu $\int_1^2 f(x) dx = 3, \int_2^5 f(x) dx = -1$ thì $\int_1^5 f(x) dx$ bằng

A. 2. B. -2. C. 3. D. 4.

Câu 14. Cho $f(x), g(x)$ là hai hàm số liên tục trên \mathbb{R} . Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau.

A. $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(y) dy$. B. $\int_a^b (f(x) - g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$.
 C. $\int_a^a f(x) dx = 0$. D. $\int_a^b (f(x) \cdot g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b g(x) dx$.

Câu 15. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(3;0;0), N(0;0;4)$. Tính độ dài đoạn thẳng MN .

A. $MN = 1$. B. $MN = 7$. C. $MN = 5$. D. $MN = 10$.

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào sau đây thuộc trục tung Oy ?

A. $Q(0; -10; 0)$. B. $P(10; 0; 0)$. C. $N(0; 0; -10)$. D. $M(-10; 0; 10)$.

Câu 17. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 2 = 0$. Tính bán kính r của mặt cầu.

A. $r = 2\sqrt{2}$. B. $r = \sqrt{26}$. C. $r = 4$. D. $r = \sqrt{2}$.

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng nào sau đây nhận $\vec{n} = (1; 2; 3)$ làm vector pháp tuyến?

A. $x - 2y + 3z + 1 = 0$. B. $2x + 4y + 6z + 1 = 0$.
 C. $2z - 4z + 6 = 0$. D. $x + 2y - 3z - 1 = 0$.

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, một vector pháp tuyến của mặt phẳng $(\alpha): x - 2y + 3z + 1 = 0$ là

A. $\vec{u} = (3; -2; 1)$. B. $\vec{n} = (1; -2; 3)$. C. $\vec{m} = (1; 2; -3)$. D. $\vec{v} = (1; -2; -3)$.

Câu 20. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): z - 2x + 3 = 0$. Một vector pháp tuyến của (P) là:

A. $\vec{u} = (0; 1; -2)$. B. $\vec{v} = (1; -2; 3)$. C. $\vec{n} = (2; 0; -1)$. D. $\vec{w} = (1; -2; 0)$.

Câu 21. Tìm hàm số $f(x)$ xác định trên \mathbb{R} biết $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^3 + e^x + \pi \sin(\pi x)$ và $f(1) = e - 3$.

A. $f(x) = \frac{x^4}{4} + e^x - \cos(\pi x) - \frac{17}{4}$. B. $f(x) = \frac{x^4}{4} + e^x + \cos(\pi x) - \frac{9}{4}$.
 C. $f(x) = x^4 + e^x - \cos(\pi x) - \frac{17}{4}$. D. $f(x) = \frac{x^4}{4} + e^x - \cos(\pi x) + \frac{17}{4}$.

Câu 22. Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 2x + \frac{1}{\sin^2 x}$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$ là

A. $-\cot x + x^2 - \frac{\pi^2}{16}$. B. $\cot x - x^2 + \frac{\pi^2}{16}$. C. $-\cot x + x^2 - 1$. D. $\cot x + x^2 - \frac{\pi^2}{16}$.

Câu 23. Hàm số $F(x) = e^{x^2} - 3x + 4$ là một nguyên hàm của hàm số nào dưới đây?

A. $f(x) = 2e^{2x} - 3$. B. $f(x) = 2xe^{x^2} - 3$.
 C. $f(x) = xe^{x-1} - 3$. D. $f(x) = x^2e^{x^2-1} - 3$.

Câu 24. Nếu $\int f(x) dx = 4x^3 + x^2 + C$ thì hàm số $f(x)$ bằng

A. $f(x) = x^4 + \frac{x^3}{3} + Cx$. B. $f(x) = 12x^2 + 2x + C$.
 C. $f(x) = 12x^2 + 2x$. D. $f(x) = x^4 + \frac{x^3}{3}$.

Câu 25. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $I = \int 2x(e^x + 1) dx$.

A. $x^2 + 2xe^x - 2e^x + C$. B. $x^2 + 2xe^x - e^x + C$.
 C. $x^2 - 2xe^x - 2e^x + C$. D. $x^2 + xe^x - e^x + C$.

Câu 26. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[0; +\infty)$ và $\int_0^{x^2} f(t) dt = x \cdot \sin(\pi x)$. Tính $f(4)$

A. $f(\pi) = \frac{\pi-1}{4}$. B. $f(\pi) = \frac{\pi}{2}$. C. $f(\pi) = \frac{\pi}{4}$. D. $f(\pi) = \frac{1}{2}$.

Câu 27. Cho $f(x), g(x)$ là hai hàm số liên tục trên đoạn $[-1; 1]$ và $f(x)$ là hàm số chẵn, $g(x)$ là hàm số lẻ. Biết $\int_0^1 f(x) dx = 5$; $\int_0^1 g(x) dx = 7$. Mệnh đề nào sau đây là sai?

A. $\int_{-1}^1 f(x) dx = 10$. B. $\int_{-1}^1 [f(x) + g(x)] dx = 10$.
 C. $\int_{-1}^1 [f(x) - g(x)] dx = 10$. D. $\int_{-1}^1 g(x) dx = 14$.

Câu 28. Tìm các số a, b để hàm số $f(x) = a \sin(\pi x) + b$ thỏa mãn $f(1) = 2$ và $\int_0^1 f(x) dx = 4$.

A. $a = \frac{\pi}{2}, b = 2$. B. $a = -\frac{\pi}{2}, b = 2$. C. $a = -\pi, b = 2$. D. $a = \pi, b = 2$.

Câu 29. Tính tích phân $I = \int_{-2}^2 \frac{x^{2018}}{e^x + 1} dx$

- A. $I = 0$. B. $I = \frac{2^{2020}}{2019}$. C. $I = \frac{2^{2019}}{2019}$. D. $I = \frac{2^{2018}}{2018}$.

Câu 30. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và $\int_0^1 f(2x) dx = 8$. Tính $I = \int_0^{\sqrt{2}} xf(x^2) dx$

- A. 4. B. 16. C. 8. D. 32.

Câu 31. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;5]$ và $f(5) = 10$, $\int_0^5 xf'(x) dx = 30$. Tính

$$\int_0^5 f(x) dx.$$

- A. 20. B. -30. C. -20. D. 70.

Câu 32. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $M(2;3;-1)$, $N(-1;1;1)$ và $P(1;m-1;2)$. Tìm m để tam giác MNP vuông tại N .

- A. $m = -6$. B. $m = 0$. C. $m = -4$. D. $m = 2$.

Câu 33. Mặt cầu (S) có tâm $I(3;-3;1)$ và đi qua điểm $A(5;-2;1)$ có phương trình là

- A. $(x-5)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = \sqrt{5}$. B. $(x-3)^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = 25$.
C. $(x-3)^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = 5$. D. $(x-5)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 5$.

Câu 34. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 2 = 0$, $abc \neq 0$, xét điểm $M(a;b;c)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Điểm M thuộc mặt phẳng (P) .
B. Mặt phẳng (P) đi qua trung điểm của đoạn OM .
C. Mặt phẳng (P) đi qua hình chiếu của M trên trục Ox .
D. Mặt phẳng (P) đi qua hình chiếu của M trên mặt phẳng (Oxz) .

Câu 35. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-3;2;1)$ và $B(5;-4;1)$. Viết phương trình mặt phẳng trung trực (P) của đoạn thẳng AB .

- A. $(P): 4x - 3y - 7 = 0$. B. $(P): 4x - 3y + 7 = 0$.
C. $(P): 4x - 3y + 2z - 16 = 0$. D. $(P): 4x - 3y + 2z + 16 = 0$.

Tự luận

Câu 1. Cho $\int_0^1 (1+3x)f'(x) dx = 2019$; $4f(1) - f(0) = 2020$ Tính $\int_0^{\frac{1}{3}} f(3x) dx$

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$. Biết $\int_0^1 [xf'(1-x) - f(x)] dx = \frac{1}{2}$, tính $f(0)$.

Câu 3. Giả sử $\int \frac{(2x+3)dx}{x(x+1)(x+2)(x+3)+1} = -\frac{1}{g(x)} + C$ (C là hằng số).

Tính tổng các nghiệm của phương trình $g(x) = 0$.

Câu 4. Cho hình nón có chiều cao $h = 6$, bán kính đáy $r = 3$. Hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ đặt trong mặt nón sao cho trục của mặt nón đi qua tâm hai đáy của hình lập phương, một đáy của hình lập phương nằm trong cùng một mặt phẳng với đáy của hình nón, các đỉnh của đáy còn lại thuộc các đường sinh của hình nón. Tính độ dài đường chéo của hình lập phương

Nguyễn Bảo Vương

Trắc nghiệm

BẢNG ĐÁP ÁN

1.B	2.C	3.A	4.B	5.C	6.B	7.B	8.A	9.D	10.D
11.A	12.C	13.A	14.D	15.C	16.A	17.A	18.B	19.B	20.C
21.A	22.A	23.B	24.C	25.A	26.B	27.D			28.D
29.C	30.C	31.A	32.B	33.C	34.D	35.A			

Câu 1. Tất cả nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{2x+3}$ là

- A.** $\frac{1}{2} \ln(2x+3) + C$. **B.** $\frac{1}{2} \ln|2x+3| + C$. **C.** $\ln|2x+3| + C$. **D.** $\frac{1}{\ln 2} \ln|2x+3| + C$.

Lời giải

Áp dụng công thức nguyên hàm mở rộng: $\int f(x) dx = \int \frac{1}{2x+3} dx = \frac{1}{2} \ln|2x+3| + C$.

Câu 2. Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{2x+3}$ là

- A.** $\int f(x) dx = \frac{1}{3} e^{2x+3} + C$. **B.** $\int f(x) dx = e^{2x+3} + C$.
C. $\int f(x) dx = \frac{1}{2} e^{2x+3} + C$. **D.** $\int f(x) dx = 2e^{2x+3} + C$.

Lời giải

Áp dụng công thức nguyên hàm cơ bản ta được: $\int f(x) dx = \frac{1}{2} e^{2x+3} + C$.

Câu 3. Tìm $\int \frac{6x+2}{3x-1} dx$.

- A.** $F(x) = 2x + \frac{4}{3} \ln|3x-1| + C$. **B.** $F(x) = 2x + 4 \ln|3x-1| + C$.
C. $F(x) = \frac{4}{3} \ln|3x-1| + C$. **D.** $F(x) = 2x + 4 \ln(3x-1) + C$.

Lời giải

$$\int \frac{6x+2}{3x-1} dx = \int \left(2 + \frac{4}{3x-1} \right) dx = 2x + \frac{4}{3} \ln|3x-1| + C.$$

Câu 4. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sin 3x$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$.

- A.** $F(x) = -\frac{\cos 3x}{3} + \frac{5}{3}$. **B.** $F(x) = -\frac{\cos 3x}{3} + 2$.
C. $F(x) = -\cos 3x + 2$. **D.** $F(x) = \cos 3x + 2$.

Lời giải

Ta có $\int \sin 3x dx = -\frac{\cos 3x}{3} + C$, vì $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$ nên $C = 2$.

Câu 5. Tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos 2x$ là:

- A. $2 \sin 2x + C$. B. $\sin 2x + C$. C. $\frac{1}{2} \sin 2x + C$. D. $-\frac{1}{2} \sin 2x + C$.

Lời giải

Ta có $\int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x + C$.

Câu 6. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

- A. $\int dx = x + 2C$ (C là hằng số). B. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ (C là hằng số; $n \in \mathbb{Z}$).
- C. $\int 0 dx = C$ (C là hằng số). D. $\int e^x dx = e^x - C$ (C là hằng số).

Lời giải

Đáp án B sai vì công thức trên chỉ đúng khi bổ sung thêm điều kiện $n \neq -1$.

Câu 7. Tính nguyên hàm $I = \int \frac{1}{x \ln x} dx$ bằng cách đặt $t = \ln x$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- A. $I = \int t dt$. B. $I = \int \frac{1}{t} dt$. C. $I = \int \frac{1}{t^2} dt$. D. $\int dt$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{1}{x} dx \Rightarrow I = \int \frac{1}{\ln x} \frac{1}{x} dx = \int \frac{1}{t} dt$.

Câu 8. $\int_0^1 e^{3x+1} dx$ bằng

- A. $\frac{1}{3}(e^4 - e)$. B. $e^4 - e$. C. $\frac{1}{3}(e^4 + e)$. D. $e^3 - e$.

Lời giải

$\int_0^1 e^{3x+1} dx = \frac{1}{3} \int_0^1 e^{3x+1} d(3x+1) = \frac{1}{3} e^{3x+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}(e^4 - e)$.

Câu 9. $\int_1^2 \frac{dx}{2x+3}$ bằng

- A. $2 \ln \frac{7}{5}$. B. $\frac{1}{2} \ln 35$. C. $\ln \frac{7}{5}$. D. $\frac{1}{2} \ln \frac{7}{5}$.

Lời giải

Ta có $\int_1^2 \frac{dx}{2x+3} = \frac{1}{2} \ln |2x+3| \Big|_1^2 = \frac{1}{2} (\ln 7 - \ln 5) = \frac{1}{2} \ln \frac{7}{5}$.

Câu 10. Tính tích phân $I = \int_0^3 \sqrt{x+1} dx$.

- A. $I = 21$. B. $I = 7$. C. $I = \frac{21}{2}$. D. $I = \frac{14}{3}$.

Lời giải

$$I = \int_0^3 \sqrt{x+1} dx = \int_0^3 (x+1)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} (x+1)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^3 = \frac{14}{3}.$$

Câu 11. Cho tích phân $\int_1^2 4^x dx$ bằng.

- A.** $\frac{6}{\ln 2}$. **B.** $6 \ln 2$. **C.** $\frac{40}{3}$. **D.** $-\frac{40}{3}$.

Lời giải

Ta có: $\int_1^2 4^x dx = \frac{4^x}{\ln 4} \Big|_1^2 = \frac{16-4}{\ln 4} = \frac{6}{\ln 2}$.

Câu 12. Tính tích phân $I = \int_1^2 \frac{1}{x^6} dx$.

- A.** $I = -\frac{31}{125}$. **B.** $I = \frac{31}{125}$. **C.** $I = \frac{31}{160}$. **D.** $I = \frac{24}{125}$.

Lời giải

Có $I = \int_1^2 \frac{1}{x^6} dx = -\frac{1}{5x^5} \Big|_1^2 = -\frac{1}{5 \cdot 2^5} + \frac{1}{5} = \frac{31}{160}$.

Câu 13. Nếu $\int_1^2 f(x) dx = 3$, $\int_2^5 f(x) dx = -1$ thì $\int_1^5 f(x) dx$ bằng

A. 2. **B.** -2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

$$\int_1^5 f(x) dx = \int_1^2 f(x) dx + \int_2^5 f(x) dx = 3 - 1 = 2.$$

Câu 14. Cho $f(x), g(x)$ là hai hàm số liên tục trên \mathbb{R} . Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau.

- A.** $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(y) dy$. **B.** $\int_a^b (f(x) - g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$.
- C.** $\int_a^a f(x) dx = 0$. **D.** $\int_a^b (f(x) \cdot g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b g(x) dx$.

Lời giải

Chọn D

Câu 15. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(3;0;0)$, $N(0;0;4)$. Tính độ dài đoạn thẳng MN .

- A.** $MN = 1$. **B.** $MN = 7$. **C.** $MN = 5$. **D.** $MN = 10$.

Lời giải

Ta có $MN = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào sau đây thuộc trục tung Oy ?

- A.** $Q(0;-10;0)$. **B.** $P(10;0;0)$. **C.** $N(0;0;-10)$. **D.** $M(-10;0;10)$.

Lời giải

$Q(0;-10;0)$

Câu 17. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 2 = 0$. Tính bán kính r của mặt cầu.

- A.** $r = 2\sqrt{2}$. **B.** $r = \sqrt{26}$. **C.** $r = 4$. **D.** $r = \sqrt{2}$.

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; -1; 2)$ và bán kính $r = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2 - (-2)} = 2\sqrt{2}$.

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng nào sau đây nhận $\vec{n} = (1; 2; 3)$ làm vector pháp tuyến?

- A.** $x - 2y + 3z + 1 = 0$. **B.** $2x + 4y + 6z + 1 = 0$.
C. $2z - 4z + 6 = 0$. **D.** $x + 2y - 3z - 1 = 0$.

Lời giải

Mặt phẳng $2x + 4y + 6z + 1 = 0$ nhận vector $\vec{n} = (2; 4; 6)$ hay vector $\vec{n}_1 = (1; 2; 3)$ làm vector pháp tuyến.

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, một vector pháp tuyến của mặt phẳng $(\alpha): x - 2y + 3z + 1 = 0$ là

- A.** $\vec{u} = (3; -2; 1)$. **B.** $\vec{n} = (1; -2; 3)$. **C.** $\vec{m} = (1; 2; -3)$. **D.** $\vec{v} = (1; -2; -3)$.

Lời giải

Ta có nếu (α) có dạng $Ax + By + Cz + D = 0$ thì (α) có một vector pháp tuyến là $\vec{n} = (A; B; C)$.

Suy ra $(\alpha): x - 2y + 3z + 1 = 0$ có một vector pháp tuyến là $\vec{n} = (1; -2; 3)$.

Câu 20. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): z - 2x + 3 = 0$. Một vector pháp tuyến của (P) là:

- A.** $\vec{u} = (0; 1; -2)$. **B.** $\vec{v} = (1; -2; 3)$. **C.** $\vec{n} = (2; 0; -1)$. **D.** $\vec{w} = (1; -2; 0)$.

Lời giải

Ta có: $z - 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow 2x - z - 3 = 0$. Do đó mặt phẳng (P) có một vector pháp tuyến là $\vec{n} = (2; 0; -1)$.

Câu 21. Tìm hàm số $f(x)$ xác định trên \mathbb{R} biết $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^3 + e^x + \pi \sin(\pi x)$ và $f(1) = e - 3$.

- A.** $f(x) = \frac{x^4}{4} + e^x - \cos(\pi x) - \frac{17}{4}$. **B.** $f(x) = \frac{x^4}{4} + e^x + \cos(\pi x) - \frac{9}{4}$.
C. $f(x) = x^4 + e^x - \cos(\pi x) - \frac{17}{4}$. **D.** $f(x) = \frac{x^4}{4} + e^x - \cos(\pi x) + \frac{17}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int (x^3 + e^x + \pi \sin(\pi x)) dx = \frac{x^4}{4} + e^x - \cos(\pi x) + C$.

Do $f'(x) = x^3 + e^x + \pi \sin(\pi x)$ nên $f(x) = \frac{x^4}{4} + e^x - \cos(\pi x) + C_0$ với $C_0 \in \mathbb{R}$.

Lại có $f(1) = e - 3$ nên $\frac{1^4}{4} + e^1 - \cos(\pi) + C_0 = e - 3 \Leftrightarrow C_0 = -\frac{17}{4}$.

Vậy $f(x) = \frac{x^4}{4} + e^x - \cos(\pi x) - \frac{17}{4}$.

Câu 22. Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 2x + \frac{1}{\sin^2 x}$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$ là

- A.** $-\cot x + x^2 - \frac{\pi^2}{16}$. **B.** $\cot x - x^2 + \frac{\pi^2}{16}$. **C.** $-\cot x + x^2 - 1$. **D.** $\cot x + x^2 - \frac{\pi^2}{16}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $F(x) = \int \left(2x + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx = x^2 - \cot x + C$

$$F\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 - \cot \frac{\pi}{4} + C = -1 \Leftrightarrow C = -\frac{\pi^2}{16}$$

Vậy $F(x) = -\cot x + x^2 - \frac{\pi^2}{16}$

Câu 23. Hàm số $F(x) = e^{x^2} - 3x + 4$ là một nguyên hàm của hàm số nào dưới đây?

- A.** $f(x) = 2e^{2x} - 3$. **B.** $f(x) = 2xe^{x^2} - 3$.
C. $f(x) = xe^{x-1} - 3$. **D.** $f(x) = x^2e^{x^2-1} - 3$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f(x) = F'(x) = 2xe^{x^2} - 3$.

Câu 24. Nếu $\int f(x) dx = 4x^3 + x^2 + C$ thì hàm số $f(x)$ bằng

- A.** $f(x) = x^4 + \frac{x^3}{3} + Cx$. **B.** $f(x) = 12x^2 + 2x + C$.
C. $f(x) = 12x^2 + 2x$. **D.** $f(x) = x^4 + \frac{x^3}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Theo định nghĩa nguyên hàm ta có: $f(x) = (4x^3 + x^2 + C)' = 12x^2 + 2x$.

Câu 25. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $I = \int 2x(e^x + 1) dx$.

- A.** $x^2 + 2xe^x - 2e^x + C$. **B.** $x^2 + 2xe^x - e^x + C$.
C. $x^2 - 2xe^x - 2e^x + C$. **D.** $x^2 + xe^x - e^x + C$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int f(x) dx = \int 2x(e^x + 1) dx = \int 2xe^x dx + \int 2x dx$

Tính $\int 2x dx = x^2 + C_1$

Tính $\int 2xe^x dx$

Đặt $\begin{cases} u = 2x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2 dx \\ v = e^x \end{cases}$

Suy ra $\int 2xe^x dx = 2xe^x - 2 \int e^x dx = 2xe^x - 2e^x + C_2$

Do đó $I = x^2 + 2xe^x - 2e^x + C$.

Câu 26. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[0; +\infty)$ và $\int_0^{x^2} f(t) dt = x \cdot \sin(\pi x)$. Tính $f(4)$

- A. $f(\pi) = \frac{\pi-1}{4}$. B. $f(\pi) = \frac{\pi}{2}$. C. $f(\pi) = \frac{\pi}{4}$. D. $f(\pi) = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Ta có $\int f(t) dt = F(t) \Rightarrow F'(t) = f(t)$

$$\int_0^{x^2} f(t) dt = x \cdot \sin(\pi x) \Leftrightarrow F(t) \Big|_0^{x^2} = x \cdot \sin(\pi x)$$

$$\Leftrightarrow F(x^2) - F(0) = x \cdot \sin(\pi x) \Rightarrow F'(x^2) \cdot 2x = \sin(\pi x) + \pi x \cdot \cos(\pi x)$$

$$\Leftrightarrow f(x^2) \cdot 2x = \sin(\pi x) + \pi x \cdot \cos(\pi x)$$

$$\Rightarrow f(4) = \frac{\pi}{2}$$

Câu 27. Cho $f(x), g(x)$ là hai hàm số liên tục trên đoạn $[-1; 1]$ và $f(x)$ là hàm số chẵn, $g(x)$ là hàm số lẻ. Biết $\int_0^1 f(x) dx = 5$; $\int_0^1 g(x) dx = 7$. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. $\int_{-1}^1 f(x) dx = 10$. B. $\int_{-1}^1 [f(x) + g(x)] dx = 10$.

C. $\int_{-1}^1 [f(x) - g(x)] dx = 10$. D. $\int_{-1}^1 g(x) dx = 14$.

Lời giải

Vì $f(x)$ là hàm số chẵn nên $\int_{-1}^1 f(x) dx = 2 \int_0^1 f(x) dx = 2 \cdot 5 = 10$.

Vì $g(x)$ là hàm số lẻ nên $\int_{-1}^1 g(x) dx = 0$.

$$\Rightarrow \int_{-1}^1 [f(x) + g(x)] dx = 10 \text{ và } \int_{-1}^1 [f(x) - g(x)] dx = 10.$$

Câu 28. Tìm các số a, b để hàm số $f(x) = a \sin(\pi x) + b$ thỏa mãn $f(1) = 2$ và $\int_0^1 f(x) dx = 4$.

- A. $a = \frac{\pi}{2}, b = 2$. B. $a = -\frac{\pi}{2}, b = 2$. C. $a = -\pi, b = 2$. D. $a = \pi, b = 2$.

Lời giải

Ta có $f(1) = 2$, suy ra $a \sin \pi + b = 2 \Rightarrow b = 2$. Khi đó

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (a \sin(\pi x) + 2) dx = -\frac{a}{\pi} \cos(\pi x) \Big|_0^1 + 2x \Big|_0^1 = \frac{2a}{\pi} + 2.$$

$$\text{Suy ra } \frac{2a}{\pi} + 2 = 4 \Leftrightarrow a = \pi.$$

Vậy $a = \pi, b = 2$.

Câu 29. Tính tích phân $I = \int_{-2}^2 \frac{x^{2018}}{e^x + 1} dx$

- A. $I = 0$. B. $I = \frac{2^{2020}}{2019}$. C. $I = \frac{2^{2019}}{2019}$. D. $I = \frac{2^{2018}}{2018}$.

Lời giải

Tính tích phân $I = \int_{-2}^2 \frac{x^{2018}}{e^x + 1} dx$.

Đặt $x = -t \Rightarrow dx = -dt$. Khi $x = -2$ thì $t = 2$; khi $x = 2$ thì $t = -2$.

Ta có

$$I = \int_{-2}^2 \frac{x^{2018}}{e^x + 1} dx = \int_{-2}^2 \frac{(-t)^{2018}}{e^{-t} + 1} dt = \int_{-2}^2 \frac{t^{2018} \cdot e^t}{e^t + 1} dt \Rightarrow 2I = \int_{-2}^2 t^{2018} dt = \frac{t^{2019}}{2019} \Big|_{-2}^2 = \frac{2 \cdot 2^{2019}}{2019} \Rightarrow I = \frac{2^{2019}}{2019}.$$

Câu 30. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và $\int_0^1 f(2x) dx = 8$. Tính $I = \int_0^{\sqrt{2}} xf(x^2) dx$

- A. 4. B. 16. C. 8. D. 32.

Lời giải

Đặt $x^2 = 2t \Rightarrow 2xdx = 2dt \Rightarrow xdx = dt$. Đổi cận : $x = 0 \Rightarrow t = 0$, $x = \sqrt{2} \Rightarrow t = 1$.

Ta có : $I = \int_0^1 f(2t) dt = 8$.

Câu 31. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 5]$ và $f(5) = 10$, $\int_0^5 xf'(x) dx = 30$. Tính

$$\int_0^5 f(x) dx.$$

- A. 20. B. -30. C. -20. D. 70.

Lời giải

Đặt $\begin{cases} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = f'(x) dx \Rightarrow v = f(x) \end{cases}$

$$\int_0^5 x.f'(x) dx = (x.f(x)) \Big|_0^5 - \int_0^5 f(x) dx \Leftrightarrow 30 = 5f(5) - \int_0^5 f(x) dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^5 f(x) dx = 5f(5) - 30 = 20.$$

Câu 32. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho ba điểm $M(2; 3; -1)$, $N(-1; 1; 1)$ và $P(1; m-1; 2)$.

Tìm m để tam giác MNP vuông tại N .

- A. $m = -6$. B. $m = 0$. C. $m = -4$. D. $m = 2$.

Lời giải

Ta có

$$\overline{NM} = (3; 2; -2), \overline{NP} = (2; m-2; 1).$$

Tam giác MNP vuông tại N khi và chỉ khi $\overline{NM} \cdot \overline{NP} = 0$

$$\Leftrightarrow 3 \cdot 2 + 2 \cdot (m-2) - 2 \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow m = 0.$$

Vậy giá trị cần tìm của m là $m = 0$.

Câu 33. Mặt cầu (S) có tâm $I(3; -3; 1)$ và đi qua điểm $A(5; -2; 1)$ có phương trình là

- A. $(x-5)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = \sqrt{5}$. B. $(x-3)^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = 25$.

C. $(x-3)^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = 5.$

D. $(x-5)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 5.$

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(3; -3; 1)$ và bán kính R có phương trình là:

$$(x-3)^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = R^2$$

Mà $A(5; -2; 1) \in (S)$ nên ta có $(5-3)^2 + (-2+3)^2 + (1-1)^2 = R^2 \Leftrightarrow R^2 = 5$

Vậy Mặt cầu (S) có tâm $I(3; -3; 1)$ và đi qua điểm $A(5; -2; 1)$ có phương trình là

$$(x-3)^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = 5.$$

Câu 34. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 2 = 0$,

$abc \neq 0$, xét điểm $M(a; b; c)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Điểm M thuộc mặt phẳng (P).

B. Mặt phẳng (P) đi qua trung điểm của đoạn OM.

C. Mặt phẳng (P) đi qua hình chiếu của M trên trục Ox.

D. Mặt phẳng (P) đi qua hình chiếu của M trên mặt phẳng (Oxz).

Lời giải

+ Thay M vào phương trình của mặt phẳng (P) ta được $3 - 2 \neq 0$ nên $M \notin (P)$.

+ Trung điểm của OM là điểm $I\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}; \frac{c}{2}\right)$ thay vào (P) ta được $\frac{3}{2} - 2 \neq 0$ nên $I \notin (P)$.

+ Hình chiếu của M lên trục Ox là điểm $M_1(a; 0; 0)$ thay vào (P) ta được $1 - 2 \neq 0$ nên $M_1 \notin (P)$.

+ Hình chiếu của M lên mặt phẳng (Oxz) là điểm $M_2(a; 0; c)$ thuộc (P).

Câu 35. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-3; 2; 1)$ và $B(5; -4; 1)$. Viết phương trình mặt phẳng trung trực (P) của đoạn thẳng AB.

A. (P): $4x - 3y - 7 = 0.$

B. (P): $4x - 3y + 7 = 0.$

C. (P): $4x - 3y + 2z - 16 = 0.$

D. (P): $4x - 3y + 2z + 16 = 0.$

Lời giải

$$\overline{AB} = (8; -6; 0).$$

Mặt phẳng (P) nhận vectơ $\vec{n} = (4; -3; 0)$ làm vectơ pháp tuyến và đi qua trung điểm $I(1; -1; 1)$ nên có phương trình là $4x - 3y - 7 = 0.$

Tự luận

Câu 1. Cho $\int_0^1 (1+3x)f'(x)dx = 2019$; $4f(1) - f(0) = 2020$ Tính $\int_0^{\frac{1}{3}} f(3x)dx$

Lời giải

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = 1+3x \\ dv = f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 3dx \\ v = f(x) \end{cases}$$

$$\int_0^1 (1+3x)f'(x)dx = 2019$$

$$\Leftrightarrow (1+3x) \cdot f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 3 \cdot f(x) dx = 2019$$

$$\Leftrightarrow 4f(1) - f(0) - 3 \int_0^1 f(x) dx = 2019$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{3}$$

Ta có: $\int_0^{\frac{1}{3}} f(3x) dx = \frac{1}{3} \int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$. Biết $\int_0^1 [x \cdot f'(1-x) - f(x)] dx = \frac{1}{2}$, tính $f(0)$.

Lời giải

+ Xét $I = \int_0^1 x f'(1-x) dx$

Đặt $\begin{cases} u = x \\ f'(1-x) dx = dv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -f(1-x) \end{cases}$

$$I = \int_0^1 x f'(1-x) dx = -x f(1-x) \Big|_0^1 + \int_0^1 f(1-x) dx = -f(0) + \int_0^1 f(1-x) dx$$

+ Xét $J = \int_0^1 f(1-x) dx$

Đặt $t = 1-x \Rightarrow dt = -dx$.

Đổi cận

x	0	1
t	1	0

$$J = \int_0^1 f(1-x) dx = - \int_1^0 f(t) dt = \int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 f(x) dx$$

Do đó $I = -f(0) + \int_0^1 f(1-x) dx = -f(0) + \int_0^1 f(x) dx$

Như vậy, $\frac{1}{2} = \int_0^1 [x \cdot f'(1-x) - f(x)] dx = -f(0) + \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 f(x) dx \Rightarrow f(0) = -\frac{1}{2}$.

Câu 3. Giả sử $\int \frac{(2x+3) dx}{x(x+1)(x+2)(x+3)+1} = -\frac{1}{g(x)} + C$ (C là hằng số).

Tính tổng các nghiệm của phương trình $g(x) = 0$.

Lời giải

Ta có $x(x+1)(x+2)(x+3)+1 = (x^2+3x)(x^2+3x+2)+1 = [(x^2+3x)+1]^2$.

Đặt $t = x^2 + 3x$, khi đó $dt = (2x+3) dx$.

Tích phân ban đầu trở thành $\int \frac{dt}{(t+1)^2} = -\frac{1}{t+1} + C$.

Trở lại biến x , ta có $\int \frac{(2x+3)dx}{x(x+1)(x+2)(x+3)+1} = -\frac{1}{x^2+3x+1} + C$.

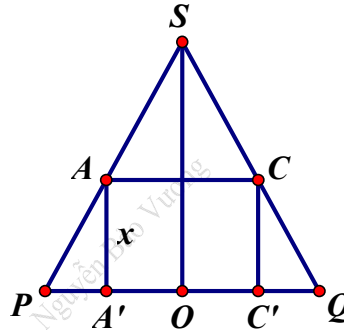
Vậy $g(x) = x^2 + 3x + 1$.

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Vậy tổng tất cả các nghiệm của phương trình bằng -3 .

Câu 4. Cho hình nón có chiều cao $h = 6$, bán kính đáy $r = 3$. Hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ đặt trong mặt nón sao cho trục của mặt nón đi qua tâm hai đáy của hình lập phương, một đáy của hình lập phương nằm trong cùng một mặt phẳng với đáy của hình nón, các đỉnh của đáy còn lại thuộc các đường sinh của hình nón. Tính độ dài đường chéo của hình lập phương

Lời giải



Gọi S là đỉnh và O làm tâm đường tròn đáy của mặt nón. Để thấy hai đỉnh A, C nằm trên hai đường sinh SP, SQ của hình nón, trong đó PQ là đường kính của đường tròn đáy.

Đặt $AA' = x$. Ta có: $A'C' = x\sqrt{2}$.

Xét tam giác vuông SOP : $\tan \widehat{SPO} = \frac{SO}{OP} = 2 = \frac{AA'}{PA'} \Leftrightarrow PA' = \frac{x}{2} \Rightarrow A'O = 3 - \frac{x}{2}$.

Mà $A'C' = 2A'O$ nên ta có $x\sqrt{2} = 6 - x \Leftrightarrow x = \frac{6}{\sqrt{2} + 1} = -6 + 6\sqrt{2}$.

Suy ra $AC' = \sqrt{x^2 + (x\sqrt{2})^2} = x\sqrt{3} = 6\sqrt{3}(\sqrt{2} - 1)$.

Trắc nghiệm

Câu 1. Cho $\int f(x)dx = F(x) + C$. Khi đó với $a \neq 0$, a, b là hằng số ta có $\int f(ax+b)dx$ bằng.

- A. $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$. B. $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a+b}F(ax+b) + C$.
 C. $\int f(ax+b)dx = F(ax+b) + C$. D. $\int f(ax+b)dx = aF(ax+b) + C$.

Câu 2. Tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = -\cos 2x$ là.

- A. $F(x) = \frac{1}{2}\sin 2x + C$. B. $F(x) = -\frac{1}{2}\sin 2x$.
 C. $F(x) = -\sin 2x + C$. D. $F(x) = -\frac{1}{2}\sin 2x + C$.

Câu 3. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $y = \frac{1}{(1+x)^2}$.

- A. $\int \frac{1}{(x+1)^2} dx = \frac{2}{(x+1)^3} + C$. B. $\int \frac{1}{(x+1)^2} dx = -\frac{1}{x+1} + C$.
 C. $\int \frac{1}{(x+1)^2} dx = \frac{1}{x+1} + C$. D. $\int \frac{1}{(x+1)^2} dx = \frac{-2}{(x+1)^3} + C$.

Câu 4. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x + \cos x$.

- A. $\int f(x)dx = \frac{x^2}{2} + \sin x + C$. B. $\int f(x)dx = 1 - \sin x + C$.
 C. $\int f(x)dx = x \sin x + \cos x + C$. D. $\int f(x)dx = \frac{x^2}{2} - \sin x + C$.

Câu 5. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{2x+1}$, biết $F(0) = 1$. Giá trị của $F(-2)$ bằng:

- A. $1 + \frac{1}{2}\ln 3$. B. $1 + \frac{1}{2}\ln 5$. C. $1 + \ln 3$. D. $\frac{1}{2}(1 + \ln 3)$.

Câu 6. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin x - 1$ bằng:

- A. $\cos x + C$. B. $-\cos x - x + C$. C. $-\cos x + C$. D. $\cos x - x + C$.

Câu 7. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = x \cos x$.

- A. $\int f(x)dx = x \sin x - \cos x + C$. B. $\int f(x)dx = x \sin x + \cos x + C$.
 C. $\int f(x)dx = -x \sin x + \cos x + C$. D. $\int f(x)dx = -x \sin x - \cos x + C$.

Câu 8. Tính tích phân $I = \int_0^2 (4x-3)dx$.

- A. 5. B. 2. C. 4. D. 7.

Câu 9. Cho hàm số $y = x^3$ có một nguyên hàm là $F(x)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $F(2) - F(0) = 16$.
- B. $F(2) - F(0) = 1$.
- C. $F(2) - F(0) = 8$.
- D. $F(2) - F(0) = 4$.

Câu 10. Cho $f(x), g(x)$ là hai hàm số liên tục trên \mathbb{R} . Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau?

- A. $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(y) dy$.
- B. $\int_a^b (f(x) - g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$.
- C. $\int_a^a f(x) dx = 0$.
- D. $\int_a^b [f(x)g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b g(x) dx$.

Câu 11. Đặt $I = \int_1^2 (2mx + 1) dx$, m là tham số thực. Tìm m để $I = 4$.

- A. $m = 2$.
- B. $m = -2$.
- C. $m = 1$.
- D. $m = -1$.

Câu 12. Tính tích phân $I = \int_0^1 8^x dx$.

- A. $I = 7$.
- B. $I = \frac{7}{3 \ln 2}$.
- C. $I = 8$.
- D. $I = \frac{8}{3 \ln 2}$.

Câu 13. Tính tích phân $\int_0^e \cos x dx$.

- A. $-\sin e$.
- B. $-\cos e$.
- C. $\sin e$.
- D. $\cos e$.

Câu 14. Cho $\int_0^1 f(x) dx = 2$ và $\int_0^1 g(x) dx = 5$, khi đó $\int_0^1 [f(x) + 2g(x)] dx$ bằng

- A. -3 .
- B. -8 .
- C. 12 .
- D. 1 .

Câu 15. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các vector $\vec{a} = (2; -1; 3)$, $\vec{b} = (1; 3; -2)$. Tìm tọa độ của vector $\vec{c} = \vec{a} - 2\vec{b}$.

- A. $\vec{c} = (0; -7; 7)$.
- B. $\vec{c} = (0; 7; 7)$.
- C. $\vec{c} = (0; -7; -7)$.
- D. $\vec{c} = (4; -7; 7)$.

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$ cho 2 véc tơ $\vec{a} = (2; 1; -1)$; $\vec{b} = (1; 3; m)$. Tìm m để $(\vec{a}; \vec{b}) = 90^\circ$.

- A. $m = -5$.
- B. $m = 5$.
- C. $m = 1$.
- D. $m = -2$

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu (S) có phương trình: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 4z - 7 = 0$. Xác định tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S) :

- A. $I(-1; -2; 2); R = 3$.
- B. $I(1; 2; -2); R = \sqrt{2}$.
- C. $I(-1; -2; 2); R = 4$.
- D. $I(1; 2; -2); R = 4$.

- Câu 18.** Vector $\vec{n} = (1; 2; -1)$ là một vector pháp tuyến của mặt phẳng nào dưới đây?
A. $x + 2y + z + 2 = 0$. **B.** $x + 2y - z - 2 = 0$. **C.** $x + y - 2z + 1 = 0$. **D.** $x - 2y + z + 1 = 0$.
- Câu 19.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(-3; 4; -2)$ và $\vec{n} = (-2; 3; -4)$. Phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm A và nhận \vec{n} làm vector pháp tuyến là
A. $-3x + 4y + 2z + 26 = 0$. **B.** $-2x + 3y - 4z + 29 = 0$.
C. $2x - 3y + 4z + 29 = 0$. **D.** $2x - 3y + 4z + 26 = 0$.
- Câu 20.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình $-2x + 3y - 5z + 5 = 0$. Mặt phẳng (P) có vector pháp tuyến là
A. $\vec{n} = (-2; -3; 5)$. **B.** $\vec{n} = (-2; 3; 5)$. **C.** $\vec{n} = (2; -3; 5)$. **D.** $\vec{n} = (2; 3; 5)$.
- Câu 21.** Gọi $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x+1}} - \frac{1}{x^2}$. Biết $F(3) = 6$, giá trị của $F(8)$ là
A. $\frac{217}{8}$. **B.** 27. **C.** $\frac{215}{24}$. **D.** $\frac{215}{8}$.
- Câu 22.** Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sin(\pi - 2x)$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.
A. $F(x) = \frac{-\cos(\pi - 2x)}{2} + \frac{1}{2}$. **B.** $F(x) = \frac{\cos(\pi - 2x)}{2} + \frac{1}{2}$.
C. $F(x) = \frac{\cos(\pi - 2x)}{2} + 1$. **D.** $F(x) = \frac{\cos(\pi - 2x)}{2} - \frac{1}{2}$.
- Câu 23.** Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 4x^3 - 3x + 2$ thỏa mãn $F(-1) = -\frac{3}{2}$. Khi đó phương trình $F(x) = 2x + 1$ có số nghiệm thực là:
A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.
- Câu 24.** Cho biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Tìm $I = \int [3f(x) + x] dx$
A. $I = 3x \cdot F(x) + \frac{x^2}{2} + C$ **B.** $I = \frac{1}{3} F(3x) + \frac{x^2}{2} + C$.
C. $I = \frac{1}{3} F(x) + \frac{x^2}{2} + C$ **D.** $I = 3F(x) + \frac{x^2}{2} + C$.
- Câu 25.** Họ nguyên hàm của hàm số $I = \int (1 + 2x)(\cos x + 1) dx$ là
A. $(1 + 2x) \sin x + 2 \cos x + C$. **B.** $x + x^2 + (1 + 2x) \sin x + 2 \cos x$.
C. $x + x^2 + (1 + 2x) \sin x - 2 \cos x + C$. **D.** $x + x^2 + (1 + 2x) \sin x + 2 \cos x + C$.
- Câu 26.** Tích phân $\int_0^1 \frac{1}{2x+5} dx$ bằng:
A. $\frac{1}{2} \log \frac{7}{5}$. **B.** $\frac{1}{2} \ln \frac{7}{5}$. **C.** $\frac{1}{2} \ln \frac{5}{7}$. **D.** $-\frac{4}{35}$.
- Câu 27.** Nếu $\int_2^5 f(x) dx = 3$ và $\int_5^7 f(x) dx = 9$ thì $\int_2^7 f(x) dx$ bằng bao nhiêu?
A. 3. **B.** 6. **C.** 12. **D.** -6.

- Câu 28.** Cho hàm số $f(x) = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x} + 2$, với a, b là các số hữu tỉ thỏa điều kiện $\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx = 2 - 3 \ln 2$.
- Tính $T = a + b$.
- A. $T = -1$. B. $T = 2$. C. $T = -2$. D. $T = 0$.
- Câu 29.** Cho hàm số $f(x) = x^4 + 4x^3 - 3x^2 - x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính $I = \int_0^1 f^2(x) \cdot f'(x) dx$.
- A. 2. B. -2. C. $-\frac{7}{3}$. D. $\frac{7}{3}$.
- Câu 30.** Cho tích phân $I = \int_0^1 \frac{x^7}{(1+x^2)^5} dx$, giả sử đặt $t = 1+x^2$. Tìm mệnh đề đúng.
- A. $I = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{(t-1)^3}{t^5} dt$. B. $I = \int_1^3 \frac{(t-1)^3}{t^5} dt$.
- C. $I = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{(t-1)^3}{t^4} dt$. D. $I = \frac{3}{2} \int_1^4 \frac{(t-1)^3}{t^4} dt$.
- Câu 31.** Cho $f(x), g(x)$ là hai hàm số liên tục trên đoạn $[-1; 1]$ và $f(x)$ là hàm số chẵn, $g(x)$ là hàm số lẻ. Biết $\int_0^1 f(x) dx = 5; \int_0^1 g(x) dx = 7$. Mệnh đề nào sau đây là sai?
- A. $\int_{-1}^1 f(x) dx = 10$. B. $\int_{-1}^1 [f(x) + g(x)] dx = 10$.
- C. $\int_{-1}^1 [f(x) - g(x)] dx = 10$. D. $\int_{-1}^1 g(x) dx = 14$.
- Câu 32.** Cho $\vec{a} = (-1; 2; 3), \vec{b} = (2; 1; 0)$, với $\vec{c} = 2\vec{a} - \vec{b}$ thì tọa độ của \vec{c} là
- A. $(-1; 3; 5)$. B. $(-4; 1; 3)$. C. $(-4; 3; 6)$. D. $(-4; 3; 3)$.
- Câu 33.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz, A(-3; 4; 2), B(-5; 6; 2), C(-10; 17; -7)$. Viết phương trình mặt cầu tâm C bán kính AB .
- A. $(x+10)^2 + (y-17)^2 + (z-7)^2 = 8$. B. $(x+10)^2 + (y-17)^2 + (z+7)^2 = 8$.
- C. $(x-10)^2 + (y-17)^2 + (z+7)^2 = 8$. D. $(x+10)^2 + (y+17)^2 + (z+7)^2 = 8$.
- Câu 34.** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(-1; 1; 0)$ và $N(3; 3; 6)$. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng MN có phương trình là
- A. $x + 2y + 3z - 1 = 0$. B. $2x + y + 3z - 13 = 0$.
- C. $2x + y + 3z - 30 = 0$. D. $2x + y + 3z + 13 = 0$.
- Câu 35.** Cho mặt phẳng (α) đi qua $M(0; 0; 1)$ và song song với giá của hai vectơ $\vec{a} = (1; -2; 3), \vec{b} = (3; 0; 5)$. Phương trình mặt phẳng (α) là
- A. $5x + 2y - 3z + 3 = 0$. B. $-5x + 2y + 3z + 3 = 0$.
- C. $-5x + 2y + 3z - 3 = 0$. D. $-10x + 4y + 6z + 3 = 0$.

Tự luận

Câu 1. Tính $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3 \sin x + \cos x}{2 \sin x + 3 \cos x} dx$.

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1;2]$ và thỏa mãn $\int_1^2 (x-2)^2 f(x) dx = -\frac{1}{21}$, $f(1) = 0$, $\int_1^2 [f'(x)]^2 dx = \frac{1}{7}$. Tính $\int_1^2 xf(x) dx$.

Câu 3. Hàm số $f(x) = \frac{7 \cos x - 4 \sin x}{\cos x + \sin x}$ có một nguyên hàm $F(x)$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\pi}{8}$. Tìm giá trị $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$

Câu 4. Cho hình trụ có chiều cao bằng $6\sqrt{2} \text{ cm}$. Biết rằng một mặt phẳng không vuông góc với đáy và cắt hai mặt đáy theo hai dây cung song song $AB, A'B'$ mà $AB = A'B' = 6 \text{ cm}$, diện tích tứ giác $ABB'A'$ bằng 60 cm^2 . Tính bán kính đáy của hình trụ.

Nguyễn Bảo Vương

Trắc nghiệm

BẢNG ĐÁP ÁN

1.A	2.D	3.B	4.A	5.A	6.B	7.B	8.B	9.D	10.D
11.C	12.B	13.C	14.C	15.A	16.B	17.D	18.B	19.D	20.C
21.A	22.B	23.D	24.D	25.D	26.B	27.C	28.C	29.D	30.A
31.D			32.C	33.B	34.B	35.C			

Câu 1. Cho $\int f(x)dx = F(x) + C$. Khi đó với $a \neq 0$, a, b là hằng số ta có $\int f(ax+b)dx$ bằng.

- A.** $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$. **B.** $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a+b}F(ax+b) + C$.
C. $\int f(ax+b)dx = F(ax+b) + C$. **D.** $\int f(ax+b)dx = aF(ax+b) + C$.

Bài giải

Theo công thức nguyên hàm mở rộng ta có: $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$.

Câu 2. Tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = -\cos 2x$ là.

- A.** $F(x) = \frac{1}{2}\sin 2x + C$. **B.** $F(x) = -\frac{1}{2}\sin 2x$.
C. $F(x) = -\sin 2x + C$. **D.** $F(x) = -\frac{1}{2}\sin 2x + C$.

Lời giải

Áp dụng công thức nguyên hàm cơ bản ta có

$$\int f(x)dx = \int (-\cos 2x)dx = -\int \cos 2x dx = -\frac{1}{2}\sin 2x + C.$$

Câu 3. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $y = \frac{1}{(1+x)^2}$.

- A.** $\int \frac{1}{(x+1)^2}dx = \frac{2}{(x+1)^3} + C$. **B.** $\int \frac{1}{(x+1)^2}dx = -\frac{1}{x+1} + C$.
C. $\int \frac{1}{(x+1)^2}dx = \frac{1}{x+1} + C$. **D.** $\int \frac{1}{(x+1)^2}dx = \frac{-2}{(x+1)^3} + C$.

Lời giải

$$\int \frac{1}{(x+1)^2}dx = \int (x+1)^{-2}dx = -(x+1)^{-1} + C = \frac{-1}{x+1} + C.$$

Câu 4. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x + \cos x$.

- A.** $\int f(x)dx = \frac{x^2}{2} + \sin x + C$. **B.** $\int f(x)dx = 1 - \sin x + C$.
C. $\int f(x)dx = x \sin x + \cos x + C$. **D.** $\int f(x)dx = \frac{x^2}{2} - \sin x + C$.

Lời giải

$$\int f(x) dx = \int (x + \cos x) dx = \frac{x^2}{2} + \sin x + C.$$

Câu 5. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{2x+1}$, biết $F(0) = 1$. Giá trị của $F(-2)$ bằng:

- A.** $1 + \frac{1}{2} \ln 3$. **B.** $1 + \frac{1}{2} \ln 5$. **C.** $1 + \ln 3$. **D.** $\frac{1}{2}(1 + \ln 3)$.

Lời giải

$$\text{Ta có } F(x) = \int f(x) dx = \int \frac{dx}{2x+1} = \frac{1}{2} \ln |2x+1| + C.$$

$$F(0) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \ln 1 + C = 1 \Leftrightarrow C = 1 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2} \ln |2x+1| + 1 \Rightarrow F(-2) = 1 + \frac{1}{2} \ln 3.$$

Câu 6. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin x - 1$ bằng:

- A.** $\cos x + C$. **B.** $-\cos x - x + C$. **C.** $-\cos x + C$. **D.** $\cos x - x + C$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \int (\sin x - 1) dx = -\cos x - x + C.$$

Câu 7. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = x \cos x$.

- A.** $\int f(x) dx = x \sin x - \cos x + C$. **B.** $\int f(x) dx = x \sin x + \cos x + C$.
C. $\int f(x) dx = -x \sin x + \cos x + C$. **D.** $\int f(x) dx = -x \sin x - \cos x + C$.

Lời giải

Chọn B

$$\int f(x) dx = \int x \cos x dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = \cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \sin x \end{cases}.$$

$$\Rightarrow \int f(x) dx = \int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C.$$

Câu 8. Tính tích phân $I = \int_0^2 (4x - 3) dx$.

- A.** 5. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 7.

Lời giải

Chọn B

$$\int_0^2 (4x - 3) dx = (2x^2 - 3x) \Big|_0^2 = 2$$

Câu 9. Cho hàm số $y = x^3$ có một nguyên hàm là $F(x)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A.** $F(2) - F(0) = 16$.
B. $F(2) - F(0) = 1$.
C. $F(2) - F(0) = 8$.

D. $F(2) - F(0) = 4.$

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\int_0^2 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_0^2 = 4 = F(2) - F(0).$

Câu 10. Cho $f(x), g(x)$ là hai hàm số liên tục trên \mathbb{R} . Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau?

A. $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(y) dy.$

B. $\int_a^b (f(x) - g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx.$

C. $\int_a^a f(x) dx = 0.$

D. $\int_a^b [f(x)g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b g(x) dx.$

Lời giải

Chọn D

Theo các tính chất về tích phân thì tính chất $\int_a^b [f(x)g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b g(x) dx$ sai.

Câu 11. Đặt $I = \int_1^2 (2mx + 1) dx$, m là tham số thực. Tìm m để $I = 4$.

A. $m = 2.$

B. $m = -2.$

C. $m = 1.$

D. $m = -1.$

Lời giải

Chọn C

$I = \int_1^2 (2mx + 1) dx = (mx^2 + x) \Big|_1^2 = 4m + 2 - m - 1 = 3m + 1.$

$I = 4 \Leftrightarrow m = 1.$

Câu 12. Tính tích phân $I = \int_0^1 8^x dx$.

A. $I = 7.$

B. $I = \frac{7}{3 \ln 2}.$

C. $I = 8.$

D. $I = \frac{8}{3 \ln 2}.$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $I = \int_0^1 8^x dx = \left(\frac{8^x}{\ln 8} \right) \Big|_0^1 = \frac{8}{\ln 8} - \frac{1}{\ln 8} = \frac{7}{3 \ln 2}.$

Câu 13. Tính tích phân $\int_0^e \cos x dx$.

A. $-\sin e.$

B. $-\cos e.$

C. $\sin e.$

D. $\cos e.$

Lời giải

Chọn C

$\int_0^e \cos x dx = \sin x \Big|_0^e = \sin e.$

Câu 14. Cho $\int_0^1 f(x) dx = 2$ và $\int_0^1 g(x) dx = 5$, khi đó $\int_0^1 [f(x) + 2g(x)] dx$ bằng

- A. -3. B. -8. **C. 12.** D. 1.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } \int_0^1 [f(x) + 2g(x)] dx = \int_0^1 f(x) dx + 2 \int_0^1 g(x) dx = 2 + 2 \cdot 5 = 12.$$

Câu 15. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a} = (2; -1; 3)$, $\vec{b} = (1; 3; -2)$. Tìm tọa độ của vectơ $\vec{c} = \vec{a} - 2\vec{b}$.

- A.** $\vec{c} = (0; -7; 7)$. **B.** $\vec{c} = (0; 7; 7)$. **C.** $\vec{c} = (0; -7; -7)$. **D.** $\vec{c} = (4; -7; 7)$.

Lời giải

$$\text{Ta có } -2\vec{b} = (-2; -6; 4) \text{ mà } \vec{a} = (2; -1; 3) \Rightarrow \vec{c} = (0; -7; 7).$$

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$ cho 2 véc tơ $\vec{a} = (2; 1; -1)$; $\vec{b} = (1; 3; m)$. Tìm m để $(\vec{a}; \vec{b}) = 90^\circ$.

- A.** $m = -5$. **B.** $m = 5$. **C.** $m = 1$. **D.** $m = -2$

Lời giải

$$(\vec{a}; \vec{b}) = 90^\circ \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow 5 - m = 0 \Leftrightarrow m = 5.$$

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu (S) có phương trình: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 4z - 7 = 0$. Xác định tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S) :

- A.** $I(-1; -2; 2); R = 3$. **B.** $I(1; 2; -2); R = \sqrt{2}$.
C. $I(-1; -2; 2); R = 4$. **D.** $I(1; 2; -2); R = 4$.

Lời giải

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 4z - 7 = 0 \Rightarrow a = 1; b = 2; c = -2; d = -7$$

$$\Rightarrow R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} = 4; I(1; 2; -2).$$

Câu 18. Vectơ $\vec{n} = (1; 2; -1)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng nào dưới đây?

- A.** $x + 2y + z + 2 = 0$. **B.** $x + 2y - z - 2 = 0$. **C.** $x + y - 2z + 1 = 0$. **D.** $x - 2y + z + 1 = 0$.

Lời giải

Mặt phẳng $x + 2y - z - 2 = 0$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; 2; -1)$.

Câu 19. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(-3; 4; -2)$ và $\vec{n} = (-2; 3; -4)$. Phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm A và nhận \vec{n} làm vectơ pháp tuyến là

- A.** $-3x + 4y + 2z + 26 = 0$. **B.** $-2x + 3y - 4z + 29 = 0$.
C. $2x - 3y + 4z + 29 = 0$. **D.** $2x - 3y + 4z + 26 = 0$.

Lời giải

Mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(-3; 4; -2)$ và nhận $\vec{n} = (-2; 3; -4)$ làm vectơ pháp tuyến có phương trình là: $-2(x+3) + 3(y-4) - 4(z+2) = 0$

$$\Leftrightarrow -2x + 3y - 4z - 26 = 0 \Leftrightarrow 2x - 3y + 4z + 26 = 0.$$

Câu 20. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình $-2x + 3y - 5z + 5 = 0$. Mặt phẳng (P) có vector pháp tuyến là

- A. $\vec{n} = (-2; -3; 5)$. B. $\vec{n} = (-2; 3; 5)$. C. $\vec{n} = (2; -3; 5)$. D. $\vec{n} = (2; 3; 5)$.

Lời giải

Ta có: mặt phẳng (P) có vector pháp tuyến là $\vec{n} = (-2; 3; -5)$ hay $\vec{n}_1 = (2; -3; 5)$.

Câu 21. Gọi $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x+1}} - \frac{1}{x^2}$. Biết $F(3) = 6$, giá trị của $F(8)$ là

- A. $\frac{217}{8}$. B. 27. C. $\frac{215}{24}$. D. $\frac{215}{8}$.

Lời giải

Chọn A

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \int f(x) dx &= \int \left(\frac{2x}{\sqrt{x+1}} - \frac{1}{x^2} \right) dx = \int \left(\frac{2(x+1)-2}{\sqrt{x+1}} - \frac{1}{x^2} \right) dx \\ &= 2 \int \sqrt{x+1} dx - 2 \int \left(\frac{1}{\sqrt{x+1}} \right) dx - \int \frac{1}{x^2} dx \\ &= 2 \int (x+1)^{\frac{1}{2}} d(x+1) - 2 \int (x+1)^{-\frac{1}{2}} d(x+1) - \int x^{-2} dx \\ &= \frac{4(x+1)^{\frac{3}{2}}}{3} - 4\sqrt{x+1} + \frac{1}{x} + C. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } F(x) = \frac{4(x+1)^{\frac{3}{2}}}{3} - 4\sqrt{x+1} + \frac{1}{x} + C$$

$$\text{Mặt khác: } F(3) = 6 \Leftrightarrow 6 = \frac{4(3+1)^{\frac{3}{2}}}{3} - 4\sqrt{3+1} + \frac{1}{3} + C \Leftrightarrow C = 3.$$

$$\text{Vậy } F(8) = \frac{4(8+1)^{\frac{3}{2}}}{3} - 4\sqrt{8+1} + \frac{1}{8} + 3 = \frac{217}{8}.$$

Câu 22. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sin(\pi - 2x)$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

- A. $F(x) = \frac{-\cos(\pi - 2x)}{2} + \frac{1}{2}$. B. $F(x) = \frac{\cos(\pi - 2x)}{2} + \frac{1}{2}$.
 C. $F(x) = \frac{\cos(\pi - 2x)}{2} + 1$. D. $F(x) = \frac{\cos(\pi - 2x)}{2} - \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

$$+ F(x) = \int \sin(\pi - 2x) dx = \frac{\cos(\pi - 2x)}{2} + C$$

$$+ F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} + C = 1 \Leftrightarrow C = \frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy } F(x) = \frac{\cos(\pi - 2x)}{2} + \frac{1}{2}$$

Câu 23. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=4x^3-3x+2$ thỏa mãn $F(-1)=-\frac{3}{2}$. Khi đó

phương trình $F(x)=2x+1$ có số nghiệm thực là:

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } F(x) = \int f(x) dx = \int (4x^3 - 3x + 2) dx = x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + C.$$

$$\text{Mà } F(-1) = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow 1 - \frac{3}{2} - 2 + C = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow C = 1.$$

$$\text{Vậy } F(x) = x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + 1.$$

$$\text{Khi đó } F(x) = 2x + 1 \Leftrightarrow x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + 1 = 2x + 1 \Leftrightarrow x^2 \left(x^2 - \frac{3}{2} \right) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \pm \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Câu 24. Cho biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Tìm $I = \int [3f(x) + x] dx$

A. $I = 3x.F(x) + \frac{x^2}{2} + C$ B. $I = \frac{1}{3}F(3x) + \frac{x^2}{2} + C.$

C. $I = \frac{1}{3}F(x) + \frac{x^2}{2} + C.$ **D. $I = 3F(x) + \frac{x^2}{2} + C.$**

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } I = \int [3f(x) + x] dx = 3 \int f(x) dx + \int x dx = 3F(x) + \frac{x^2}{2} + C.$$

Câu 25. Họ nguyên hàm của hàm số $I = \int (1+2x)(\cos x + 1) dx$ là

A. $(1+2x)\sin x + 2\cos x + C.$

B. $x + x^2 + (1+2x)\sin x + 2\cos x.$

C. $x + x^2 + (1+2x)\sin x - 2\cos x + C.$

D. $x + x^2 + (1+2x)\sin x + 2\cos x + C.$

Lời giải

Chọn D

Ta có

$$\int f(x) dx = \int (1+2x)(\cos x + 1) dx = \int (1+2x)\cos x dx + \int (1+2x) dx$$

$$\text{Tính } \int (1+2x) dx = x + x^2 + C_1$$

$$\text{Tính } \int (1+2x)\cos x dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = 1+2x \\ dv = \cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2 dx \\ v = \sin x \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } \int (1+2x)\cos x dx = (1+2x)\sin x - 2 \int \sin x dx = (1+2x)\sin x + 2\cos x + C_2$$

$$\text{Do đó } I = x + x^2 + (1+2x)\sin x + 2\cos x + C.$$

Câu 26. Tích phân $\int_0^1 \frac{1}{2x+5} dx$ bằng:

- A. $\frac{1}{2} \log \frac{7}{5}$. B. $\frac{1}{2} \ln \frac{7}{5}$. C. $\frac{1}{2} \ln \frac{5}{7}$. D. $-\frac{4}{35}$.

Lời giải

Ta có $\int_0^1 \frac{1}{2x+5} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{2x+5} d(2x+5) = \frac{1}{2} \ln(2x+5) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \ln \frac{7}{5}$.

Câu 27. Nếu $\int_2^5 f(x) dx = 3$ và $\int_5^7 f(x) dx = 9$ thì $\int_2^7 f(x) dx$ bằng bao nhiêu?

- A. 3. B. 6. C. 12. D. -6.

Lời giải

Ta có: $\int_2^7 f(x) dx = \int_2^5 f(x) dx + \int_5^7 f(x) dx = 3 + 9 = 12$.

Câu 28. Cho hàm số $f(x) = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x} + 2$, với a, b là các số hữu tỉ thỏa điều kiện $\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx = 2 - 3 \ln 2$.

Tính $T = a + b$.

- A. $T = -1$. B. $T = 2$. C. $T = -2$. D. $T = 0$.

Lời giải

Ta có $\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{a}{x^2} + \frac{b}{x} + 2 \right) dx = \left(-\frac{a}{x} + b \ln|x| + 2x \right) \Big|_{\frac{1}{2}}^1 = a + 1 + b \ln 2$.

Theo giả thiết, ta có $2 - 3 \ln 2 = a + 1 + b \ln 2$. Từ đó suy ra $a = 1, b = -3$. Vậy $T = a + b = -2$.

Câu 29. Cho hàm số $f(x) = x^4 + 4x^3 - 3x^2 - x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính $I = \int_0^1 f^2(x) \cdot f'(x) dx$.

- A. 2. B. -2. C. $-\frac{7}{3}$. D. $\frac{7}{3}$.

Lời giải

Đặt $t = f(x) \Rightarrow dt = f'(x) dx$. Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = f(0) = 1, x = 1 \Rightarrow t = f(1) = 2$.

Khi đó $I = \int_1^2 t^2 dt = \frac{t^3}{3} \Big|_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$.

Câu 30. Cho tích phân $I = \int_0^1 \frac{x^7}{(1+x^2)^5} dx$, giả sử đặt $t = 1 + x^2$. Tìm mệnh đề đúng.

- A. $I = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{(t-1)^3}{t^5} dt$. B. $I = \int_1^3 \frac{(t-1)^3}{t^5} dt$.
 C. $I = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{(t-1)^3}{t^4} dt$. D. $I = \frac{3}{2} \int_1^4 \frac{(t-1)^3}{t^4} dt$.

Lời giải

Ta có: $t = 1 + x^2 \Rightarrow dt = 2x dx$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 1$.

$x = 1 \Rightarrow t = 2$.

$$\Rightarrow I = \int_0^1 \frac{x^7}{(1+x^2)^5} dx = \int_0^1 \frac{x \cdot x^6}{(1+x^2)^5} dx = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{(t-1)^3}{t^5} dt.$$

Câu 31. Cho $f(x)$, $g(x)$ là hai hàm số liên tục trên đoạn $[-1;1]$ và $f(x)$ là hàm số chẵn, $g(x)$ là hàm số lẻ. Biết $\int_0^1 f(x) dx = 5$; $\int_0^1 g(x) dx = 7$. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

- A. $\int_{-1}^1 f(x) dx = 10$. B. $\int_{-1}^1 [f(x) + g(x)] dx = 10$.
 C. $\int_{-1}^1 [f(x) - g(x)] dx = 10$. D. $\int_{-1}^1 g(x) dx = 14$.

Lời giải

Vì $f(x)$ là hàm số chẵn nên $\int_{-1}^1 f(x) dx = 2 \int_0^1 f(x) dx = 2 \cdot 5 = 10$.

Vì $g(x)$ là hàm số lẻ nên $\int_{-1}^1 g(x) dx = 0$.

$$\Rightarrow \int_{-1}^1 [f(x) + g(x)] dx = 10 \text{ và } \int_{-1}^1 [f(x) - g(x)] dx = 10.$$

Vậy đáp án D sai.

Câu 32. Cho $\vec{a} = (-1; 2; 3)$, $\vec{b} = (2; 1; 0)$, với $\vec{c} = 2\vec{a} - \vec{b}$ thì tọa độ của \vec{c} là

- A. $(-1; 3; 5)$. B. $(-4; 1; 3)$. C. $(-4; 3; 6)$. D. $(-4; 3; 3)$.

Lời giải

Ta có: $2\vec{a} = (-2; 4; 6)$, $\vec{b} = (2; 1; 0)$ nên $\vec{c} = 2\vec{a} - \vec{b} = (-4; 3; 6)$.

Câu 33. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, $A(-3; 4; 2)$, $B(-5; 6; 2)$, $C(-10; 17; -7)$. Viết phương trình mặt cầu tâm C bán kính AB .

- A. $(x+10)^2 + (y-17)^2 + (z-7)^2 = 8$. B. $(x+10)^2 + (y-17)^2 + (z+7)^2 = 8$.
 C. $(x-10)^2 + (y-17)^2 + (z+7)^2 = 8$. D. $(x+10)^2 + (y+17)^2 + (z+7)^2 = 8$.

Lời giải

Ta có $AB = 2\sqrt{2}$.

Phương trình mặt cầu tâm C bán kính AB : $(x+10)^2 + (y-17)^2 + (z+7)^2 = 8$.

Câu 34. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(-1; 1; 0)$ và $N(3; 3; 6)$. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng MN có phương trình là

- A. $x + 2y + 3z - 1 = 0$. B. $2x + y + 3z - 13 = 0$.
 C. $2x + y + 3z - 30 = 0$. D. $2x + y + 3z + 13 = 0$.

Lời giải

Mặt phẳng trung trực (P) của đoạn thẳng MN đi qua điểm $I(1; 2; 3)$ là trung điểm của đoạn thẳng MN và có vectơ pháp tuyến là $\vec{MN} = (4; 2; 6)$.

Phương trình mặt phẳng (P): $4(x-1) + 2(y-2) + 6(z-3) = 0 \Leftrightarrow 2x + y + 3z - 13 = 0$.

- Câu 35.** Cho mặt phẳng (α) đi qua $M(0;0;1)$ và song song với giá của hai vectơ $\vec{a}=(1;-2;3)$, $\vec{b}=(3;0;5)$. Phương trình mặt phẳng (α) là
A. $5x+2y-3z+3=0$. **B.** $-5x+2y+3z+3=0$.
C. $-5x+2y+3z-3=0$. **D.** $-10x+4y+6z+3=0$.

Lời giải

Gọi \vec{n} là véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) thì $\vec{n}=[\vec{a},\vec{b}]=(-10;4;6)$.

Phương trình mặt phẳng (α) đi qua $M(0;0;1)$ và có một véc tơ pháp tuyến $\vec{n}=(-10;4;6)$ là $-10(x-0)+4(y-0)+6(z-1)=0 \Leftrightarrow -5x+2y+3z-3=0$.

Tự luận

- Câu 1.** Tính $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3\sin x + \cos x}{2\sin x + 3\cos x} dx$.

Lời giải

Ta cần tìm các số m, n, p sao cho $\frac{3\sin x + \cos x}{2\sin x + 3\cos x} = m + \frac{n(2\sin x + 3\cos x)'}{2\sin x + 3\cos x} + \frac{p}{2\sin x + 3\cos x}$.

Suy ra $3\sin x + \cos x = (2m - 3n)\sin x + (3m + 2n)\cos x + p$.

$$\text{Suy ra } \begin{cases} 2m - 3n = 3 \\ 3m + 2n = 1 \\ p = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{9}{13}, n = -\frac{7}{13}, p = 0.$$

$$\text{Do đó } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3\sin x + \cos x}{2\sin x + 3\cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{9}{13} - \frac{7}{13} \cdot \frac{(2\sin x + 3\cos x)'}{2\sin x + 3\cos x} \right) dx$$

$$= \left(\frac{9}{13}x - \frac{7}{13} \ln|2\sin x + 3\cos x| \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{9}{26}\pi - \frac{7}{13} \ln 2 + \frac{7}{13} \ln 3.$$

$$\text{Suy ra } b = \frac{7}{13}, c = \frac{9}{26} \Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{14}{9}.$$

- Câu 2.** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1;2]$ và thỏa mãn $\int_1^2 (x-2)^2 f(x) dx = -\frac{1}{21}$, $f(1)=0$, $\int_1^2 [f'(x)]^2 dx = \frac{1}{7}$. Tính $\int_1^2 xf(x) dx$.

Lời giải

Ta có:

$$\int_1^2 (x-2)^2 f(x) dx = -\frac{1}{21}.$$

$$\text{Đặt: } u = f(x) \Rightarrow du = f'(x) dx; dv = (x-2)^2 dx \Rightarrow v = \frac{(x-2)^3}{3}.$$

$$\int_1^2 (x-2)^2 f(x) dx = \left(\frac{(x-2)^3}{3} f(x) \right) \Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{(x-2)^3}{3} f'(x) dx$$

$$= - \int_1^2 \frac{(x-2)^3}{3} f'(x) dx.$$

$$\Rightarrow \int_1^2 (x-2)^3 f'(x) dx = \frac{1}{7}.$$

Do đó, $\int_1^2 (x-2)^3 f'(x) dx = \int_1^2 [f'(x)]^2 dx = \frac{1}{7}$

Mà $\int_1^2 (x-2)^6 dx = \left(\frac{(x-2)^7}{7} \right) \Big|_1^2 = \frac{1}{7}.$

Vậy, $\int_1^2 \left((x-2)^6 - 2(x-2)^3 f'(x) + [f'(x)]^2 \right) dx = \frac{1}{7} - \frac{2}{7} + \frac{1}{7} = 0$

$$\Rightarrow \int_1^2 \left((x-2)^3 - f'(x) \right)^2 dx = 0 \Rightarrow (x-2)^3 - f'(x) = 0$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{(x-2)^4}{4} + C.$$

Mà $f(1) = 0 \Rightarrow C = \frac{-1}{4} \Rightarrow f(x) = \frac{(x-2)^4}{4} - \frac{1}{4}.$

$$\int_1^2 xf(x) dx = \frac{1}{4} \int_1^2 (x(x-2)^4 - x) dx = \frac{1}{4} \int_1^2 \left((x-2)^5 + 2(x-2)^4 - x \right) dx$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{(x-2)^6}{6} + \frac{2(x-2)^5}{5} - \frac{1}{2}x^2 \right) \Big|_1^2$$

$$= \frac{1}{4} \left(-2 - \frac{1}{6} + \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \right) = -\frac{19}{60}.$$

Câu 3. Hàm số $f(x) = \frac{7\cos x - 4\sin x}{\cos x + \sin x}$ có một nguyên hàm $F(x)$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\pi}{8}$. Tìm giá trị $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$

Lời giải

Cách 1:

$$f(x) = \frac{7\cos x - 4\sin x}{\cos x + \sin x} = \frac{\frac{3}{2}(\cos x + \sin x) + \frac{11}{2}(-\sin x + \cos x)}{\cos x + \sin x} = \frac{3}{2} + \frac{11}{2} \cdot \frac{-\sin x + \cos x}{\cos x + \sin x}.$$

Do đó

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{3}{2} + \frac{11}{2} \cdot \frac{-\sin x + \cos x}{\cos x + \sin x} \right) dx \Leftrightarrow F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{3}{2} dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{11}{2} \cdot \frac{d(\cos x + \sin x)}{\cos x + \sin x}$$

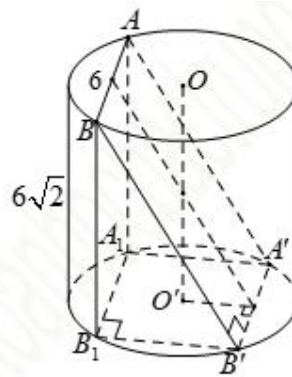
$$\Leftrightarrow F\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{3\pi}{8} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{11}{2} \ln(\cos x + \sin x) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{8} + \frac{3\pi}{8} - \frac{11}{2} \ln \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{4} - \frac{11}{4} \ln 2 = \frac{3\pi - 11 \ln 2}{4}.$$

Câu 4. Cho hình trụ có chiều cao bằng $6\sqrt{2} \text{ cm}$. Biết rằng một mặt phẳng không vuông góc với đáy và cắt hai mặt đáy theo hai dây cung song song $AB, A'B'$ mà $AB = A'B' = 6 \text{ cm}$, diện tích tứ giác $ABB'A'$ bằng 60 cm^2 . Tính bán kính đáy của hình trụ.

Lời giải

Gọi O, O' là tâm các đáy hình trụ (hình vẽ).



Vì $AB = A'B'$ nên $(ABB'A')$ đi qua trung điểm của đoạn OO' và $ABB'A'$ là hình chữ nhật.

Ta có $S_{ABB'A'} = AB \cdot AA' \Leftrightarrow 60 = 6 \cdot AA' \Rightarrow AA' = 10 \text{ (cm)}$.

Gọi A_1, B_1 lần lượt là hình chiếu của A, B trên mặt đáy chứa A' và B'

$\Rightarrow A'B'B_1A_1$ là hình chữ nhật có $A'B' = 6 \text{ (cm)}$,

$$B_1B' = \sqrt{BB'^2 - BB_1^2} = \sqrt{10^2 - (6\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{7} \text{ (cm)}$$

Gọi R là bán kính đáy của hình trụ, ta có $2R = A'B_1 = \sqrt{B_1B'^2 + A'B'^2} = 8 \Rightarrow R = 4 \text{ (cm)}$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 1. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 - 1$.

A. $\int f(x) dx = x^3 + x + C$.

B. $\int f(x) dx = x^3 + C$.

C. $\int f(x) dx = x^3 - x + C$.

D. $\int f(x) dx = 6x + C$.

Câu 2. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos 2x$.

A. $\int \cos 2x dx = 2 \sin 2x + C$.

B. $\int \cos 2x dx = -\frac{1}{2} \sin 2x + C$.

C. $\int \cos 2x dx = -2 \sin 2x + C$.

D. $\int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x + C$.

Câu 3. Cho các hàm số $f(x)$, $g(x)$ liên tục trên tập xác định. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$, ($k \neq 0$)

B. $\int f(x).g(x) dx = \int f(x) dx \cdot \int g(x) dx$.

C. $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$.

D. $\int f'(x) dx = f(x) + C$, ($C \in \mathbb{R}$).

Câu 4. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + \sin x$ là

A. $x^3 + \cos x + C$.

B. $x^3 + \sin x + C$.

C. $x^3 - \cos x + C$.

D. $3x^3 - \sin x + C$.

Câu 5. Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 5x^4 - 6x^2 + 1$ là

A. $20x^3 - 12x + C$.

B. $x^5 - 2x^3 + x + C$.

C. $20x^5 - 12x^3 + x + C$.

D. $\frac{x^4}{4} + 2x^2 - 2x + C$.

Câu 6. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 4x^5 - \frac{1}{x} + 2018$ là:

A. $\frac{4}{6}x^6 + \ln|x| + 2018x + C$.

B. $\frac{2}{3}x^6 - \ln x + 2018x + C$.

C. $20x^4 + \frac{1}{x^2} + C$.

D. $\frac{2}{3}x^6 - \ln|x| + 2018x + C$.

Câu 7. Tìm nguyên hàm $\int \frac{1}{x\sqrt{\ln x + 1}} dx$.

A. $\frac{2}{3} \sqrt{(\ln x + 1)^3} + C$.

B. $\sqrt{\ln x + 1} + C$.

C. $\frac{1}{2} \sqrt{\ln x + 1} + C$.

D. $2\sqrt{\ln x + 1} + C$.

Câu 8. Cho $\int_0^1 [f(x) - 2g(x)] dx = 12$ và $\int_0^1 g(x) dx = 5$, khi đó $\int_0^1 f(x) dx$ bằng

A. -2.

B. 12.

C. 22.

D. 2.

Câu 9. Cho $\int_{-1}^1 f(x) dx = 2$ và $\int_{-1}^1 g(x) dx = -7$, khi đó $\int_{-1}^1 [f(x) - \frac{1}{7}g(x)] dx$ bằng

A. -3.

B.

C. 3.

D. 1.

Câu 10. Cho $\int_a^c f(x) dx = 50$, $\int_b^c f(x) dx = 20$. Tính $\int_b^a f(x) dx$.

A. -30.

B. 0.

C. 70.

D. 30.

Câu 11. Giá trị của $\int_0^3 dx$ bằng

A. 3.

B. 2.

C. 0.

D. 1.

Câu 12. Cho $\int_0^1 f(x) dx = 2$ và $\int_0^1 g(x) dx = 5$, khi đó $\int_0^1 [f(x) - 2g(x)] dx$ bằng

A. -3.

B. 12.

C. -8.

D. 1.

Câu 13. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\int_{-1}^1 |x|^3 dx = \left| \int_{-1}^1 x^3 dx \right|$. B. $\int_{-1}^{2018} |x^4 - x^2 + 1| dx = \int_{-1}^{2018} (x^4 - x^2 + 1) dx$.

C. $\int_{-2}^3 |e^x(x+1)| dx = \int_{-2}^3 e^x(x+1) dx$.

D. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \cos^2 x} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$.

Câu 14. Tích phân $I = \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx$ có giá trị bằng

A. $\ln 2 - 1$.

B. $-\ln 2$.

C. $\ln 2$.

D. $1 - \ln 2$.

Câu 15. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai vec tơ $\vec{a}(1; -2; 0)$ và $\vec{b}(-2; 3; 1)$. Khẳng định nào sau đây là sai?

A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = -8$.

B. $2\vec{a} = (2; -4; 0)$.

C. $\vec{a} + \vec{b} = (-1; 1; -1)$.

D. $|\vec{b}| = 14$.

Câu 16. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{OM} = 2\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{ON} = 2\vec{j} - 3\vec{i}$. Tọa độ của vectơ \vec{MN} là:

A. $(-2; 1; 1)$.

B. $(1; 1; 2)$.

C. $(-3; 0; 1)$.

D. $(-3; 0; -1)$.

Câu 17. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) tâm $I(2; 3; -6)$ và bán kính $R = 4$ có phương trình là

A. $(x+2)^2 + (y+3)^2 + (z-6)^2 = 4$.

B. $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+6)^2 = 4$.

C. $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+6)^2 = 16$.

D. $(x+2)^2 + (y+3)^2 + (z-6)^2 = 16$.

Câu 18. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(0; 6; 0)$, $B(0; 0; -2)$ và $C(-3; 0; 0)$. Phương trình mặt phẳng (P) đi qua ba điểm A, B, C là

A. $-2x + y - 3z + 6 = 0$. B. $\frac{x}{6} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{-3} = 1$. C. $2x - y + 3z + 6 = 0$. D. $\frac{x}{3} + \frac{y}{-6} + \frac{z}{2} = 1$.

Câu 19. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 6; -7)$ và $B(3; 2; 1)$. Phương trình mặt phẳng trung trực đoạn AB là

A. $x - 2y + 4z + 2 = 0$. B. $x - 2y - 3z - 1 = 0$. C. $x - 2y + 3z + 17 = 0$. D. $x - 2y + 4z + 18 = 0$.

Câu 20. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây nằm trên mặt phẳng $(P): 2x - y + z - 2 = 0$.

A. $Q(1; -2; 2)$.

B. $N(1; -1; -1)$.

C. $P(2; -1; -1)$.

D. $M(1; 1; -1)$.

- Câu 21.** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ và có một nguyên hàm là $F(x)$. Tìm $I = \int [2f(x) + f'(x) + 1] dx$?
- A. $I = 2F(x) + xf(x) + C$. B. $I = 2xF(x) + x + 1$
 C. $I = 2xF(x) + f(x) + x + C$. D. $I = 2F(x) + f(x) + x + C$.
- Câu 22.** Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{2x-1}$. Biết $F(1) = 2$. Giá trị của $F(2)$ là
- A. $F(2) = \frac{1}{2} \ln 3 + 2$. B. $F(2) = \ln 3 + 2$.
 C. $F(2) = \frac{1}{2} \ln 3 - 2$. D. $F(2) = 2 \ln 3 - 2$.
- Câu 23.** Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x) = \frac{1}{2x+1}$; biết $F(0) = 2$. Tính $F(1)$.
- A. $F(1) = \frac{1}{2} \ln 3 - 2$.
 B. $F(1) = \ln 3 + 2$.
 C. $F(1) = 2 \ln 3 - 2$.
 D. $F(1) = \frac{1}{2} \ln 3 + 2$.
- Câu 24.** Cho hàm số $y = F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y = x^2$. Biểu thức $F'(25)$ bằng:
- A. 125. B. 625. C. 5. D. 25.
- Câu 25.** Công thức nào sau đây là sai?
- A. $\int \ln x dx = \frac{1}{x} + C$. B. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$.
 C. $\int \sin x dx = -\cos x + C$. D. $\int e^x dx = e^x + C$.
- Câu 26.** Có bao nhiêu giá trị thực của a để có $\int_0^a (2x+5) dx = a-4$
- A. 1. B. 0. C. 2. D. Vô số.
- Câu 27.** Tích phân $I = \int_0^1 e^{x+1} dx$ bằng
- A. $e^2 - 1$. B. $e^2 - e$. C. $e^2 + e$. D. $e - e^2$.
- Câu 28.** Cho hàm số $f(x) = x^4 - 4x^3 + 2x^2 - x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính $\int_0^1 f^2(x) \cdot f'(x) dx$
- A. $\frac{2}{3}$. B. 2. C. $-\frac{2}{3}$. D. -2.
- Câu 29.** Cho tích phân $I = \int_0^3 \frac{x}{1+\sqrt{x+1}} dx$ nếu đặt $t = \sqrt{x+1}$ thì I là
- A. $I = \int_1^2 (2t^2 - t) dt$. B. $I = \int_1^2 (2t^2 + 2t) dt$. C. $I = \int_1^2 (2t^2 - 2t) dt$. D. $I = \int_1^2 (t^2 - 2t) dt$.

Câu 30. Tích phân $\int_0^2 2e^{2x} dx$ bằng

- A. e^4 . B. $e^4 - 1$. C. $4e^4$. D. $3e^4 - 1$.

Câu 31. Cho $\int_3^8 f(x+1) dx = 10$. Tính $J = \int_0^1 f(5x+4) dx$

- A. $J = 4$. B. $J = 10$. C. $J = 32$. D. $J = 2$.

Câu 32. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0; 0; 0)$, $B(3; 0; 0)$, $D(0; 3; 0)$, $D'(0; 3; -3)$. Tọa độ trọng tâm tam giác $A'B'C$ là

- A. $(1; 1; -2)$. B. $(2; 1; -2)$. C. $(1; 2; -1)$. D. $(2; 1; -1)$.

Câu 33. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 2; -4)$, $B(1; -3; 1)$, $C(2; 2; 3)$. Tính đường kính l của mặt cầu (S) đi qua ba điểm trên và có tâm nằm trên mặt phẳng (Oxy) .

- A. $l = 2\sqrt{13}$. B. $l = 2\sqrt{41}$. C. $l = 2\sqrt{26}$. D. $l = 2\sqrt{11}$.

Câu 34. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình $x - 2y - 2z - 5 = 0$ và mặt cầu (S) có phương trình $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 4$. Tìm phương trình mặt phẳng song song với mặt phẳng (P) và đồng thời tiếp xúc với mặt cầu (S) .

- A. $x - 2y - 2z + 1 = 0$. B. $-x + 2y + 2z + 5 = 0$.
C. $x - 2y - 2z - 23 = 0$. D. $-x + 2y + 2z + 17 = 0$.

Câu 35. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng (P) , (Q) lần lượt có phương trình là $x + y - z = 0$, $x - 2y + 3z = 4$ và cho điểm $M(1; -2; 5)$. Tìm phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm M đồng thời vuông góc với hai mặt phẳng (P) và (Q) .

- A. $5x + 2y - z + 14 = 0$. B. $x - 4y - 3z + 6 = 0$. C. $x - 4y - 3z - 6 = 0$. D. $5x + 2y - z + 4 = 0$.

Tự luận

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên \mathbb{R} thỏa mãn $5f(x) - 7f(1-x) = 3(x^2 - 2x), \forall x \in \mathbb{R}$, Tính tích phân $I = \int_0^1 x.f'(x) dx$

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương thỏa mãn $f'(x) = \frac{2f(x)}{x} + 2x^3, \forall x \in (0; +\infty)$ và $\int_2^3 \frac{x^5}{f^2(x)} dx = \frac{1}{20}$. Tìm giá trị của biểu thức $f(2) + f(3)$

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{1}{x^2 + x - 2}, f(-3) - f(3) = 0$ và $f(0) = \frac{1}{3}$. Tìm giá trị của biểu thức $f(-4) + f(-1) - f(4)$

Câu 4. Để làm một chiếc cốc bằng thủy tinh dạng hình trụ với đáy cốc dày 1,5 cm, thành xung quanh cốc dày 0,2 cm và có thể tích thật (thể tích nó đựng được) là $480\pi \text{ cm}^3$ thì người ta cần ít nhất bao nhiêu cm^3 thủy tinh?

Trắc nghiệm

BẢNG ĐÁP ÁN

1.C	2.D	3.B	4.C	5.B	6.D	7.D	8.C	9.C	10.A
11.A	12.C	13.B	14.C	15.C	16.C	17.C	18.C	19.D	20.B
21.D	22.A	23.D	24.B	25.A	26.A	27.B	28.C	29.A	30.B
31.B	32.B	33.C	34.D	35.B					

Câu 1. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 - 1$.

A. $\int f(x) dx = x^3 + x + C$.

B. $\int f(x) dx = x^3 + C$.

C. $\int f(x) dx = x^3 - x + C$.

D. $\int f(x) dx = 6x + C$.

Lời giải

$$\int f(x) dx = \int (3x^2 - 1) dx = x^3 - x + C.$$

Câu 2. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos 2x$.

A. $\int \cos 2x dx = 2 \sin 2x + C$.

B. $\int \cos 2x dx = -\frac{1}{2} \sin 2x + C$.

C. $\int \cos 2x dx = -2 \sin 2x + C$.

D. $\int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x + C$.

Lời giải

Áp dụng $\int \cos(ax + b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax + b) + C$.

Vậy $\int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x + C$.

Câu 3. Cho các hàm số $f(x)$, $g(x)$ liên tục trên tập xác định. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$, ($k \neq 0$)

B. $\int f(x).g(x) dx = \int f(x) dx \int g(x) dx$.

C. $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$.

D. $\int f'(x) dx = f(x) + C$, ($C \in \mathbb{R}$).

Lời giải

$$\int f(x).g(x) dx \neq \int f(x) dx \int g(x) dx$$

Câu 4. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + \sin x$ là

A. $x^3 + \cos x + C$.

B. $x^3 + \sin x + C$.

C. $x^3 - \cos x + C$.

D. $3x^3 - \sin x + C$.

Lời giải

Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + \sin x$ là $x^3 - \cos x + C$.

Câu 5. Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 5x^4 - 6x^2 + 1$ là

A. $20x^3 - 12x + C$.

B. $x^5 - 2x^3 + x + C$.

C. $20x^5 - 12x^3 + x + C$.

D. $\frac{x^4}{4} + 2x^2 - 2x + C$.

Lời giải

Ta có $\int (5x^4 - 6x^2 + 1) dx = x^5 - 2x^3 + x + C$.

Câu 6. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 4x^5 - \frac{1}{x} + 2018$ là:

- A. $\frac{4}{6}x^6 + \ln|x| + 2018x + C$. B. $\frac{2}{3}x^6 - \ln x + 2018x + C$.
 C. $20x^4 + \frac{1}{x^2} + C$. D. $\frac{2}{3}x^6 - \ln|x| + 2018x + C$.

Lời giải

Ta có: $\int \left(4x^5 - \frac{1}{x} + 2018 \right) dx = \frac{2}{3}x^6 - \ln|x| + 2018x + C$

Câu 7. Tìm nguyên hàm $\int \frac{1}{x\sqrt{\ln x + 1}} dx$.

- A. $\frac{2}{3}\sqrt{(\ln x + 1)^3} + C$. B. $\sqrt{\ln x + 1} + C$. C. $\frac{1}{2}\sqrt{\ln x + 1} + C$. **D. $2\sqrt{\ln x + 1} + C$.**

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\int \frac{1}{x\sqrt{\ln x + 1}} dx = 2 \int \frac{1}{2\sqrt{\ln x + 1}} d(\ln x + 1) = 2\sqrt{\ln x + 1} + C$

Câu 8. Cho $\int_0^1 [f(x) - 2g(x)] dx = 12$ và $\int_0^1 g(x) dx = 5$, khi đó $\int_0^1 f(x) dx$ bằng

- A. -2. B. 12. **C. 22.** D. 2.

Lời giải

Chọn C

Ta có:

$$\int_0^1 [f(x) - 2g(x)] dx = \int_0^1 f(x) dx - 2 \int_0^1 g(x) dx$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 [f(x) - 2g(x)] dx + 2 \int_0^1 g(x) dx = 12 + 2 \cdot 5 = 22.$$

Câu 9. Cho $\int_{-1}^1 f(x) dx = 2$ và $\int_{-1}^1 g(x) dx = -7$, khi đó $\int_{-1}^1 \left[f(x) - \frac{1}{7}g(x) \right] dx$ bằng

- A. -3. B. **C. 3.** D. 1.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } \int_{-1}^1 \left[f(x) - \frac{1}{7}g(x) \right] dx = \int_{-1}^1 f(x) dx - \frac{1}{7} \int_{-1}^1 g(x) dx = 2 - \frac{1}{7} \cdot (-7) = 3.$$

Câu 10. Cho $\int_a^c f(x) dx = 50$, $\int_b^c f(x) dx = 20$. Tính $\int_b^a f(x) dx$.

- A. -30.** B. 0. C. 70. D. 30.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int_b^a f(x) dx = \int_b^c f(x) dx + \int_c^a f(x) dx = \int_b^c f(x) dx - \int_a^c f(x) dx = 20 - 50 = -30$.

Câu 11. Giá trị của $\int_0^3 dx$ bằng

A. 3.

B. 2.

C. 0.

D. 1.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int_0^3 dx = x|_0^3 = 3 - 0 = 3$.

Câu 12. Cho $\int_0^1 f(x) dx = 2$ và $\int_0^1 g(x) dx = 5$, khi đó $\int_0^1 [f(x) - 2g(x)] dx$ bằng

A. -3.

B. 12.

C. -8.

D. 1.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\int_0^1 [f(x) - 2g(x)] dx = \int_0^1 f(x) dx - 2 \int_0^1 g(x) dx = 2 - 2.5 = -8$.

Câu 13. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\int_{-1}^1 |x|^3 dx = \left| \int_{-1}^1 x^3 dx \right|$. **B.** $\int_{-1}^{2018} |x^4 - x^2 + 1| dx = \int_{-1}^{2018} (x^4 - x^2 + 1) dx$.

C. $\int_{-2}^3 |e^x(x+1)| dx = \int_{-2}^3 e^x(x+1) dx$.

D. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \cos^2 x} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $x^4 - x^2 + 1 = x^4 - 2x^2 + 1 + 2x^2 = \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó: $\int_{-1}^{2018} |x^4 - x^2 + 1| dx = \int_{-1}^{2018} (x^4 - x^2 + 1) dx$.

Câu 14. Tích phân $I = \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx$ có giá trị bằng

A. $\ln 2 - 1$.

B. $-\ln 2$.

C. $\ln 2$.

D. $1 - \ln 2$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1: Ta có: $I = \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx = \int_0^1 \frac{d(x+1)}{x+1} = \ln|x+1|_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$. Chọn đáp án **C**.

Cách 2 : Sử dụng MTCT.

Câu 15. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai vec tơ $\vec{a}(1; -2; 0)$ và $\vec{b}(-2; 3; 1)$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = -8$.

B. $2\vec{a} = (2; -4; 0)$.

C. $\vec{a} + \vec{b} = (-1; 1; -1)$.

D. $|\vec{b}| = 14$.

Lời giải

$$\vec{a} + \vec{b} = (-1; 1; 1).$$

Câu 16. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{OM} = 2\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{ON} = 2\vec{j} - 3\vec{i}$. Tọa độ của vectơ \vec{MN} là:

- A.** $(-2; 1; 1)$. **B.** $(1; 1; 2)$. **C.** $(-3; 0; 1)$. **D.** $(-3; 0; -1)$.

Lời giải

Ta có : $M(0; 2; -1)$, $N(-3; 2; 0) \Rightarrow \vec{MN} = (-3; 0; 1)$.

Câu 17. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) tâm $I(2; 3; -6)$ và bán kính $R = 4$ có phương trình là

- A.** $(x+2)^2 + (y+3)^2 + (z-6)^2 = 4$. **B.** $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+6)^2 = 4$.
C. $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+6)^2 = 16$. **D.** $(x+2)^2 + (y+3)^2 + (z-6)^2 = 16$.

Lời giải

Mặt cầu (S) tâm $I(2; 3; -6)$ và bán kính $R = 4$ có phương trình là:

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+6)^2 = 16.$$

Câu 18. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(0; 6; 0)$, $B(0; 0; -2)$ và $C(-3; 0; 0)$. Phương trình mặt phẳng (P) đi qua ba điểm A, B, C là

- A.** $-2x + y - 3z + 6 = 0$. **B.** $\frac{x}{6} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{-3} = 1$. **C.** $2x - y + 3z + 6 = 0$. **D.** $\frac{x}{3} + \frac{y}{-6} + \frac{z}{2} = 1$.

Lời giải

Phương trình đoạn chắn của mặt phẳng (P) là: $\frac{x}{-3} + \frac{y}{6} + \frac{z}{-2} = 1$

$$\Leftrightarrow (P): -2x + y - 3z - 6 = 0 \Leftrightarrow (P): 2x - y + 3z + 6 = 0.$$

Câu 19. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 6; -7)$ và $B(3; 2; 1)$. Phương trình mặt phẳng trung trực đoạn AB là

- A.** $x - 2y + 4z + 2 = 0$. **B.** $x - 2y - 3z - 1 = 0$. **C.** $x - 2y + 3z + 17 = 0$. **D.** $x - 2y + 4z + 18 = 0$.

Lời giải

Mặt phẳng trung trực đoạn AB đi qua trung điểm $I(2; 4; -3)$ của đoạn AB và nhân

$\vec{AB} = (2; -4; 8)$ làm vectơ pháp tuyến có phương trình:

$$2(x-2) - 4(y-4) + 8(z+3) = 0 \Leftrightarrow x - 2y + 4z + 18 = 0.$$

Câu 20. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây nằm trên mặt phẳng $(P): 2x - y + z - 2 = 0$.

- A.** $Q(1; -2; 2)$. **B.** $N(1; -1; -1)$. **C.** $P(2; -1; -1)$. **D.** $M(1; 1; -1)$.

Lời giải

Thay tọa độ các điểm Q, N, P, M lần lượt vào phương trình $(P): 2x - y + z - 2 = 0$ ta được:

$$2.1 - (-2) + 2 - 2 = 0 \Leftrightarrow 4 = 0 \text{ (sai) nên } Q \notin (P).$$

$$2.1 - (-1) - 1 - 2 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \text{ (đúng) nên } N \in (P).$$

$$2.2 - (-1) - 1 - 2 = 0 \Leftrightarrow 2 = 0 \text{ (sai) nên } P \notin (P).$$

$$2.1-1-1-2=0 \Leftrightarrow -2=0 \text{ (sai) nên } M \notin (P).$$

Câu 21. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ và có một nguyên hàm là $F(x)$. Tìm $I = \int [2f(x) + f'(x) + 1] dx$?

A. $I = 2F(x) + xf'(x) + C$.

B. $I = 2xF(x) + x + 1$

C. $I = 2xF(x) + f(x) + x + C$.

D. $I = 2F(x) + f(x) + x + C$.

Lời giải

Chọn D

$$\begin{aligned} I &= \int [2f(x) + f'(x) + 1] dx \\ &= \int 2f(x) dx + \int f'(x) dx + \int 1 dx \\ &= 2F(x) + f(x) + x + C \end{aligned}$$

$$I = \int [2f(x) + f'(x) + 1] dx = 2F(x) + f(x) + x + C$$

Câu 22. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{2x-1}$. Biết $F(1) = 2$. Giá trị của $F(2)$ là

A. $F(2) = \frac{1}{2} \ln 3 + 2$. **B.** $F(2) = \ln 3 + 2$.

C. $F(2) = \frac{1}{2} \ln 3 - 2$. **D.** $F(2) = 2 \ln 3 - 2$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } F(x) = \int \frac{1}{2x-1} dx = \frac{1}{2} \ln |2x-1| + C.$$

$$\text{Theo đề: } F(1) = 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \ln |1| + C = 2 \Leftrightarrow C = 2$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{2} \ln |2x-1| + 2 \Rightarrow F(2) = \frac{1}{2} \ln 3 + 2.$$

Câu 23. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x) = \frac{1}{2x+1}$; biết $F(0) = 2$. Tính $F(1)$.

A. $F(1) = \frac{1}{2} \ln 3 - 2$.

B. $F(1) = \ln 3 + 2$.

C. $F(1) = 2 \ln 3 - 2$.

D. $F(1) = \frac{1}{2} \ln 3 + 2$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } F(x) = \int \frac{1}{2x+1} dx = \frac{1}{2} \ln |2x+1| + C$$

$$\text{Do } F(0) = 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \ln |2 \cdot 0 + 1| + C = 2 \Rightarrow C = 2$$

Vậy $F(x) = \frac{1}{2} \ln |2x + 1| + 2 \Rightarrow F(1) = \frac{1}{2} \ln 3 + 2.$

Câu 24. Cho hàm số $y = F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y = x^2$. Biểu thức $F'(25)$ bằng:

- A. 125. **B. 625.** C. 5. D. 25.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của $f(x)$ trên K nếu $F'(x) = f(x), \forall x \in K$

Mà $y = F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y = x^2$ nên $F'(x) = x^2$

Vậy $F'(25) = 25^2 = 625.$

Câu 25. Công thức nào sau đây là sai?

- A. $\int \ln x dx = \frac{1}{x} + C.$** B. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C.$
 C. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$ D. $\int e^x dx = e^x + C.$

Lời giải

Chọn A

Xét $I = \int \ln x dx$

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = x \end{cases}$

Khi đó $I = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x$

Vậy công thức A sai.

Câu 26. Có bao nhiêu giá trị thực của a để có $\int_0^a (2x + 5) dx = a - 4$

- A. 1.** B. 0. C. 2. D. Vô số.

Lời giải

Ta có $\int_0^a (2x + 5) dx = a - 4 \Leftrightarrow (x^2 + 5x) \Big|_0^a = a - 4 \Leftrightarrow a^2 + 4a + 4 = 0 \Leftrightarrow a = -2$

Câu 27. Tích phân $I = \int_0^1 e^{x+1} dx$ bằng

- A. $e^2 - 1.$** **B. $e^2 - e.$** C. $e^2 + e.$ D. $e - e^2.$

Lời giải

Ta có $I = \int_0^1 e^{x+1} dx = e^{x+1} \Big|_0^1 = e^2 - e.$

Câu 28. Cho hàm số $f(x) = x^4 - 4x^3 + 2x^2 - x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính $\int_0^1 f^2(x) \cdot f'(x) dx$

- A. $\frac{2}{3}.$** B. 2. **C. $-\frac{2}{3}.$** D. -2.

Lời giải

Ta có $\int_0^1 f^2(x) \cdot f'(x) dx = \int_0^1 f^2(x) \cdot d[f(x)] = \frac{f^3(x)}{3} \Big|_0^1 = \frac{f^3(1) - f^3(0)}{3} = -\frac{2}{3}$.

Câu 29. Cho tích phân $I = \int_0^3 \frac{x}{1+\sqrt{x+1}} dx$ nếu đặt $t = \sqrt{x+1}$ thì I là

A. $I = \int_1^2 (2t^2 - t) dt$. **B.** $I = \int_1^2 (2t^2 + 2t) dt$. **C.** $I = \int_1^2 (2t^2 - 2t) dt$. **D.** $I = \int_1^2 (t^2 - 2t) dt$.

Lời giải

Đặt $t = \sqrt{x+1} \Rightarrow t^2 = x+1 \Leftrightarrow x = t^2 - 1 \Rightarrow dx = 2t dt$.

Đổi cận: Khi $x = 0$ thì $t = 1$; khi $x = 3$ thì $t = 2$.

$$I = \int_0^3 \frac{x}{1+\sqrt{x+1}} dx = \int_1^2 \frac{t^2-1}{1+t} 2t dt = \int_1^2 2t(t-1) dt = \int_1^2 (2t^2 - t) dt.$$

Câu 30. Tích phân $\int_0^2 2e^{2x} dx$ bằng

A. e^4 . **B.** $e^4 - 1$. **C.** $4e^4$. **D.** $3e^4 - 1$.

Lời giải

Ta có $I = \int_0^2 2e^{2x} dx = \int_0^2 e^{2x} d2x = e^{2x} \Big|_0^2 = e^4 - 1$.

Câu 31. Cho $\int_3^8 f(x+1) dx = 10$. Tính $J = \int_0^1 f(5x+4) dx$

A. $J = 4$. **B.** $J = 10$. **C.** $J = 32$. **D.** $J = 2$.

Lời giải

Đặt $t = x+1$. Đổi cận: $x = 3 \Rightarrow t = 4$; $x = 8 \Rightarrow t = 9$. Khi đó ta có $\int_4^9 f(t) dt = 10$.

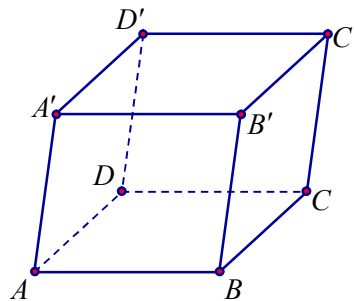
Đặt $u = 5x+4$. Đổi cận $x = 0 \Rightarrow u = 4$; $x = 1 \Rightarrow u = 9$. Khi đó ta có

$$J = \int_0^1 f(5x+4) dx = \int_4^9 f(u) du = 10.$$

Câu 32. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0; 0; 0)$, $B(3; 0; 0)$, $D(0; 3; 0)$, $D'(0; 3; -3)$. Tọa độ trọng tâm tam giác $A'B'C$ là

A. $(1; 1; -2)$. **B.** $(2; 1; -2)$. **C.** $(1; 2; -1)$. **D.** $(2; 1; -1)$.

Lời giải



Cách 1: Ta có $\overline{AB} = (3; 0; 0)$. Gọi $C(x; y; z) \Rightarrow \overline{DC} = (x; y-3; z)$

$ABCD$ là hình bình hành $\Rightarrow \overline{AB} = \overline{DC} \Rightarrow (x; y; z) = (3; 3; 0) \Rightarrow C(3; 3; 0)$

Ta có $\overline{AD} = (0; 3; 0)$. Gọi $A'(x'; y'; z') \Rightarrow \overline{A'D'} = (-x'; 3-y'; -3-z')$

$ADD'A'$ là hình bình hành $\Rightarrow \overline{AD} = \overline{A'D'} \Rightarrow (x'; y'; z') = (0; 0; -3) \Rightarrow A'(0; 0; -3)$

Gọi $B'(x_0; y_0; z_0) \Rightarrow \overline{A'B'} = (x_0; y_0; z_0 + 3)$

$ABB'A'$ là hình bình hành $\Rightarrow \overline{AB} = \overline{A'B'} \Rightarrow (x_0; y_0; z_0) = (3; 0; -3) \Rightarrow B'(3; 0; -3)$

$$G \text{ là trọng tâm tam giác } ABC \Rightarrow \begin{cases} x_G = \frac{0+3+3}{3} = 2 \\ y_G = \frac{0+0+3}{3} = 1 \\ z_G = \frac{-3-3+0}{3} = -2 \end{cases} \Rightarrow G(2; 1; -2).$$

Cách 2: Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng BD' . Ta có $I\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{3}{2}\right)$. Gọi $G(a; b; c)$ là trọng tâm tam giác $A'B'C$

$$\text{Ta có: } \overline{DI} = 3\overline{IG} \text{ với } \begin{cases} \overline{DI} = \left(\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}\right) \\ \overline{IG} = \left(a - \frac{3}{2}; b - \frac{3}{2}; c + \frac{3}{2}\right) \end{cases}. \text{ Do đó: } \begin{cases} \frac{3}{2} = 3\left(a - \frac{3}{2}\right) \\ -\frac{3}{2} = 3\left(b - \frac{3}{2}\right) \\ -\frac{3}{2} = 3\left(c + \frac{3}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = -2 \end{cases}.$$

Vậy $G(2; 1; -2)$.

Câu 33. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 2; -4)$, $B(1; -3; 1)$, $C(2; 2; 3)$. Tính đường kính l của mặt cầu (S) đi qua ba điểm trên và có tâm nằm trên mặt phẳng (Oxy) .

- A.** $l = 2\sqrt{13}$. **B.** $l = 2\sqrt{41}$. **C.** $l = 2\sqrt{26}$. **D.** $l = 2\sqrt{11}$.

Lời giải

Gọi tâm mặt cầu là $I(x; y; 0)$.

$$\begin{cases} IA = IB \\ IA = IC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + 4^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y+3)^2 + 1^2} \\ \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + 4^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2 + 3^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (y-2)^2 + 4^2 = (y+3)^2 + 1^2 \\ x^2 - 2x + 1 + 16 = x^2 - 4x + 4 + 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10y = 10 \\ 2x = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow l = 2R = 2\sqrt{(-3)^2 + (-1)^2 + 4^2} = 2\sqrt{26}.$$

Câu 34. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình $x - 2y - 2z - 5 = 0$ và mặt cầu (S) có phương trình $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 4$. Tìm phương trình mặt phẳng song song với mặt phẳng (P) và đồng thời tiếp xúc với mặt cầu (S) .

- A.** $x - 2y - 2z + 1 = 0$. **B.** $-x + 2y + 2z + 5 = 0$.

C. $x - 2y - 2z - 23 = 0$. D. $-x + 2y + 2z + 17 = 0$.

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; -2; -3)$ và bán kính $R = 2$.

Gọi (Q) là mặt phẳng song song với mặt phẳng (P) và đồng thời tiếp xúc với mặt cầu (S).

Phương trình (Q) có dạng: $x - 2y - 2z + D = 0$ ($D \neq -5$).

$$(Q) \text{ tiếp xúc với } (S) \text{ khi và chỉ khi } d(I, (Q)) = R \Leftrightarrow \frac{|1 - 2 \cdot (-2) - 2 \cdot (-3) + D|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = 2$$

$$\Leftrightarrow |D + 11| = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} D + 11 = 6 \\ D + 11 = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D = -5 \\ D = -17 \end{cases}$$

Đối chiếu điều kiện suy ra $D = -17$.

Vậy phương trình của (Q) là $x - 2y - 2z - 17 = 0 \Leftrightarrow -x + 2y + 2z + 17 = 0$.

Câu 35. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng (P), (Q) lần lượt có phương trình là $x + y - z = 0$, $x - 2y + 3z = 4$ và cho điểm $M(1; -2; 5)$. Tìm phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm M đồng thời vuông góc với hai mặt phẳng (P) và (Q).

A. $5x + 2y - z + 14 = 0$. B. $x - 4y - 3z + 6 = 0$. C. $x - 4y - 3z - 6 = 0$. D. $5x + 2y - z + 4 = 0$.

Lời giải

(P) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_p = (1; 1; -1)$, (Q) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_q = (1; -2; 3)$.

(α) vuông góc với (P) và (Q) nên có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = [\vec{n}_p, \vec{n}_q] = (1; -4; -3)$.

(α) đi qua điểm $M(1; -2; 5)$ đồng thời vuông góc với hai mặt phẳng (P) và (Q) sẽ có phương trình là $x - 1 - 4(y + 2) - 3(z - 5) = 0 \Leftrightarrow x - 4y - 3z + 6 = 0$.

Tự luận

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên \mathbb{R} thỏa mãn

$$5f(x) - 7f(1-x) = 3(x^2 - 2x), \forall x \in \mathbb{R}, \text{ Tính tích phân } I = \int_0^1 x \cdot f'(x) dx$$

Lời giải

Ta có : $5f(x) - 7f(1-x) = 3(x^2 - 2x)$. (1)

Thay x bằng $1-x$, ta được : $5f(1-x) - 7f(x) = 3(x^2 - 1)$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra : $-24f(x) = 36x^2 - 30x - 21 \Leftrightarrow f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{4}x + \frac{7}{8}$.

$$I = \int_0^1 x \cdot f'(x) dx = \int_0^1 x \cdot \left(-3x + \frac{5}{4}\right) dx = -\frac{3}{8}$$

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương thỏa mãn $f'(x) = \frac{2f(x)}{x} + 2x^3, \forall x \in (0; +\infty)$ và

$$\int_2^3 \frac{x^5}{f^2(x)} dx = \frac{1}{20}. \text{ Tìm giá trị của biểu thức } f(2) + f(3)$$

Lời giải

Với $x \in (0; +\infty)$:

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{2f(x)}{x} + 2x^3 \Leftrightarrow \frac{x^2 f'(x) - 2xf(x)}{x^4} = 2x \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x^2}\right)' = 2x$$

$$\Rightarrow \frac{f(x)}{x^2} = x^2 + C \Leftrightarrow f(x) = x^2(x^2 + C).$$

$$\Leftrightarrow f^2(x) = x^4(x^2 + C)^2.$$

$$\text{Khi đó } \int_2^3 \frac{x^5}{f^2(x)} dx = \frac{1}{20} \Leftrightarrow \int_2^3 \frac{x}{(x^2 + C)^2} dx = \frac{1}{20} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \int_2^3 \frac{d(x^2 + C)}{(x^2 + C)^2} = \frac{1}{20} \Leftrightarrow \int_2^3 \frac{d(x^2 + C)}{(x^2 + C)^2} = \frac{1}{10}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{x^2 + C} \Big|_2^3 = \frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{1}{4 + C} - \frac{1}{9 + C} = \frac{1}{10} \Leftrightarrow C^2 + 13C - 14 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} C = 1 \\ C = -14 \end{cases}.$$

$$+ \text{ Với } C = -14 \Rightarrow f(x) = x^2(x^2 - 14).$$

Chọn $x = 1 \in (0; +\infty)$ ta được $f(1) = -13 < 0$ (vô lý vì $f(x)$ là hàm số dương).

+ Với $C = 1 \Rightarrow f(x) = x^2(x^2 + 1)$ là hàm số dương.

$$\text{Khi đó } f(2) + f(3) = 110.$$

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{1}{x^2 + x - 2}$, $f(-3) - f(3) = 0$ và $f(0) = \frac{1}{3}$. Tìm giá trị của biểu thức $f(-4) + f(-1) - f(4)$

Lời giải

$$f(x) = \int \frac{1}{x^2 + x - 2} dx = \begin{cases} \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + C_1, \forall x \in (-\infty; -2) \\ \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + C_2, \forall x \in (-2; 1) \\ \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + C_3, \forall x \in (1; +\infty) \end{cases}.$$

$$\text{Ta có } f(-3) = \frac{1}{3} \ln 4 + C_1, \forall x \in (-\infty; -2), f(0) = \frac{1}{3} \ln \frac{1}{2} + C_2, \forall x \in (-2; 1),$$

$$f(3) = \frac{1}{3} \ln \frac{2}{5} + C_3, \forall x \in (1; +\infty),$$

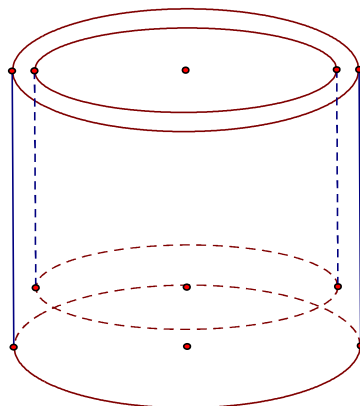
$$\text{Theo giả thiết ta có } f(0) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow C_2 = \frac{1}{3}(1 + \ln 2).$$

$$\Rightarrow f(-1) = \frac{2}{3} \ln 2 + \frac{1}{3}.$$

$$\text{Và } f(-3) - f(3) = 0 \Leftrightarrow C_1 - C_3 = \frac{1}{3} \ln \frac{1}{10}.$$

$$\text{Vậy } f(-4) + f(-1) - f(4) = \frac{1}{3} \ln \frac{5}{2} + C_1 + \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{1}{3} \ln 2 - C_2 = \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{1}{3}.$$

Câu 4. Để làm một chiếc cốc bằng thủy tinh dạng hình trụ với đáy cốc dày 1,5 cm, thành xung quanh cốc dày 0,2 cm và có thể tích thật (thể tích nó đựng được) là $480\pi \text{ cm}^3$ thì người ta cần ít nhất bao nhiêu cm^3 thủy tinh?



Lời giải

Gọi bán kính và chiều cao hình trụ bên trong lần lượt là r, h ta có: $y \Rightarrow h = \frac{480}{r^2}$.

Thể tích hình trụ bên ngoài là: $V = \pi(r+0,2)^2 \cdot (h+1,5) = \pi(r+0,2)^2 \cdot \left(\frac{480}{r^2} + 1,5\right)$.

Thể tích thủy tinh là: $\pi(r+0,2)^2 \cdot \left(\frac{480}{r^2} + 1,5\right) - 480\pi$.

Xét $f(r) = \pi(r+0,2)^2 \cdot \left(\frac{480}{r^2} + 1,5\right), r > 0$.

$$\Rightarrow f'(r) = 2\pi(r+0,2) \left(\frac{480}{r^2} + 1,5\right) + \pi(r+0,2)^2 \cdot \left(-\frac{960}{r^3}\right)$$

$$f'(r) = 0 \Leftrightarrow 2 \left(\frac{480}{r^2} + 1,5\right) = (r+0,2) \cdot \frac{960}{r^3} \Leftrightarrow 3 = \frac{192}{r^3} \Leftrightarrow r = 4.$$

r	0	4	$+\infty$
$f'(r)$		-	0 +
$f(r)$	$+\infty$		$+\infty$
		$\frac{27783}{50} \pi$	

Vậy thể tích thủy tinh người ta cần ít nhất là $\frac{27783}{50} \pi - 480\pi \approx 75,66\pi \text{ (cm}^3\text{)}$.

Trắc nghiệm

Câu 1. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3^x$.

- A. $\int 3^x dx = 3^x + C$. B. $\int 3^x dx = \frac{3^x}{\ln 3} + C$. C. $\int 3^x dx = 3^x \ln 3 + C$. D. $\int 3^x dx = \frac{3^{x+1}}{x+1} + C$.

Câu 2. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. $\int \sin x dx = \cos x + C$. B. $\int \frac{1}{x} dx = -\frac{1}{x^2} + C$. C. $\int e^x dx = e^x + C$. D. $\int \ln x dx = \frac{1}{x} + C$.

Câu 3. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + 1$.

- A. $\int (2x + 1) dx = \frac{x^2}{2} + x + C$. B. $\int (2x + 1) dx = x^2 + x + C$.
 C. $\int (2x + 1) dx = 2x^2 + 1 + C$. D. $\int (2x + 1) dx = x^2 + C$.

Câu 4. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

- A. $\int e^x dx = e^x + C$. B. $\int 0 dx = C$. C. $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$. D. $\int dx = x + C$.

Câu 5. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + 2x + 5$ là:

- A. $F(x) = x^3 + x^2 + 5$. B. $F(x) = x^3 + x + C$.
 C. $F(x) = x^3 + x^2 + 5x + C$. D. $F(x) = x^3 + x^2 + C$.

Câu 6. Họ nguyên hàm của hàm số $y = \cos 3x$ là

- A. $\frac{\sin 3x}{3} + C$ (C là hằng số). B. $-\frac{\sin 3x}{3} + C$ (C là hằng số).
 C. $\sin 3x + C$ (C là hằng số). D. $-\sin 3x + C$ (C là hằng số).

Câu 7. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 \cdot e^{x^3+1}$.

- A. $\int f(x) dx = e^{x^3+1} + C$. B. $\int f(x) dx = 3e^{x^3+1} + C$.
 C. $\int f(x) dx = \frac{1}{3}e^{x^3+1} + C$. D. $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} \cdot e^{x^3+1} + C$.

Câu 8. Tính tích phân $I = \int_0^2 (2x + 1) dx$

- A. $I = 5$. B. $I = 6$. C. $I = 2$. D. $I = 4$.

Câu 9. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} thỏa mãn $\int_0^6 f(x) dx = 7, \int_3^{10} f(x) dx = 8, \int_3^6 f(x) dx = 9$. Giá trị của

$I = \int_0^{10} f(x) dx$ bằng

- A. $I = 5$. B. $I = 6$. C. $I = 7$. D. $I = 8$.

Câu 10. Giá trị của $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ bằng

- A. 0. B. 1. C. -1. D. $\frac{\pi}{2}$.

Câu 11. Giá trị của $\int_0^3 dx$ bằng

- A. 3. B. 2. C. 0. D. 1.

Câu 12. Cho $f(x), g(x)$ là hai hàm số liên tục trên \mathbb{R} . Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau?

- A. $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(y) dy$.
 B. $\int_a^b (f(x) - g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$.
 C. $\int_a^a f(x) dx = 0$.
 D. $\int_a^b (f(x)g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b g(x) dx$.

Câu 13. Cho hàm số f liên tục trên đoạn $[0; 6]$. Nếu $\int_1^5 f(x) dx = 2$ và $\int_1^3 f(x) dx = 7$ thì $\int_3^5 f(x) dx$ có giá trị bằng

- A. 5. B. -5. C. 9. D. -9.

Câu 14. Cho $\int_{-2}^2 f(x) dx = 1$, $\int_{-2}^4 f(x) dx = -4$. Tính $I = \int_2^4 f(x) dx$.

- A. $I = 5$. B. $I = -5$. C. $I = -3$. D. $I = 3$.

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1; 2; 3)$. Hình chiếu vuông góc của M trên (Oxz) là điểm nào sau đây.

- A. $K(0; 2; 3)$. B. $H(1; 2; 0)$. C. $F(0; 2; 0)$. D. $E(1; 0; 3)$.

Câu 16. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = (-5; 2; 3)$ và $\vec{b} = (1; -3; 2)$. Tìm tọa độ của vectơ $\vec{u} = \frac{1}{3}\vec{a} - \frac{3}{4}\vec{b}$.

- A. $\vec{u} = \left(-\frac{11}{12}; \frac{35}{12}; \frac{5}{2}\right)$. B. $\vec{u} = \left(-\frac{11}{12}; -\frac{19}{12}; \frac{5}{2}\right)$.
 C. $\vec{u} = \left(-\frac{29}{12}; \frac{35}{12}; -\frac{1}{2}\right)$. D. $\vec{u} = \left(-\frac{29}{12}; -\frac{19}{12}; -\frac{1}{2}\right)$.

Câu 17. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 4$. Tâm I của mặt cầu (S) là

- A. $I(2; 1; -1)$. B. $I(2; 0; -1)$. C. $I(-2; 0; 1)$. D. $I(-2; 1; 1)$.

Câu 18. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng qua $A(1; 2; -1)$ có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}(2; 0; 0)$ có phương trình là

- A. $y + z = 0$. B. $y + z - 1 = 0$. C. $x - 1 = 0$. D. $2x - 1 = 0$.

Câu 19. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có vector pháp tuyến là $\vec{n} = (2; -1; 1)$. Vector nào sau đây cũng là vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) ?

- A. $(4; -2; 2)$. B. $(-4; 2; 3)$. C. $(4; 2; -2)$. D. $(-2; 1; 1)$.

Câu 20. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - y + 3z - 2 = 0$. Điểm nào sau đây thuộc mặt phẳng (P)

- A. $P(1; 1; 0)$. B. $M(1; 0; 1)$. C. $N(0; 1; 1)$. D. $Q(1; 1; 1)$.

Câu 21. Biết $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (2x^2 - 5x + 2)e^{-x}$ trên \mathbb{R} . Giá trị của biểu thức $f(F(0))$ bằng

- A. $9e$. B. $3e$. C. $20e^2$. D. $-\frac{1}{e}$.

Câu 22. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x \left(2017 - \frac{2018e^{-x}}{x^5} \right)$.

A. $\int f(x) dx = 2017e^x - \frac{2018}{x^4} + C$.

B. $\int f(x) dx = 2017e^x + \frac{2018}{x^4} + C$.

C. $\int f(x) dx = 2017e^x + \frac{504,5}{x^4} + C$.

D. $\int f(x) dx = 2017e^x - \frac{504,5}{x^4} + C$.

Câu 23. Nếu hàm số $y = \sin x$ là một nguyên hàm của hàm số $y = f(x)$ thì

- A. $f(x) = -\cos x$. B. $f(x) = \sin x$. C. $f(x) = \cos x$. D. $f(x) = -\sin x$.

Câu 24. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 1 + 2^x \ln 2$. Biết $F(1) = 10$, tính $F(0)$.

- A. $F(0) = 8$
 B. $F(0) = 7$
 C. $F(0) = 6$
 D. $F(0) = 9$.

Câu 25. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{x} \ln x$.

A. $\int f(x) dx = \frac{1}{9} x^{\frac{3}{2}} (3 \ln x - 2) + C$.

B. $\int f(x) dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} (3 \ln x - 2) + C$.

C. $\int f(x) dx = \frac{2}{9} x^{\frac{3}{2}} (3 \ln x - 1) + C$.

D. $\int f(x) dx = \frac{2}{9} x^{\frac{3}{2}} (3 \ln x - 2) + C$.

Câu 26. Tính $I = \int_0^1 \left(\frac{1}{2x+1} + 3\sqrt{x} \right) dx$.

- A. $2 + \ln \sqrt{3}$. B. $4 + \ln 3$. C. $2 + \ln 3$. D. $1 + \ln \sqrt{3}$.

Câu 27. Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x+1} & \text{khi } 0 \leq x \leq 1 \\ 2x-1 & \text{khi } 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$. Tính tích phân $\int_0^3 f(x) dx$.

- A. $6 + \ln 4$. B. $4 + \ln 4$. C. $6 + \ln 2$. D. $2 + 2 \ln 2$.

Câu 28. Xác định số thực dương m để tích phân $\int_0^m (x-x^2) dx$ có giá trị lớn nhất.

- A. $m = 1$. B. $m = 2$. C. $m = 3$. D. $m = 4$

Câu 29. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[2;3]$ thỏa mãn $\int_2^3 f(x) dx = 2018$. Tính $\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} xf(x^2) dx$.

- A. $I = 2018^2$. B. $I = 1009$. C. $I = 4036$. D. $I = \sqrt{2018}$.

Câu 30. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1) = 5$, $\int_0^1 f(x) dx = 12$. Tính

$$J = \int_0^1 xf'(x) dx.$$

- A. $J = -17$. B. $J = 17$. C. $J = 7$. D. $J = -7$.

Câu 31. Cho $\int_0^3 \frac{x}{4+2\sqrt{x+1}} dx = \frac{a}{3} + b \ln 2 + c \ln 3$ với a, b, c là các số nguyên. Giá trị của $a+b+c$ bằng

- A. 1. B. 2. C. 7. D. 9.

Câu 32. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2;0;0), B(0;2;0), C(0;0;2)$ và $D(2;2;2)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD . Tọa độ trung điểm I của MN là:

- A. $I(1; -1; 2)$. B. $I(1; 1; 0)$. C. $I\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1\right)$. D. $I(1; 1; 1)$.

Câu 33. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu tâm $I(1;2;3)$ và đi qua điểm $A(1;1;2)$ có phương trình là

- A. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = \sqrt{2}$. B. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = \sqrt{2}$.
C. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 2$. D. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 2$.

Câu 34. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(1; -3; 2)$ và chứa trục Oz . Gọi $\vec{n} = (a; b; c)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) . Tính $M = \frac{b+c}{a}$.

- A. $M = -\frac{1}{3}$. B. $M = 3$. C. $M = \frac{1}{3}$. D. $M = -3$.

Câu 35. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng đi qua ba điểm $A(2; 3; 5), B(3; 2; 4)$ và $C(4; 1; 2)$ có phương trình là

- A. $x + y + 5 = 0$. B. $x + y - 5 = 0$. C. $y - z + 2 = 0$. D. $2x + y - 7 = 0$.

Tự luận

Câu 1. Tính $\int_5^{10} \frac{\sqrt{x-1}}{x-2} dx$

- Câu 2.** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} thỏa mãn: $3f(x) + f(2-x) = 2(x-1)e^{x^2-2x+1} + 4, \forall x \in \mathbb{R}$.
Tính giá trị của tích phân $I = \int_0^2 f(x)dx$.
- Câu 3.** Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \tan^5 x$.
- Câu 4.** Người ta làm chiếc thùng phi dạng hình trụ, kín hai đáy, với thể tích theo yêu cầu là $2\pi m^3$. Hỏi bán kính đáy R và chiều cao h của thùng phi bằng bao nhiêu để khi làm thì tiết kiệm vật liệu nhất?

Nguyễn Bảo Vương

Trắc nghiệm

BẢNG ĐÁP ÁN

1.B	2.C	3.B	4.C	5.C	6.A	7.C	8.B	9.B	10.B
11.A	12.D	13.B	14.B	15.D	16.C	17.B	18.C	19.A	20.C
21.A	22.C	23.C	24.A	25.D	26.A	27.A	28.A	29.B	30.D
31.A	32.D	33.D	34.C	35.B					

Câu 1. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3^x$.

- A. $\int 3^x dx = 3^x + C$. B. $\int 3^x dx = \frac{3^x}{\ln 3} + C$. C. $\int 3^x dx = 3^x \ln 3 + C$. D. $\int 3^x dx = \frac{3^{x+1}}{x+1} + C$.

Lời giải

Chọn $\int 3^x dx = \frac{3^x}{\ln 3} + C$

Câu 2. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. $\int \sin x dx = \cos x + C$. B. $\int \frac{1}{x} dx = -\frac{1}{x^2} + C$. C. $\int e^x dx = e^x + C$. D. $\int \ln x dx = \frac{1}{x} + C$.

Lời giải

A sai vì $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

B sai vì $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$.

C đúng vì $\int e^x dx = e^x + C$.

D sai vì $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

Câu 3. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + 1$.

- A. $\int (2x + 1) dx = \frac{x^2}{2} + x + C$. B. $\int (2x + 1) dx = x^2 + x + C$.
 C. $\int (2x + 1) dx = 2x^2 + 1 + C$. D. $\int (2x + 1) dx = x^2 + C$.

Lời giải

$\int (2x + 1) dx = x^2 + x + C$.

Câu 4. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

- A. $\int e^x dx = e^x + C$. B. $\int 0 dx = C$. C. $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$. D. $\int dx = x + C$.

Lời giải

Khẳng định C sai do $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$.

Câu 5. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + 2x + 5$ là:

- A. $F(x) = x^3 + x^2 + 5$. B. $F(x) = x^3 + x + C$.
 C. $F(x) = x^3 + x^2 + 5x + C$. D. $F(x) = x^3 + x^2 + C$.

Lời giải

Nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + 2x + 5$ là $F(x) = x^3 + x^2 + 5x + C$.

Câu 6. Họ nguyên hàm của hàm số $y = \cos 3x$ là

- A. $\frac{\sin 3x}{3} + C$ (C là hằng số). B. $-\frac{\sin 3x}{3} + C$ (C là hằng số).
 C. $\sin 3x + C$ (C là hằng số). D. $-\sin 3x + C$ (C là hằng số).

Lời giải

Ta có $\int \cos 3x dx = \frac{1}{3} \int \cos 3x d(3x) = \frac{1}{3} \sin 3x + C$.

Câu 7. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 \cdot e^{x^3+1}$.

- A. $\int f(x) dx = e^{x^3+1} + C$. B. $\int f(x) dx = 3e^{x^3+1} + C$.
 C. $\int f(x) dx = \frac{1}{3} e^{x^3+1} + C$. D. $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} \cdot e^{x^3+1} + C$.

Lời giải

Chọn C

$\int f(x) dx = \int x^2 \cdot e^{x^3+1} dx = \frac{1}{3} \int e^{x^3+1} d(x^3+1) = \frac{1}{3} e^{x^3+1} + C$.

Câu 8. Tính tích phân $I = \int_0^2 (2x + 1) dx$

- A. $I = 5$. B. $I = 6$. C. $I = 2$. D. $I = 4$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $I = \int_0^2 (2x + 1) dx = (x^2 + x) \Big|_0^2 = 4 + 2 = 6$.

Câu 9. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} thỏa mãn $\int_0^6 f(x) dx = 7$, $\int_3^{10} f(x) dx = 8$, $\int_3^6 f(x) dx = 9$. Giá trị của

$I = \int_0^{10} f(x) dx$ bằng

- A. $I = 5$. B. $I = 6$. C. $I = 7$. D. $I = 8$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\int_3^{10} f(x) dx = \int_3^6 f(x) dx + \int_6^{10} f(x) dx \Leftrightarrow \int_3^{10} f(x) dx = \int_3^6 f(x) dx + \int_6^{10} f(x) dx = 9 - 7 = 2$.

Khi đó: $I = \int_0^{10} f(x) dx = \int_0^6 f(x) dx + \int_6^{10} f(x) dx = 7 + 2 = 9$.

Vậy $I = 6$.

Câu 10. Giá trị của $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ bằng

- A. 0. **B. 1.** C. -1. D. $\frac{\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn B

+ Tính được $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$.

Câu 11. Giá trị của $\int_0^3 dx$ bằng

- A. 3.** B. 2. C. 0. D. 1.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int_0^3 dx = x \Big|_0^3 = 3 - 0 = 3$.

Câu 12. Cho $f(x), g(x)$ là hai hàm số liên tục trên \mathbb{R} . Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau?

- A. $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(y) dy$.
- B. $\int_a^b (f(x) - g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$.
- C. $\int_a^a f(x) dx = 0$.
- D. $\int_a^b (f(x)g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b g(x) dx$.**

Lời giải

Chọn D

Theo các tính chất về tích phân thì tính chất $\int_a^b (f(x)g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b g(x) dx$ sai

Câu 13. Cho hàm số f liên tục trên đoạn $[0; 6]$. Nếu $\int_1^5 f(x) dx = 2$ và $\int_1^3 f(x) dx = 7$ thì $\int_3^5 f(x) dx$ có giá trị bằng

- A. 5. **B. -5.** C. 9. D. -9.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\int_1^3 f(x) dx + \int_3^5 f(x) dx = \int_1^5 f(x) dx \Leftrightarrow 7 + \int_3^5 f(x) dx = 2 \Rightarrow \int_3^5 f(x) dx = -5$.

Câu 14. Cho $\int_{-2}^2 f(x) dx = 1$, $\int_{-2}^4 f(x) dx = -4$. Tính $I = \int_2^4 f(x) dx$.

- A. $I = 5$. **B. $I = -5$.** C. $I = -3$. D. $I = 3$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\int_{-2}^4 f(x) dx = \int_{-2}^2 f(x) dx + \int_2^4 f(x) dx \Rightarrow \int_2^4 f(x) dx = -4 - 1 = -5$

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;3)$. Hình chiếu vuông góc của M trên (Oxz) là điểm nào sau đây.

- A.** $K(0;2;3)$. **B.** $H(1;2;0)$. **C.** $F(0;2;0)$. **D.** $E(1;0;3)$.

Lời giải

Hình chiếu vuông góc của $M(1;2;3)$ trên (Oxz) là điểm $E(1;0;3)$.

Câu 16. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = (-5; 2; 3)$ và $\vec{b} = (1; -3; 2)$. Tìm tọa độ của vectơ $\vec{u} = \frac{1}{3}\vec{a} - \frac{3}{4}\vec{b}$.

- A.** $\vec{u} = \left(-\frac{11}{12}; \frac{35}{12}; \frac{5}{2}\right)$. **B.** $\vec{u} = \left(-\frac{11}{12}; -\frac{19}{12}; \frac{5}{2}\right)$.
C. $\vec{u} = \left(-\frac{29}{12}; \frac{35}{12}; -\frac{1}{2}\right)$. **D.** $\vec{u} = \left(-\frac{29}{12}; -\frac{19}{12}; -\frac{1}{2}\right)$.

Lời giải

Ta có: $\frac{1}{3}\vec{a} = \left(-\frac{5}{3}; \frac{2}{3}; 1\right)$; $-\frac{3}{4}\vec{b} = \left(-\frac{3}{4}; \frac{9}{4}; -\frac{3}{2}\right)$ suy ra: $\vec{u} = \frac{1}{3}\vec{a} - \frac{3}{4}\vec{b} = \left(-\frac{29}{12}; \frac{35}{12}; -\frac{1}{2}\right)$.

Câu 17. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 4$. Tâm I của mặt cầu (S) là

- A.** $I(2;1;-1)$. **B.** $I(2;0;-1)$. **C.** $I(-2;0;1)$. **D.** $I(-2;1;1)$.

Lời giải

Tâm của mặt cầu (S) là $I(2;0;-1)$.

Câu 18. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng qua $A(1;2;-1)$ có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}(2;0;0)$ có phương trình là

- A.** $y+z=0$. **B.** $y+z-1=0$. **C.** $x-1=0$. **D.** $2x-1=0$.

Lời giải

Phương trình mặt phẳng: $2(x-1)=0 \Leftrightarrow x-1=0$.

Câu 19. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (2;-1;1)$. Vectơ nào sau đây cũng là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) ?

- A.** $(4;-2;2)$. **B.** $(-4;2;3)$. **C.** $(4;2;-2)$. **D.** $(-2;1;1)$.

Lời giải

Vì $\vec{x} = (4;-2;2) = 2(2;-1;1) = 2\vec{n}$ nên đây cũng là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) .

Câu 20. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - y + 3z - 2 = 0$. Điểm nào sau đây thuộc mặt phẳng (P)

- A. $P(1;1;0)$. B. $M(1;0;1)$. C. $N(0;1;1)$. D. $Q(1;1;1)$.

Lời giải

Thay tọa độ điểm $N(0;1;1)$ vào mặt phẳng $(P) \Rightarrow N \in (P)$.

Câu 21. Biết $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (2x^2 - 5x + 2)e^{-x}$ trên \mathbb{R} . Giá trị của biểu thức $f(F(0))$ bằng

- A. $9e$. B. $3e$. C. $20e^2$. D. $-\frac{1}{e}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $f(x) = F'(x) = (2ax + b)e^{-x} - (ax^2 + bx + c)e^{-x} = [-ax^2 + (2a - b)x + (b - c)]e^{-x}$.

Đồng nhất với $f(x)$ ta được

$$\begin{cases} -a = 2 \\ 2a - b = -5 \\ b - c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \\ c = -1 \end{cases}. \text{ Do đó } F(x) = (-2x^2 + x - 1)e^{-x} \Rightarrow F(0) = -1.$$

Vậy $f(F(0)) = f(-1) = 9e$.

Câu 22. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x \left(2017 - \frac{2018e^{-x}}{x^5} \right)$.

- A. $\int f(x) dx = 2017e^x - \frac{2018}{x^4} + C$.
 B. $\int f(x) dx = 2017e^x + \frac{2018}{x^4} + C$.
 C. $\int f(x) dx = 2017e^x + \frac{504,5}{x^4} + C$.
 D. $\int f(x) dx = 2017e^x - \frac{504,5}{x^4} + C$.

Lời giải

Chọn C

$$\int f(x) dx = \int e^x \left(2017 - \frac{2018e^{-x}}{x^5} \right) dx = \int \left(2017e^x - \frac{2018}{x^5} \right) dx = 2017e^x + \frac{504,5}{x^4} + C$$

Câu 23. Nếu hàm số $y = \sin x$ là một nguyên hàm của hàm số $y = f(x)$ thì

- A. $f(x) = -\cos x$. B. $f(x) = \sin x$. C. $f(x) = \cos x$. D. $f(x) = -\sin x$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f(x) = (\sin x)' = \cos x$.

Câu 24. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 1 + 2^x \ln 2$. Biết $F(1) = 10$, tính $F(0)$.

- A. $F(0) = 8$
- B. $F(0) = 7$
- C. $F(0) = 6$
- D. $F(0) = 9$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $F(x) = \int f(x) dx = \int (1 + 2^x \ln 2) dx = x + 2^x + C$. Vì $F(1) = 10 \Rightarrow 1 + 2^1 + C = 10 \Leftrightarrow C = 7$

$F(x) = x + 2^x + 7 \Rightarrow F(0) = 8$. Chọn đáp án **A**

Câu 25. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{x} \ln x$.

- A. $\int f(x) dx = \frac{1}{9} x^{\frac{3}{2}} (3 \ln x - 2) + C$.
- B. $\int f(x) dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} (3 \ln x - 2) + C$.
- C. $\int f(x) dx = \frac{2}{9} x^{\frac{3}{2}} (3 \ln x - 1) + C$.
- D. $\int f(x) dx = \frac{2}{9} x^{\frac{3}{2}} (3 \ln x - 2) + C$.**

Lời giải

Chọn D

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = \sqrt{x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = \frac{1}{x} \\ v = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int f(x) dx &= \int \sqrt{x} \ln x dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \cdot \ln x - \int \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \cdot \ln x - \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{9} x^{\frac{3}{2}} (3 \ln x - 2) + C. \end{aligned}$$

Câu 26. Tính $I = \int_0^1 \left(\frac{1}{2x+1} + 3\sqrt{x} \right) dx$.

- A. $2 + \ln \sqrt{3}$.
- B. $4 + \ln 3$.
- C. $2 + \ln 3$.
- D. $1 + \ln \sqrt{3}$.

Lời giải

Ta có

$$I = \int_0^1 \left(\frac{1}{2x+1} + 3\sqrt{x} \right) dx = \int_0^1 \frac{1}{2x+1} dx + 3 \int_0^1 \sqrt{x} dx = \frac{1}{2} \ln |2x+1| \Big|_0^1 + 3 \cdot \frac{2}{3} x\sqrt{x} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \ln 3 + 2 = \ln \sqrt{3} + 2.$$

Câu 27. Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x+1} & \text{khi } 0 \leq x \leq 1 \\ 2x-1 & \text{khi } 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$. Tính tích phân $\int_0^3 f(x) dx$.

- A. $6 + \ln 4$.
- B. $4 + \ln 4$.
- C. $6 + \ln 2$.
- D. $2 + 2 \ln 2$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \int_0^3 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx = \int_0^1 \frac{2}{x+1} dx + \int_1^3 (2x-1) dx$$

$$= 2 \ln|x+1| \Big|_0^1 + (x^2-x) \Big|_0^1 = \ln 4 + 6.$$

Câu 28. Xác định số thực dương m để tích phân $\int_0^m (x-x^2) dx$ có giá trị lớn nhất.

A. $m = 1.$

B. $m = 2.$

C. $m = 3.$

D. $m = 4$

Lời giải

$$P = \int_0^m (x-x^2) dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^m = \frac{m^2}{2} - \frac{m^3}{3}.$$

$$\text{Đặt } f(m) = \frac{m^2}{2} - \frac{m^3}{3} \Rightarrow f'(m) = m - m^2 \Rightarrow f'(m) = 0 \Leftrightarrow m = 0 \text{ hoặc } m = 1$$

Lập bảng biến thiên

m	0	1	$+\infty$
$f'(m)$		0	-
$f(m)$	$-\infty$	$\frac{1}{6}$	$-\infty$

Vậy $f(m)$ đạt GTLN tại $m = 1.$

Câu 29. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[2;3]$ thỏa mãn $\int_2^3 f(x) dx = 2018.$ Tính $\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} xf(x^2) dx.$

A. $I = 2018^2.$

B. $I = 1009.$

C. $I = 4036.$

D. $I = \sqrt{2018}.$

Lời giải

$$\text{Đặt } t = x^2 \Rightarrow dt = 2x dx. \text{ Đổi cận: } x = \sqrt{2} \Rightarrow t = 2, x = \sqrt{3} \Rightarrow t = 3.$$

$$\text{Suy ra } \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} xf(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_2^3 f(t) dt = \frac{1}{2} \cdot 2018 = 1009.$$

Câu 30. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1) = 5, \int_0^1 f(x) dx = 12.$ Tính

$$J = \int_0^1 xf'(x) dx.$$

A. $J = -17.$

B. $J = 17.$

C. $J = 7.$

D. $J = -7.$

Lời giải

$$\text{Ta có: } J = \int_0^1 xf'(x) dx. \text{ Đặt: } \begin{cases} u = x \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases}$$

$$\text{Suy ra: } J = xf(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 f(x) dx = f(1) - \int_0^1 f(x) dx = 5 - 12 = -7.$$

Câu 31. Cho $\int_0^3 \frac{x}{4+2\sqrt{x+1}} dx = \frac{a}{3} + b \ln 2 + c \ln 3$ với a, b, c là các số nguyên. Giá trị của $a+b+c$ bằng

A. 1.

B. 2.

C. 7.

D. 9.

Lời giải

Đặt $t = \sqrt{x+1} \Rightarrow t^2 = x+1 \Rightarrow x = t^2 - 1 \Rightarrow dx = 2t dt$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 2$; $x = 3 \Rightarrow t = 4$.

Khi đó:

$$\int_1^2 \frac{t^2-1}{4+2t} \cdot 2t dt = \int_1^2 \frac{t^3-t}{t+2} dt = \int_1^2 \left(t^2 - 2t + 3 - \frac{6}{t+2} \right) dt = \left(\frac{t^3}{3} - t^2 + 3t - 6 \ln|t+2| \right) \Big|_1^2 = \frac{7}{3} - 12 \ln 2 + 6 \ln 3$$

$$\text{uy ra } \begin{cases} a = 7 \\ b = -12 \\ c = 6 \end{cases} \Rightarrow a + b + c = 1.$$

Câu 32. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2;0;0), B(0;2;0), C(0;0;2)$ và $D(2;2;2)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD . Tọa độ trung điểm I của MN là:

- A. $I(1;-1;2)$. B. $I(1;1;0)$. C. $I\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1\right)$. D. $I(1;1;1)$.

Lời giải

Cách 1: Ta có M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD nên $M(1;1;0), N(1;1;2)$, từ đó suy ra trung điểm của MN là $I(1;1;1)$.

Cách 2: Từ giả thiết suy ra I là trọng tâm tứ diện. Vậy $I(1;1;1)$.

Câu 33. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu tâm $I(1;2;3)$ và đi qua điểm $A(1;1;2)$ có phương trình là

- A. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = \sqrt{2}$. B. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = \sqrt{2}$.
C. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 2$. D. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 2$.

Lời giải

Vì mặt cầu tâm I đi qua điểm A nên bán kính $R = IA = \sqrt{2}$.

Do đó mặt cầu cần tìm có pt: $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 2$.

Câu 34. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(1;-3;2)$ và chứa trục Oz . Gọi $\vec{n} = (a; b; c)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) . Tính $M = \frac{b+c}{a}$.

- A. $M = -\frac{1}{3}$. B. $M = 3$. C. $M = \frac{1}{3}$. D. $M = -3$.

Lời giải

$$(P) \text{ đi qua } A \text{ chứa } Oz \text{ nên } \begin{cases} \vec{n} \perp \overline{OA} = (1; -3; 2) \\ \vec{n} \perp \vec{k} = (0; 0; 1) \end{cases}$$

$\Rightarrow (P)$ có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = [\overline{OA}; \vec{k}] = (-3; -1; 0)$.

Khi đó chọn $a = -3, b = -1, c = 0$. Vậy $M = \frac{b+c}{a} = \frac{1}{3}$.

Câu 35. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng đi qua ba điểm $A(2; 3; 5), B(3; 2; 4)$ và $C(4; 1; 2)$ có phương trình là

- A. $x + y + 5 = 0$. B. $x + y - 5 = 0$. C. $y - z + 2 = 0$. D. $2x + y - 7 = 0$.

Lời giải

Vì $\overline{AB}; \overline{AC} \subset (ABC)$ nên (ABC) sẽ nhận $\vec{n} = [\overline{AB}, \overline{AC}]$ làm một vectơ pháp tuyến.

Ta có $\overline{AB} = (1; -1; -1), \overline{AC} = (2; -2; -3)$ suy ra $\vec{n} = [\overline{AB}, \overline{AC}] = (1; 1; 0)$.

Hiển nhiên (ABC) đi qua $A(2; 3; 5)$ nên ta có phương trình của (ABC) là

$$1(x-2) + 1(y-3) + 0(z-5) = 0 \Leftrightarrow x + y - 5 = 0.$$

Tự luận

Câu 1. Tính $\int_5^{10} \frac{\sqrt{x-1}}{x-2} dx$

Lời giải

Đặt $\sqrt{x-1} = u \Rightarrow x-1 = u^2 \Rightarrow x = u^2 + 1$

$\Rightarrow dx = 2udu$

Đổi cận

x	5	10
u	2	3

Khi đó $\int_5^{10} \frac{\sqrt{x-1}}{x-2} dx = 2 \int_2^3 \frac{u^2}{u^2-1} du = 2 \int_2^3 \left(1 + \frac{1}{u^2-1} \right) du$
 $= \int_2^3 2du + 2 \cdot \frac{1}{2} \int_2^3 \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1} \right) du = 2(3-2) + (\ln|u-1| - \ln|u+1|) \Big|_2^3$
 $= 2 + (\ln 2 - \ln 1 - \ln 4 + \ln 3) = 2 - \ln 2 + \ln 3$

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} thỏa mãn: $3f(x) + f(2-x) = 2(x-1)e^{x^2-2x+1} + 4, \forall x \in \mathbb{R}$.

Tính giá trị của tích phân $I = \int_0^2 f(x) dx$.

Lời giải

Cách 1:

$3f(x) + f(2-x) = 2(x-1)e^{x^2-2x+1} + 4, \forall x \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow 3 \int_0^2 f(x) dx + \int_0^2 f(2-x) dx = \int_0^2 (2x-2)e^{x^2-2x+1} dx + 4 \int_0^2 dx$ (1).

Đặt $t = 2-x \Rightarrow \int_0^2 f(2-x) dx = - \int_2^0 f(t) dt = \int_0^2 f(t) dt = \int_0^2 f(x) dx$ (2).

Đặt $u = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow du = (2x-2) dx \Rightarrow \int_0^2 (2x-2)e^{x^2-2x+1} dx = \int_1^1 e^u du = 0$ (3).

Thay (2) và (3) vào (1) $\Rightarrow 4 \int_0^2 f(x) dx = 4 \int_0^2 dx \Rightarrow I = \int_0^2 f(x) dx = 2$. Chọn phương án C.

Cách 2: Do $3f(x) + f(2-x) = 2(x-1)e^{x^2-2x+1} + 4, \forall x \in \mathbb{R}$ (1)

Thay $x = 2-x$ vào (1) ta có: $3f(2-x) + f(x) = -2(x-1)e^{x^2-2x+1} + 4, \forall x \in \mathbb{R}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: $\begin{cases} 3f(x) + f(2-x) = 2(x-1)e^{x^2-2x+1} + 4, \forall x \in \mathbb{R} \\ f(x) + 3f(2-x) = -2(x-1)e^{x^2-2x+1} + 4, \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9f(x) + 3f(2-x) = 6(x-1)e^{x^2-2x+1} + 12 \\ f(x) + 3f(2-x) = -2(x-1)e^{x^2-2x+1} + 4 \end{cases} \Rightarrow f(x) = 2(x-1)e^{x^2-2x+1} + 1$$

$$\Rightarrow \int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 (2(x-1)e^{x^2-2x+1} + 1)dx = 2$$

Câu 3. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \tan^5 x$.

Lời giải

$$I = \int f(x)dx = \int \tan^5 x dx = \int \frac{\sin^5 x}{\cos^5 x} dx$$

$$= \int \frac{\sin^2 x \cdot \sin^2 x \cdot \sin x}{\cos^5 x} dx = \int \frac{(1-\cos^2 x) \cdot (1-\cos^2 x) \cdot \sin x}{\cos^5 x} dx$$

Đặt $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$ $I = \int \frac{(1-t^2) \cdot (1-t^2)}{t^5} (-dt) = \int \frac{1-2t^2+t^4}{t^5} (-dt)$

$$= \int \left(-\frac{1}{t^5} + \frac{2}{t^3} - \frac{1}{t} \right) dt = \int \left(-t^{-5} + 2t^{-3} - \frac{1}{t} \right) dt = \frac{1}{4}t^{-4} - t^{-2} - \ln|t| + C$$

$$= \frac{1}{4} \cos^4 x - \cos^2 x - \ln|\cos x| + C = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\cos^4 x} - \frac{1}{\cos^2 x} - \ln|\cos x| + C$$

$$= \frac{1}{4} \cdot (\tan^2 x + 1)^2 - (\tan^2 x + 1) - \ln|\cos x| + C$$

$$= \frac{1}{4} (\tan^4 x + 2 \tan^2 x + 1) - (\tan^2 x + 1) - \ln|\cos x| + C$$

$$= \frac{1}{4} \tan^4 x - \frac{1}{2} \tan^2 x - \ln|\cos x| + \frac{1}{4} + C$$

$$= \frac{1}{4} \tan^4 x - \frac{1}{2} \tan^2 x - \ln|\cos x| + C.$$

Câu 4. Người ta làm chiếc thùng phi dạng hình trụ, kín hai đáy, với thể tích theo yêu cầu là $2\pi m^3$. Hỏi bán kính đáy R và chiều cao h của thùng phi bằng bao nhiêu để khi làm thì tiết kiệm vật liệu nhất?

Lời giải

Từ giả thiết ta có: $V = \pi R^2 h = 2\pi \Rightarrow h = \frac{2}{R^2}$.

Diện tích toàn phần của thùng phi là:

$$S_p = 2\pi R h + 2\pi R^2 = 2\pi \left(R^2 + \frac{2}{R} \right).$$

Xét hàm số $f(R) = R^2 + \frac{2}{R}$ với $R \in (0; +\infty)$. Ta có:

$$f'(R) = 2R - \frac{2}{R^2} = \frac{2(R^3 - 1)}{R^2}$$

$$f'(R) = 0 \Leftrightarrow R = 1$$

Bảng biến thiên

x	0		1		$+\infty$	
y'		-	0	+		
y	$+\infty$	\searrow		3	\nearrow	
					$+\infty$	

Suy ra diện tích toàn phần đạt giá trị nhỏ nhất khi $R = 1 \Rightarrow h = 2$.

Vậy để tiết kiệm vật liệu nhất khi làm thùng phi thì $R = 1m, h = 2m$.

Nguyễn Bảo Vương