THẦY ĐỖ VĂN ĐỨC

PHƯƠNG PHÁP GHÉP TRỤC

VÀ BÀI TOÁN ĐƠN ĐIỆU, CỰC TRỊ, TƯƠNG GIAO

Thầy Đỗ Văn Đức

Chắc kiến thức – Vững tương lai

LỜI NÓI ĐẦU

Các em học sinh và quý độc giả thân mến!

Đồ thị hàm số là một trong những chủ đề rất quan trọng trong chương trình kiến thức lớp 12, xuất hiện rất nhiều các bài toán mức độ VD-VDC và hay gặp trong các kỳ thi và các bài kiểm tra.

Cuốn sách này tập trung vào chủ đề nhỏ của phần đồ thị, đó là sự tương giao đồ thị.

- Điều kiện có nghiệm của phương trình
- Tương giao hàm hợp không có tham số
- Phương pháp ghép trục
- Kỹ năng biện luận nghiệm nâng cao

Thầy Đỗ Văn Đức (tác giả) xin gửi lời cảm ơn chân thành tới em Hoàng Sơn, người sáng tác ra phương pháp ghép trục và lần đầu tiên đưa phương pháp này tới công chúng. Ngoài ra, thầy Đức cũng gửi lời cảm ơn chân thành tới các học sinh trong khóa học online của thầy Đức, đặc biệt là các em Trần Anh Minh và Nguyễn Tuấn Hiệp đã cùng thầy sáng tạo ra các bài toán mới, bổ sung thêm các bài toán chất lượng cho cuốn sách.

Hi vọng rằng cuốn sách này sẽ giúp các em tìm ra niềm vui trong việc học toán, đặc biệt là tự tin trong việc giải quyết các bài toán khó, đồng thời được trang bị thêm nhiều kỹ năng khác nhau để giải toán.

Mặc dù đã làm việc với tinh thần cầu thị cao, tỉ mỉ và chi tiết, tuy nhiên không thể tránh khỏi những sai sót. Rất mong quý độc giả và các em học sinh đóng góp ý kiến để cuốn sách này hoàn thiện hơn.

Mọi ý kiến đóng góp, độc giả vui lòng gửi trực tiếp tác giả cuốn sách

Đỗ Văn Đức

SĐT: 0896.615.391

Email: ducdv91@outlook.com

Facebook: http://fb.com/thayductoan

Mã QR-CODE của FanPage

Mã QR-CODE của kênh Youtube xem bài giảng

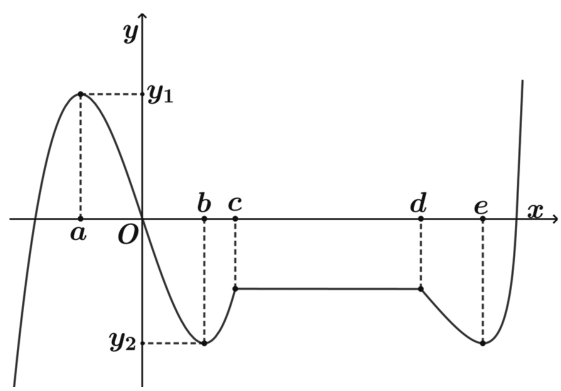
MỤC LỤC

BÀI 1 – KIẾN THỨC NỀN VỀ ĐỒ THỊ

Đồ thị hàm số có rất nhiều điều thú vị xung quanh nó. Trong bài học này, chúng ta cùng nhắc lại một số kiến thức quan trọng, nhằm sử dụng chúng để giải quyết các bài toán đồ thị nội dung phần tương giao đồ thị

I. ĐƠN ĐIỆU – CỰC TRỊ

Giả sử hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ



- Hàm số đồng biến trên $\left(-\infty;a\right),\left(b;c\right),\left(e;+\infty\right)$. Hàm số nghịch biến trên $\left(a;b\right),\left(d;e\right)$.
- Hàm số không đổi (là hàm hằng) trên $\left(c;d\right)$.
- Hàm số có các điểm cực trị là $a,b,e,$ trong đó $x=a$ là điểm cực đại, $x=b,x=e$ là các điểm cực tiểu.
- Hàm số có giá trị cực đại $y_1,$ giá trị cực tiểu y_2.
- Đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị có tọa độ là $\left(a;y_1\right)$; $\left(b;y_2\right)$ và $\left(e;f\left(e\right)\right)$.
- Các điểm $x=c,x=d$ không phải là các điểm cực trị.

II. TƯƠNG GIAO

- Số nghiệm của phương trình $f\left(x\right)=g\left(x\right)$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ và đồ thị hàm số $y=g\left(x\right)$
- Số nghiệm của phương trình $f\left(x\right)=0$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ và trục hoành.
- Số nghiệm của phương trình $f\left(x\right)=m$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ và đường thẳng $y=m$.
- Đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ và $y=g\left(x\right)$ tiếp xúc với nhau khi hệ $\begin{cases}f\left(x\right)=g\left(x\right)\\f'\left(x\right)=g'\left(x\right)\end{cases}$ có nghiệm.

III. CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI ĐỒ THỊ

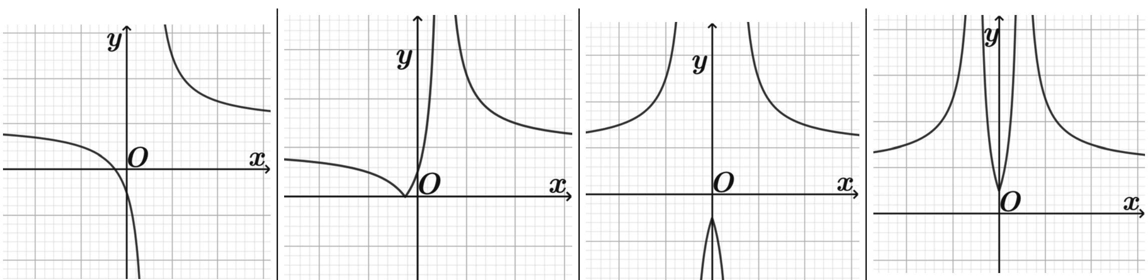
1. PHÉP TỊNH TIẾN VÀ LẤY ĐỐI XỨNG

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C). Đồ thị của các hàm số sau được xác định thông qua (C)

$y = f(x) + m$	Nếu $m > 0$, tịnh tiến đồ thị (C) lên trên m đơn vị Nếu $m < 0$, tịnh tiến đồ thị (C) xuống dưới $-m$ đơn vị.
$y = f(x+m)$	Nếu $m > 0$, tịnh tiến đồ thị (C) sang trái m đơn vị Nếu $m < 0$, tịnh tiến đồ thị (C) sang phải $-m$ đơn vị.
$y = -f(x)$	Lấy đối xứng với (C) qua trục hoành
$y = f(-x)$	Lấy đối xứng với (C) qua trục tung
$y = \lvert f(x)\rvert$	*Phần 1:* Phần đồ thị của (C) không nằm phía dưới trục hoành *Phần 2:* Phần đối xứng qua trục hoành của phần đồ thị của (C) phía dưới trục hoành
$y = f(\lvert x\rvert)$	*Phần 1*: Phần đồ thị của (C) nằm bên phải trục tung *Phần 2*: Phần đối xứng với phần 1 qua trục tung.
$y = \lvert f(\lvert x\rvert)\rvert$	*Bước 1*: Từ đồ thị (C) suy ra đồ thị hàm số $y = f(\lvert x\rvert)$ (L). *Bước 2*: Từ đồ thị (L) suy ra đồ thị hàm số $y = \lvert f(\lvert x\rvert)\rvert$.

Ví dụ minh họa

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$, đồ thị các hàm số $y = |f(x)|$, $y = f(|x|)$, $y = |f(|x|)|$ có đồ thị như hình



$f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$ $\quad$ $y = |f(x)| = \left|\dfrac{2x+1}{x-1}\right|$ $\quad$ $y = f(|x|) = \dfrac{2|x|+1}{|x|-1}$ $\quad$ $y = |f(|x|)| = \left|\dfrac{2|x|+1}{|x|-1}\right|$

2. KẾT HỢP PHÉP TỊNH TIẾN VÀ LẤY ĐỐI XỨNG

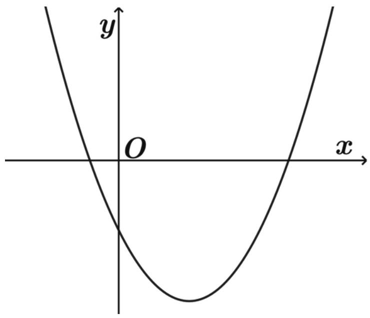
Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C). Thực hiện các phép biến đổi đồ thị để ra đồ thị hàm số $y = f(|x+m|)$ và $y = f(|x|+m)$.

Với hàm số $g(x) = f(|x+m|)$, đặt $h(x) = f(|x|)$, khi đó $h(x+m) = f(|x+m|) = g(x)$. Vậy ta thực hiện phép biến đổi đồ thị: $y = f(x) \to y = f(|x|) \to y = f(|x+m|)$ bằng cách:

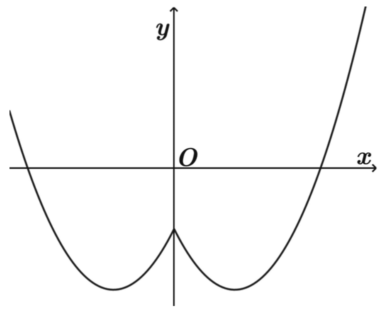
- Bước 1. Tạo ra đồ thị hàm số $y = f(|x|)$, gọi đồ thị này là (C') bằng phép biến đổi đồ thị lấy đối xứng qua trục tung đã có ở phần trên.

- Bước 2. Tạo ra đồ thị hàm số $f\left(\left|x+m\right|\right)$ bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số $\left(C'\right)$ sang phải hoặc sang trái 1 lượng $\left|m\right|$ đơn vị.

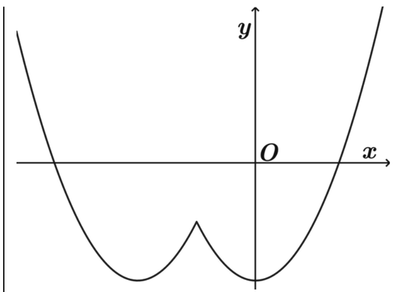
Ví dụ:



$\left(C\right): f\left(x\right)=x^2+2x-1$



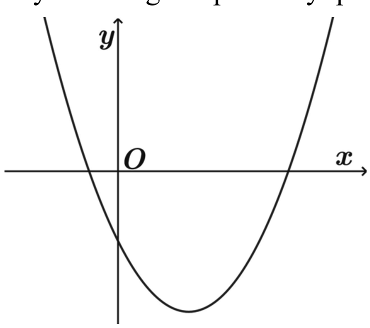
$\left(C'\right): f\left(\left|x\right|\right)=x^2+2\left|x\right|-1$



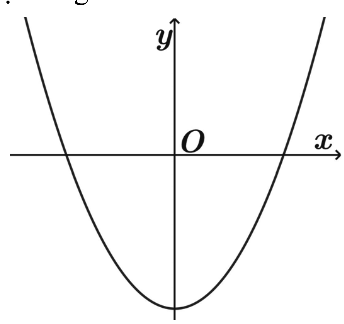
$\left(C''\right): y=f\left(\left|x+1\right|\right)$

Với hàm số $g\left(x\right)=f\left(\left|x\right|+m\right)$, đặt $h\left(x\right)=f\left(x+m\right)$, khi đó $h\left(\left|x\right|\right)=f\left(\left|x\right|+m\right)=g\left(x\right)$. Vậy ta thực hiện phép biến đổi đồ thị: $y=f\left(x\right)\to y=f\left(x+m\right)\to y=f\left(\left|x\right|+m\right)$ bằng cách:

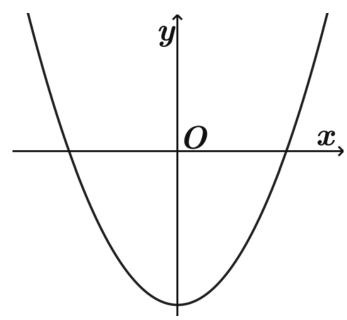
- Bước 1. Tạo ra đồ thị hàm số $y=f\left(x+m\right)$, gọi đồ thị này là $\left(C'\right)$ bằng phép biến đổi đồ thị tịnh tiến sang trái hoặc sang phải 1 lượng $\left|m\right|$ đơn vị đã học ở phần trên.
- Bước 2. Tạo ra đồ thị hàm số $f\left(\left|x\right|+m\right)$ bằng cách giữ nguyên phần bên phải trục tung của $\left(C'\right)$ và lấy đối xứng với phần này qua trục tung.



$\left(C\right): f\left(x\right)=x^2+2x-1$



$\left(C'\right): y=f\left(x+1\right)$

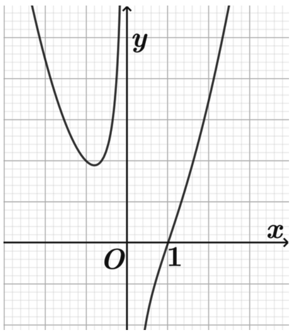


$\left(C''\right): y=f\left(\left|x\right|+1\right)$

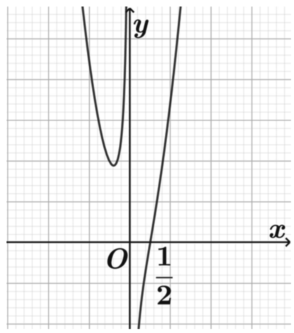
3. PHÉP CO DÃN ĐỒ THỊ

Bài toán 3: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị $\left(C\right)$. Xét hàm số $y=f\left(ax\right)$ $\left(a\neq 0\right)$ có đồ thị $\left(C'\right)$.

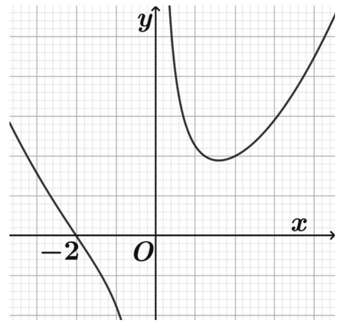
Gọi $M\left(x_o;y_o\right)$ là 1 điểm bất kỳ thuộc $\left(C\right)$, ta có $y_o=f\left(x_o\right)=f\left(a.\dfrac{x_o}{a}\right)$. Do đó điểm $M'\left(\dfrac{x_o}{a};y_o\right)$ thuộc $\left(C'\right)$. Gọi $H\left(0;y_o\right)$ thì H là hình chiếu của M và M' lên Oy; $\overrightarrow{HM}=\left(x_o;0\right)$; $\overrightarrow{HM'}=\left(\dfrac{x_o}{a};0\right)$. Do đó $\overrightarrow{HM'}=\dfrac{1}{a}\overrightarrow{HM}$.



$y = f(x) = x^2 - \dfrac{1}{x}$



$y = f(2x) = 4x^2 - \dfrac{1}{2x}$



$y = f\left(-\dfrac{1}{2}x\right) = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{2}{x}$

Như vậy, nếu $a > 0$, ta thấy rằng đồ thị hàm số $y = f(ax)$ được xác định bằng cách co vào hoặc dãn ra từ đô thị hàm số $y = f(x)$.

- Nếu $a \in (0;1)$, ta thực hiện phép dãn đồ thị.
- Nếu $a \in (1;+\infty)$, ta thực hiện phép co đồ thị.

Nếu $a < 0$, ta có $y = f(ax) = f((-a).(-x))$ nên khi thực hiện bước co vào hoặc dãn ra xong, ta thực hiện thêm bước lấy đối xứng qua trục tung.

IV. MỘT SỐ HỆ QUẢ CỦA CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI ĐỒ THỊ

1. SỐ ĐIỂM CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ $y = |f(x)|$

> Hàm số $y = |f(x)|$ có số điểm cực trị bằng số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ cộng với số nghiệm đơn và số nghiệm bội lẻ của phương trình $f(x) = 0$.

- x_o là nghiệm đơn của phương trình $f(x) = 0$ nếu ta có thể phân tích $f(x) = (x - x_0).g(x)$, trong đó $g(x_0) \neq 0$.
- x_o là nghiệm bội chẵn của phương trình $f(x) = 0$ nếu ta có thể phân tích $f(x) = (x - x_0)^{2k} g(x)$ $k \in N^*$, trong đó $g(x_0) \neq 0$.
- x_o là nghiệm bội lẻ của phương trình $f(x) = 0$ nếu ta có thể phân tích $f(x) = (x - x_0)^{2k+1}.g(x)$, $k \in N^*$, trong đó $g(x_0) \neq 0$.

2. SỐ ĐIỂM CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ $y = f(|x|)$.

Gọi a là số điểm cực trị dương của hàm số $y = f(x)$. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(|x|)$ là

- $2a + 1$ nếu $x = 0$ là 1 điểm cực trị của hàm số $y = f(|x|)$.
- $2a$ nếu $x = 0$ không là 1 điểm cực trị của hàm số $y = f(|x|)$.

3. SỐ ĐIỂM CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ $y = f(ax + b) + c$

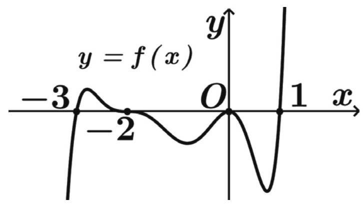
> Hàm số $y = f(ax + b) + c$ $(a \neq 0)$ có số điểm cực trị bằng với số điểm cực trị của hàm $y = f(x)$. Nếu x_o là 1 điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ thì hàm số $y = f(ax + b) + c$ có điểm cực trị tương ứng là $\dfrac{x_o - b}{a}$ (thỏa mãn $ax + b = x_o \Leftrightarrow x = \dfrac{x_o - b}{a}$).

BÀI 2 – ĐƠN ĐIỆU HÀM HỢP KHÔNG THAM SỐ

Chúng ta chưa sử dụng phương pháp ghép trục cho những bài toán phần này (mặc dù đều có thể sử dụng được), và trong khuôn khổ cuốn sách, ta chỉ tập trung vào mảng không có tham số

1. KIẾN THỨC NỀN TẢNG

Xét hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ sau



Từ đồ thị, ta có một số nhận xét về phương trình $f\left(x\right)=0$:

- Qua đồ thị, ta có thể thấy: $f\left(x\right)$ đổi dấu đúng 3 lần qua các điểm $-3;\ -2$ và 1, những điểm này là các nghiệm đơn và nghiệm bội lẻ của phương trình $f\left(x\right)=0$ (nghiệm $x=-3$ và $x=1$ là nghiệm đơn, nghiệm $x=-2$ là nghiệm bội lẻ).
- Chú ý rằng $x=0$ là 1 nghiệm của $f\left(x\right)=0,$ nhưng $f\left(x\right)$ không đổi dấu khi x đi qua điểm $x=0.$

Bây giờ ta xét hàm số $u\left(x\right)$, ta có $f\left(u\left(x\right)\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}u\left(x\right)=-3 & \left(i\right)\\ u\left(x\right)=-2 & \left(ii\right)\\ u\left(x\right)=0 & \left(iii\right)\\ u\left(x\right)=1 & \left(iv\right)\end{array}\right.$. Ta có 1 số nhận xét như sau:

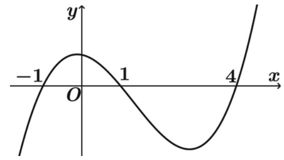
- Các nghiệm của phương trình $\left(iii\right)$ không làm cho $f\left(u\left(x\right)\right)$ đổi dấu
- Các nghiệm đơn hoặc nghiệm bội lẻ của các phương trình $\left(i\right),\left(ii\right)$ và $\left(iv\right)$ làm cho $f\left(u\left(x\right)\right)$ đổi dấu, các nghiệm bội chẵn không làm cho $f\left(u\left(x\right)\right)$ đổi dấu.

Lưu ý: Nếu hàm số $f\left(x\right)$ và $u\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, xét hàm số $g\left(x\right)=f\left(u\left(x\right)\right)$ thì $g'\left(x\right)=u'\left(x\right).f'\left(u\left(x\right)\right)$. Ta có $g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u'\left(x\right)=0\\ f'\left(u\left(x\right)\right)=0\end{array}\right.$. Khi đó những điểm x_0 làm cho $u'\left(x\right)$ đổi dấu sẽ không làm cho $f'\left(u\left(x\right)\right)$ đổi dấu. Hay nói cách khác, những điểm làm $u'\left(x\right)$ đổi dấu cũng sẽ làm cho $g'\left(x\right)$ đổi dấu.

Ví dụ: $g\left(x\right)=f\left(x^4\right)$ có $g'\left(x\right)=4x^3f'\left(x^4\right),$ do đó $g'\left(x\right)$ chắc chắn đổi dấu qua $x=0$ do điểm $x=0$ làm đổi dấu của hàm số $u'=4x^3$.

2. HÀM HỢP KHÔNG CÓ THAM SỐ

Ví dụ 1. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$. Hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $y=f\left(x^2\right)$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

A. $\left(-2;-1\right)$. **B.** $\left(2;+\infty\right)$. **C.** $\left(1;2\right)$. **D.** $\left(-1;1\right)$.

Giải

Phân tích và giải bài toán

Đặt $g\left(x\right)=f\left(x^2\right)$. Bài toán yêu cầu tìm khoảng nghịch biến của hàm số $g\left(x\right)$, nghĩa là ta cần quan tâm tới bất phương trình $g'\left(x\right)\le 0 \Leftrightarrow 2xf'\left(x^2\right)\le 0 \Leftrightarrow xf'\left(x^2\right)\le 0$. Tới đây ta có 2 hướng giải sau

- Hướng 1: Chia hai trường hợp: TH1 $\begin{cases} x\le 0 \\ f'\left(x^2\right)\ge 0 \end{cases}$ và TH2 $\begin{cases} x\ge 0 \\ f'\left(x^2\right)\le 0 \end{cases}$.
- Hướng 2: Tìm các điểm làm cho $g'\left(x\right)$ đổi dấu, từ đó xác định dấu của $g'\left(x\right)$.

Ở đây khi giải toán trắc nghiệm, hướng 2 sẽ tỏ ra ưu việt hơn và dễ làm hơn. Để xác định các điểm làm cho $g'\left(x\right)$ đổi dấu, ta có thể thực hiện như sau:

- Bước 1: Tính $g'\left(x\right)$, giải phương trình $g'\left(x\right)=0 \Leftrightarrow x=x_1; x=x_2; \ldots$
- Bước 2: Quan tâm xem các nghiệm x_i là nghiệm đơn, hay nghiệm bội chẵn, hay nghiệm bội lẻ. Nếu là nghiệm bội chẵn thì ta không điền vào bảng xét dấu (vì nó không làm thay đổi dấu của $g'\left(x\right)$).

Xét $g'\left(x\right)=2x.f'\left(x^2\right)\Rightarrow g'\left(x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f'\left(x^2\right)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=-1 \\ x^2=1 \\ x^2=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 1 \\ x=\pm 2 \end{array}\right.$.

Chú ý rằng các nghiệm này đều là các nghiệm đơn nên y' đổi dấu 5 lần, ngoài ra dễ thấy với $x>2$ thì $y'=2xf'\left(x^2\right)>0$ nên ta có bảng xét dấu y':

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ đó hàm số $y=f\left(x^2\right)$ nghịch biến trên khoảng $\left(1;2\right)$.

Lưu ý: *Nếu $f'\left(x_0\right)=0$ nhưng $f'\left(x\right)$ không đổi dấu qua $x=x_0$, thì khi đó tập nghiệm của phương trình $f'\left(u\left(x\right)\right)=0$ chứa các nghiệm của phương trình $u\left(x\right)=x_0$, nhưng các nghiệm này sẽ không làm cho $f'\left(u\left(x\right)\right)$ đổi dấu, nên ta có thể bỏ qua phương trình $u\left(x\right)=x_0$ khi xét $g'\left(x\right)=0$. Để minh* *họa điều này, ta hãy cùng quan sát ví dụ số 2. Ngoài ra, thay vì vẽ bảng xét dấu y', chúng ta có thể vẽ 1 trục số minh họa dấu của y' như hình dưới*

		-2		-1		0		1		2	x
	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$ y

Ví dụ 2. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số $g\left(x\right)=f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây:

A. $\left(-\dfrac{1}{2};0\right)$. **B.** $\left(\dfrac{1}{2};2\right)$. **C.** $\left(-2;-\dfrac{1}{2}\right)$. **D.** $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$.

Giải

Phân tích và giải bài toán

Hàm số $g\left(x\right)$ có TXĐ: $\mathbb{R}\setminus\left\{0\right\}$. Ta có: $g'\left(x\right)=\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)f'\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x^2-1}{x^2}f'\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$.

Do đó $g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-1=0\\ f'\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm1\\ x+\dfrac{1}{x}=-2\\ x+\dfrac{1}{x}=2\end{array}\right.$

Phương trình $x+\dfrac{1}{x}=-2$ và $x+\dfrac{1}{x}=2$ đều chỉ có nghiệm kép, chú ý rằng $x+\dfrac{1}{x}+2$ và $x+\dfrac{1}{x}-2$ đều đổi dấu khi x qua 0. Từ đó ta có trục số minh họa dấu của $g'\left(x\right)$ như sau:

	-1		0		1		x
?	0	?	$\|\|$	?	0	?	$g'(x)$

Việc xác định dấu của $g'\left(x\right)$ trên $\left(1;+\infty\right)$ rất đơn giản, ta chỉ cần cho x bởi 1 giá trị bất kì thuộc $\left(1;+\infty\right)$ (ví dụ $x=2$ hoặc $x\to+\infty$), khi đó $x+\dfrac{1}{x}>2$ nên $f'\left(x+\dfrac{1}{x}\right)<0,$ mà $x^2-1>0$ nên $g'\left(x\right)<0.$

Tương tự với việc xét dấu của $g'\left(x\right)$ trên khoảng $\left(-\infty;-1\right)$, ta chỉ cần cho x là 1 giá trị bất kì thuộc $\left(-\infty;-1\right)$, chẳng hạn cho $x=-2$ hoặc $x\to-\infty,$ khi đó $x+\dfrac{1}{x}<-2\Rightarrow f'\left(x+\dfrac{1}{x}\right)>0,$ mà $x^2-1>0$ nên $g'\left(x\right)>0.$

Chú ý rằng các nghiệm -1 và 1 là các nghiệm đơn của $g'\left(x\right)=0$ nên khi x đi qua các điểm đó, $g'\left(x\right)$ có sự đổi dấu. Từ đó ta hoàn thành trục số minh họa dấu của $g'\left(x\right)$ như sau:

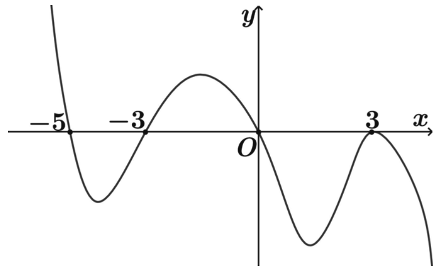
	-1		0		1		x
$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$g'(x)$

Qua bảng xét dấu này, ta thấy hàm số $g\left(x\right)$ nghịch biến trên $\left(-\dfrac{1}{2};0\right)$.

Nhận xét: *Học sinh rất dễ bỏ qua điểm* $x=0$ *khi xét bảng xét dấu của* $g'\left(x\right)$, *và chú ý rằng khi* x *đi qua 0,* $g'\left(x\right)$ *có thể đổi dấu hay không đổi dấu.*

3. HÀM SỐ F'(AX+B)+C

Ví dụ 1. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$, đồ thị hàm số $y=f'\left(2-x\right)$ như hình vẽ. Hàm số $y=f\left(x\right)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây



A. $\left(2;3\right)$. **B.** $\left(3;5\right)$. **C.** $\left(5;7\right)$. **D.** $\left(7;9\right)$.

Giải

Phân tích và giải bài toán

Bài toán yêu cầu tìm khoảng nghịch biến của hàm số $f\left(x\right)$, đưa ta đến câu hỏi: Với x thuộc khoảng nào thì $f'\left(x\right)\le 0$. Trong bài toán này, đề bài cho ta biết thông tin về đồ thị hàm số $y=f'\left(2-x\right)$, rõ ràng ta cần tận dụng thông tin này để giải bất phương trình $f'\left(x\right)\le 0$. Tới đây ta có 2 hướng xử lý

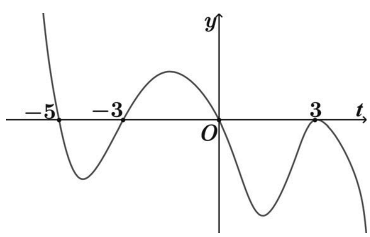
- Hướng 1: Sử dụng phép biến đổi đồ thị, đưa đồ thị $y=f'\left(2-x\right)\to y=f'\left(x\right)$.
- Hướng 2: Đổi biến đến tận dụng đồ thị $y=f'\left(2-x\right)$.

Rõ ràng việc xử lý bài toán theo hướng 1 sẽ khó khăn và rất dễ gây nhầm lẫn, trong khi đó ta xử lý bài toán theo hướng số 2 sẽ trở nên rất đơn giản như sau:

Xét bất phương trình cần quan tâm: $f'\left(x\right)\le 0$.

Để tận dụng đồ thị hàm số $y=f'\left(2-x\right)$, ta đặt $x=2-t$, khi đó $f'\left(x\right)\le 0\Leftrightarrow f'\left(2-t\right)\le 0$.

Trên hệ trục tọa độ Oty, ta vẽ đồ thị hàm số $y=f'\left(2-t\right)$ (hình vẽ)



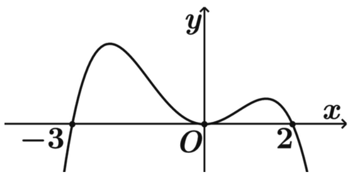
Ta thấy ngay được $f'\left(2-t\right)\le 0$ trong những khoảng làm cho đồ thị hàm số $y=f'\left(2-t\right)$ nằm bên dưới trục hoành, nghĩa là $\left[\begin{array}{l}-5\le t\le -3\\ t\ge 0\end{array}\right.$.

Từ đó $f'(x)\le 0 \Leftrightarrow f'(2-t)\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -5\le t\le -3 \\ t\ge 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -5\le 2-x\le -3 \\ 2-x\ge 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5\le x\le 7 \\ x\le 2 \end{array}\right.$.

Vậy hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(5;7)$.

Nhận xét: *Ở lời giải trên, ta đã rất khéo léo tạo ra mối quan hệ giữa bất phương trình $f'(x)\le 0$ và đồ thị hàm số $y=f'(2-x)$ bằng phép đổi biến $x=2-t$. Chú ý rằng với mỗi giá trị $x\in\mathbb{R}$, ta có duy nhất 1 giá trị $t\in\mathbb{R}$ thỏa mãn.*

Ví dụ 2. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'\left(x^3+2x^2+2x\right)$ được cho như hình bên dưới



Biết hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(a;b)$. Hỏi khoảng $(a;b)$ chứa tối đa bao nhiêu giá trị nguyên?

A. 36. **B.** 35. **C.** 34. **D.** 33.

Giải

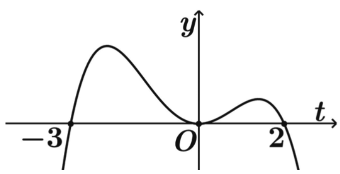
Phân tích và giải bài toán

Bài toán yêu cầu tìm x để $f'(x)\ge 0$. Khó khăn của chúng ta là giả thiết cho đồ thị hàm số $y=f'\left(x^3+2x^2+2x\right)$. Để tận dụng đồ thị hàm số này, ta sử dụng phép đổi biến $x=t^3+2t^2+2t$.

Đặt $g(t)=t^3+2t^2+2t \Rightarrow g'(t)=3t^2+4t+2$. Ta thấy $g'(t)>0\ \forall t\in\mathbb{R}$ nên $g(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Ngoài ra $\lim\limits_{t\to-\infty} g(t)=-\infty;\ \lim\limits_{t\to+\infty} g(t)=+\infty$. Từ đó, với mỗi giá trị $x\in\mathbb{R}$, luôn có 1 giá trị t duy nhất thỏa mãn $x=t^3+2t^2+2t$. Đặt $x=g(t)=t^3+2t^2+2t$.

Xét bất phương trình $f'(x)\ge 0 \Leftrightarrow f'\left(t^3+2t^2+2t\right)\ge 0\ \ (i)$.

Từ đồ thị hàm số $y=f'\left(x^3+2x^2+2x\right)$, xét hệ trục tọa độ Oty, ta có đồ thị hàm số $f'\left(t^3+2t^2+2t\right)$ (như hình vẽ)

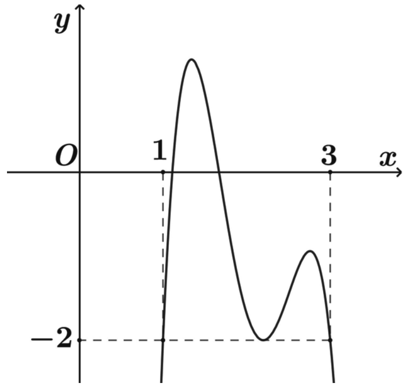


Từ đồ thị, ta có: $(i)\Leftrightarrow -3\le t\le 2 \Leftrightarrow g(-3)\le g(t)\le g(2) \Leftrightarrow -15\le x\le 20$.

Do đó $(a;b)\subset(-15;20)$ nên $(a;b)$ chứa nhiều nhất 34 giá trị nguyên.

Nhận xét: *Đây là bài toán tương đối khó, đặc biệt còn bẫy học sinh ở bước cuối cùng khi đề bài hỏi khoảng $(a;b)$ có thể chứa tối đa bao nhiêu giá trị nguyên, chú ý rằng đây là khoảng, nghĩa là khoảng này không thể chứa các điểm -15 và 20. Nhiều học sinh chọn cả 2 điểm này nên ra phương án là 36 dẫn đến đáp án sai.*

Ví dụ 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(2x-3)-2$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khoảng nào sau đây là khoảng đồng biến của hàm số $y = f(x)$



A. $(-\infty;-3)$. **B.** $(-3;-1)$. **C.** $(-1;3)$. **D.** $(3;+\infty)$.

Giải

Phân tích và giải bài toán

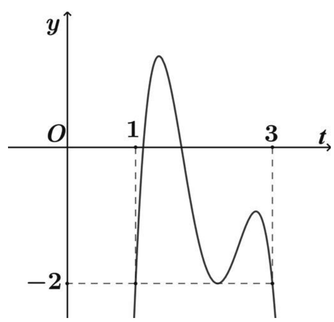
Sự khác biệt lớn nhất ở bài toán này và các bài toán trên, đó là đề bài cho hàm số $y = f'(2x-3)-2$, có thêm -2 ở cuối. Ý tưởng giải toán vẫn vậy, ta sẽ cố gắng tạo ra mối quan hệ giữa bất phương trình $f'(x) \ge 0$ và đồ thị đó.

Bằng phép đặt $x = 2t-3 \Rightarrow f'(x) \ge 0 \Leftrightarrow f'(2t-3) \ge 0$. Vấn đề bài toán là cho đồ thị hàm $y = f'(2x-3)-2$, do đó ta có 2 ý tưởng để tiếp tục làm

- Ý tưởng 1: Tạo ra đồ thị hàm số $y = f'(2t-3)$ (trong hệ trục Oty) bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số $y = f'(2t-3)-2$ lên trên 2 đơn vị.
- Ý tưởng 2: Tạo ra $f'(2t-3)-2$ bằng biến đổi đơn giản: $f'(2t-3) \ge 0 \Leftrightarrow f'(2t-3)-2 \ge -2$.

Việc thực hiện ý tưởng 2 tỏ ra đơn giản hơn.

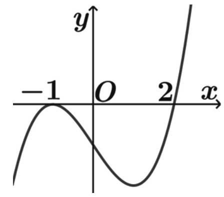
Trên hệ trục tọa độ Oty, ta vẽ đồ thị hàm số $y = f'(2t-3)-2$



Từ đồ thị, ta thấy (i) đúng trong các khoảng mà đồ thị hàm số $y = f'(2t-3)-2$ nằm trên đường thẳng $y = -2$, khi đó $1 \le t \le 3 \Leftrightarrow -1 \le 2t-3 \le 3 \Leftrightarrow -1 \le x \le 3$.

4. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Xét hàm số $g(x) = f(x^2 - 2)$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?



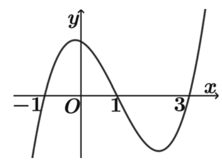
A. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

B. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;0)$.

C. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

D. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

2. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi hàm số $y = f(2x^2 - 1)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $\left(-\sqrt{2};-1\right)$. **B.** $(-1;1)$.

C. $\left(-1;\sqrt{2}\right)$. **D.** $(0;+\infty)$.

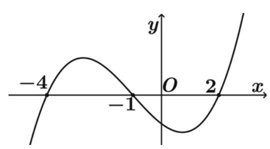
3. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y		↗	3	↘		↗	3	↘	
	$-\infty$				-1				$-\infty$

Hàm số $y = f(x^2 - 2)$ đồng biến trên khoảng nào?

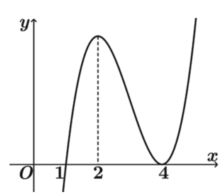
A. $(2;+\infty)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(-2;0)$. **D.** $(-\infty;-2)$.

4. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $g(x) = f(x^2 - 5)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây:



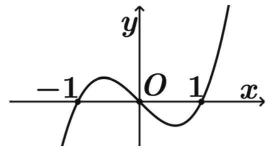
A. $(-4;-1)$. **B.** $\left(2;\dfrac{5}{2}\right)$. **C.** $(-1;1)$. **D.** $(1;2)$.

5. Cho hàm số $y = f'(x-1)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g(x) = f\left(e^{x^2} - 2\right)$ nghịch biến trong khoảng nào dưới đây?



A. $(-1;0)$. **B.** $\left(\sqrt{\ln 2};\sqrt{\ln 5}\right)$. **C.** $\left(-\sqrt{\ln 2};0\right)$. **D.** $(-\infty;-1)$.

6. Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ

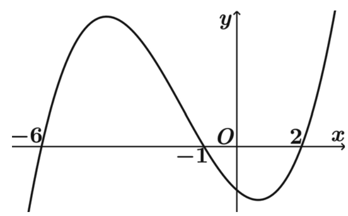


Hàm số $y=f\left(x^2-1\right)$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $(-1;1)$. **B.** $\left(-\infty;-\sqrt{2}\right)$.

C. $(0;1)$. **D.** $\left(1;\sqrt{2}\right)$.

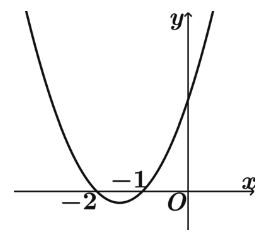
7. Cho hàm số $y=f(x)$. Biết hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hàm số $y=f\left(3-x^2\right)$ đồng biến trên khoảng



A. $(-1;0)$. **B.** $(0;1)$.

C. $(-2;-1)$. **D.** $(2;3)$.

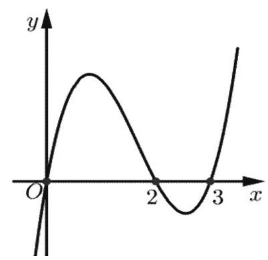
8. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g(x)=f\left(1+2x-x^2\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(-1;0)$. **B.** $(0;1)$.

C. $(2;3)$. **D.** $(-1;1)$.

9. Giả sử $f(x)$ là một đa thức bậc bốn. Đồ thị hàm số $y=f'(1-x)$ được cho như hình vẽ bên. Hỏi hàm số $g(x)=f\left(x^2-3\right)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau

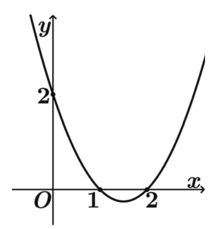


A. $(1;2)$. **B.** $(-2;-1)$.

C. $(0;1)$. **D.** $(-1;0)$.

Nguồn: Thi thử lần 1 – THPT Chuyên Đại học Vinh Nghệ An – Năm 2020-2021

10. Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên dưới.

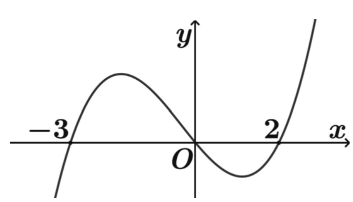


Hàm số $g(x)=f\left(\sqrt{x^2+2x+3}-\sqrt{x^2+2x+2}\right)$ đồng biến trong khoảng nào sau đây:

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right)$.

C. $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$. **D.** $(-1;+\infty)$.

11. Cho hàm số $y=f(x)$, hàm số $y=f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $g(x)=f\left(x^2-2\right)+3f(2-2x)+1$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau:

A. $(0;1)$. **B.** $(-2;-1)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(-1;0)$.

Nguồn: Đề thi thử tốt nghiệp THPT 2020 môn Toán lần 1 trường THPT thị xã Quảng Trị

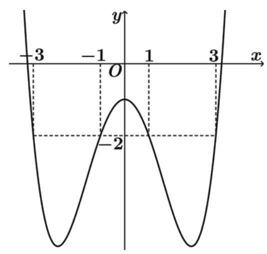
12. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, bảng biến thiên của hàm số $y = f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2 + 2x)$ là:

A. 7. **B.** 5. **C.** 1. **D.** 4.

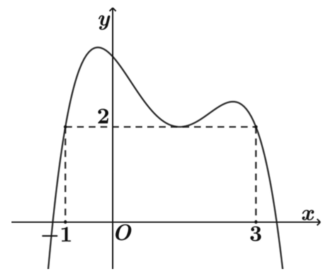
13. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là hàm số $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $y = f'(x+2) - 2$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hỏi hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào?



A. $(-3;-1), (1;3)$. **B.** $(-1;1), (3;5)$. **C.** $(-\infty;-2), (0;2)$. **D.** $(-5;-3), (-1;1)$.

Nguồn: Đề thi HK1 – Chuyên Đại Học Vinh Nghệ An - Năm 2020-2021

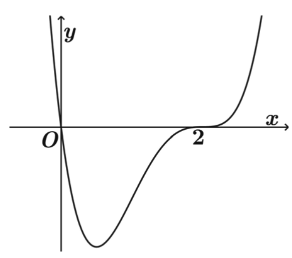
14. Cho hàm số $y = f(x)$, hàm số $y = f'(3x+1) + 2$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?



A. $(-\infty;-4)$. **B.** $(-4;-2)$.

C. $(-2;2)$. **D.** $(2;+\infty)$.

15. Cho hàm số $y = f(x)$, biết đồ thị hàm số $y = f'(x^3 + 1)$ như hình vẽ



Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $(-\infty;2)$. **B.** $(2;4)$. **C.** $(4;9)$. **D.** $(9;+\infty)$.

ĐÁP ÁN

1B	2A	3D	4B	5D	6C	7A	8B	9D	10A
11D	12B	13B	14C	15D					

Câu 1. Chọn B

Ta có: $g'(x)=2x.f'\left(x^2-2\right)$ suy ra $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x=0\\f'\left(x^2-2\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2-2=-1\\x^2-2=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2-2=-1\ (i)\\x^2=4\ (ii)\end{array}\right.$

Từ đồ thị hàm số $y=f'(x)$, ta thấy $f'(x)$ không đổi dấu khi x đi qua điểm -1, do đó toàn bộ các nghiệm của phương trình (i) không làm cho $f'\left(x^2-2\right)$ đổi dấu, hay nói cách khác, khi giải toán trắc nghiệm ta có thể loại bỏ phương trình (i) ra và xét dấu như bình thường sẽ không làm ảnh hưởng tới kết quả của bài toán

Phương trình (ii) có 2 nghiệm đơn là $x=2$ và $x=-2$.

Chú ý rằng khi $x>2,\ x^2-2>2\Rightarrow f'\left(x^2-2\right)>0,$ do đó $g'(x)>0.$ Ta có bảng xét dấu $g'(x)$ (theo phương pháp trắc nghiệm) như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu trên, ta thấy phát biểu hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;0)$ là sai.

Lưu ý: Bảng xét dấu chuẩn của $g'(x)$ khi trình bày tự luận như sau:

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		-1		0		1		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Câu 2. Chọn A

Xét hàm số $g(x)=f\left(2x^2-1\right)$ có $g'(x)=4x.f'\left(2x^2-1\right)$.

Ta có: $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4x=0\\f'\left(2x^2-1\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\2x^2-1=-1\\2x^2-1=1\\2x^2-1=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=0\ (i)\\x^2=1\ (ii)\\x^2=2\ (iii)\end{array}\right.$

Phương trình (i) có nghiệm kép $x=0$, nên $f'\left(2x^2-1\right)$ không đổi dấu khi x đi qua điểm 0.

Phương trình (ii) có hai nghiệm đơn $x=1$ và $x=-1$.

Phương trình (iii) có hai nghiệm đơn $x=\sqrt{2}$ và $x=-\sqrt{2}$.

Vậy hàm số $g'(x)$ đổi dấu 5 lần qua các điểm $-\sqrt{2};-1;0;1;\sqrt{2}$, chú ý rằng với $x>\sqrt{2},\ 2x^2-1>3$

nên $\begin{cases}f'\left(2x^2-1\right)>0\\4x>0\end{cases}\Rightarrow g'(x)>0.$ Từ đó ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		-1		0		1		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu trên, ta thấy hàm số $g(x)$ đồng biến trên $\left(-\sqrt{2};-1\right)$.

Câu 3. Chọn D

Ta có: $y' = 2x.f'\left(x^2-2\right)$ suy ra $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f'\left(x^2-2\right)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2-2=-2 \\ x^2-2=0 \\ x^2-2=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\sqrt{2} \\ x=-\sqrt{2} \\ x=2 \\ x=-2 \end{array}\right.$.

Từ giả thiết, $f'(x)$ đổi dấu qua các điểm $-2; 0; 2$ nên y' đổi dấu qua các điểm $0; \sqrt{2}; -\sqrt{2}; 2; -2$ (do $x=0$ là nghiệm bội lẻ, các nghiệm còn lại đều là nghiệm đơn).

Chú ý rằng với $x \in (2;+\infty)$ thì $x^2-2 \in (2;+\infty)$ nên $f'\left(x^2-2\right) < 0$, do đó $y' = 2xf'\left(x^2-2\right) < 0$.

Từ đó ta có thể xác định dấu của y' thông qua trục số minh họa như sau:

	-2		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		2		x
$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	y

Từ đó ta có khoảng đồng biến là $(-\infty;-2)$.

Câu 4. Chọn B

Ta có: $g'(x) = 2xf'\left(x^2-5\right) \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2-5=-4 \\ x^2-5=-1 \\ x^2-5=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 1 \\ x=\pm 2 \\ x=\pm\sqrt{7} \end{array}\right.$.

Chú ý rằng với $x \to +\infty$, $x^2-5 \to +\infty \Rightarrow f'\left(x^2-5\right) > 0 \Rightarrow g'(x) > 0$. Từ đó ta vẽ bảng xét dấu $g'(x)$

x	$-\infty$		$-\sqrt{7}$		-2		-1		0		1		2		$\sqrt{7}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ đó $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $\left(2;\dfrac{5}{2}\right)$.

Câu 5. Chọn D

Từ giả thiết, đồ thị hàm số $y = f'(x)$ được xác định bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số $y = f'(x-1)$ sang trái 1 đơn vị. Từ đó $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=3 \end{array}\right.$, trong đó $x=0$ là nghiệm đơn và $x=3$ là nghiệm kép.

Xét $g(x) = f\left(e^{x^2}-2\right)$ có $g'(x) = 2xe^{x^2}f'\left(e^{x^2}-2\right) \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ e^{x^2}-2=0 \\ e^{x^2}-2=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{\ln 2} \\ e^{x^2}-2=3\ (i) \end{array}\right.$.

Các nghiệm của (i) không làm cho $g'(x)$ đổi dấu, do $f'(x)$ không đổi dấu khi x qua 3.

Chú ý rằng $x \to +\infty$ thì $e^{x^2} - 2 \to +\infty \Rightarrow f'\left(e^{x^2} - 2\right) > 0$ nên $g'(x) > 0$. Từ đó ta có bảng xét dấu $g'(x)$ theo phương pháp trắc nghiệm (bỏ qua các điểm $\pm\sqrt{\ln 5}$) như sau:

x	$-\infty$		$-\sqrt{\ln 2}$		0		$\sqrt{\ln 2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0

Từ đó $g(x)$ nghịch biến trên $(-\infty;-1)$.

Câu 6. Chọn C

Xét $g(x) = f(x^2 - 1)$, ta có $g'(x) = 2xf'(x^2 - 1)$.

Do đó $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ f'(x^2 - 1) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - 1 = -1 \\ x^2 - 1 = 0 \\ x^2 - 1 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{array}\right.$. Ở đây nghiệm $x = 0$ là nghiệm bội lẻ, các nghiệm $x = \pm 1$ và $x = \pm\sqrt{2}$ là các nghiệm đơn.

Vậy $g'(x)$ đổi dấu 5 lần qua các điểm $0; -1; 1; \sqrt{2}; -\sqrt{2}$

Chú ý rằng khi $x \to +\infty$ thì $x^2 - 1 \to +\infty \Rightarrow f'(x^2 - 1) > 0$, do đó $g'(x) > 0$. Từ đó ta có trục số minh họa dấu của $g'(x)$ như sau:

x		$-\sqrt{2}$		-1		0		1		$\sqrt{2}$	
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Từ đây, hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$.

Câu 7. Chọn A

Xét hàm $g(x) = f(3 - x^2) \Rightarrow g'(x) = -2xf'(3 - x^2)$.

Ta có: $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2x = 0 \\ f'(3 - x^2) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 3 - x^2 = -6 \\ 3 - x^2 = -1 \\ 3 - x^2 = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = 9 \\ x^2 = 4 \\ x^2 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = \pm 2 \\ x = \pm 3 \end{array}\right.$. Các nghiệm này đều làm cho $g'(x)$ đổi dấu.

Với $x > 3$, ta có $x^2 > 9 \Rightarrow 3 - x^2 < -6 \Rightarrow f'(3 - x^2) < 0$, do đó $g'(x) = -2xf'(3 - x^2) > 0$, từ đó ta có bảng xét dấu $g'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-3		-2		-1		0		1		2		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu trên, ta thấy $g(x)$ đồng biến trên $(-1;0)$.

Câu 8. Chọn B

Xét $g'(x) = (2 - 2x)f'(1 + 2x - x^2)$, từ giả thiết ta có:

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\1+2x-x^2=-2\\1+2x-x^2=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x^2-2x-3=0\\x^2-2x-2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=3\\x=-1\\x=1\pm\sqrt{3}\end{array}\right.$$

Chú ý rằng khi $x\to+\infty,\ 1+2x-x^2\to-\infty\Rightarrow f'\left(1+2x-x^2\right)>0,$ ngoài ra $2-2x<0$ nên $g'(x)<0.$

Từ đó ta có bảng xét dấu $g'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		$1-\sqrt{3}$		1		$1+\sqrt{3}$		3		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0

Vậy $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$.

Câu 9. Chọn D

Vì $f(x)$ là hàm đa thức bậc bốn nên $f'(x)$ là hàm đa thức bậc ba, do đó $f'(1-x)$ là hàm đa thức bậc ba, đồ thị hàm số này có 3 nghiệm là $0, 2, 3$. Giả sử $f'(1-x)=ax(x-2)(x-3)\ \ (a>0)$

Đặt $1-x=t,$ ta có $f'(t)=a(1-t)(1-t-2)(1-t-3)=a(1-t)(t+1)(t+2)$

Suy ra $f'(x)=a(1-x)(x+1)(x+2).$

Từ đó ta có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-2		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Ta có: $g'(x)=2xf'\left(x^2-3\right)\Rightarrow g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\f'\left(x^2-3\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2-3=-2\\x^2-3=-1\\x^2-3=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm1\\x=\pm\sqrt{2}\\x=\pm2\end{array}\right.$

Từ đó $g(x)$ nghịch biến trên $(-1;0)$.

Câu 10. Chọn A

Xét $u(x)=\sqrt{x^2+2x+3}-\sqrt{x^2+2x+2}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2x+3}+\sqrt{x^2+2x+2}}.$

Với $x\in\mathbb{R},$ ta có $\sqrt{x^2+2x+3}+\sqrt{x^2+2x+2}=\sqrt{(x+1)^2+2}+\sqrt{(x+1)^2+1}\ge\sqrt{2}+1>2$ nên $f'\left(u(x)\right)>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ (theo đồ thị $f'(x)>0\ \forall x>2$)

Ta có: $g'(x)=\left[f\left(u(x)\right)\right]'=f'\left(u(x)\right).u'(x)$ suy ra $g'(x)\ge0\Leftrightarrow u'(x)\ge0$

$$\Leftrightarrow\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}}-\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\ge0\Leftrightarrow(x+1)\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+3}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\right)\ge0\Leftrightarrow x+1\le0\Leftrightarrow x\le-1.$$

Câu 11. Chọn D

Ta có: $g'(x)=2xf'\left(x^2-2\right)-6f'(2-2x).$

Xét hệ: $\begin{cases} 2xf'\left(x^2-2\right) \le 0 \\ -6f'\left(2-2x\right) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xf'\left(x^2-2\right) \le 0 \ \ (i) \\ f'\left(2-2x\right) \ge 0 \ \ (ii) \end{cases}$.

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(x)$, ta có: $(ii) \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \le 2-2x \le 0 \\ 2-2x \ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \le x \le \dfrac{5}{2} \\ x \le 0 \end{cases}$.

Với $x \in \left(1;\dfrac{5}{2}\right)$, ta có $(i) \Leftrightarrow f'\left(x^2-2\right) \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-2 \le -3 \\ 0 \le x^2-2 \le 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow 2 \le x^2 \le 4 \Leftrightarrow \sqrt{2} \le x \le 2.$

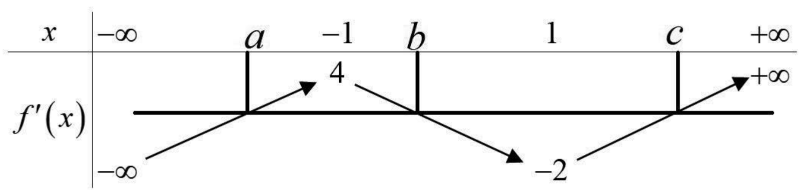
Vậy hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $\left(\sqrt{2};2\right)$.

Với $x \in (-\infty;0)$, ta có $(i) \Leftrightarrow f'\left(x^2-2\right) \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -3 \le x^2-2 \le 0 \\ x^2-2 \ge 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 \le 2 \\ x^2 \ge 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\sqrt{2} \le x < 0 \\ x \le -2 \end{array}\right.$.

Vậy hàm số nghịch biến trong $(-\infty;-2)$ và $\left(-\sqrt{2};0\right)$.

Câu 12. Chọn B

Từ bảng biến thiên của hàm số $y=f'(x)$, ta thấy phương trình $f'(x)=0$ có 3 nghiệm $x=a \in (-\infty;-1)$, $x=b \in (-1;1)$ và $x=c \in (1;+\infty)$.



Xét $g(x)=f\left(x^2+2x\right)$ có $g'(x)=(2x+2)f'\left(x^2+2x\right)$.

Ta có: $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ f'\left(x^2+2x\right)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x^2+2x=a \ \ (i) \\ x^2+2x=b \ \ (ii) \\ x^2+2x=c \ \ (iii) \end{array}\right.$.

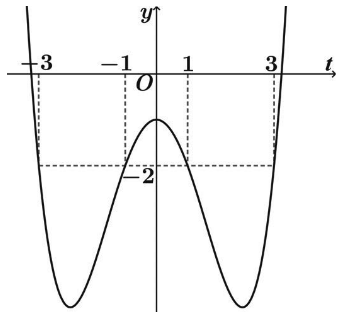
Dễ thấy phương trình $x^2+2x=m$ có 2 nghiệm phân biệt khi $m>-1$, vô nghiệm khi $m<-1$, do đó (i) vô nghiệm và các phương trình $(ii),(iii)$ đều có 2 nghiệm phân biệt.

Do đó $g'(x)$ đổi dấu 5 lần nên $g(x)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 13. Chọn B

Đặt $x=t+2$, ta có $f'(x) \le 0 \Leftrightarrow f'(t+2) \le 0 \Leftrightarrow f'(t+2)-2 \le -2 \ \ (i)$.

Trên hệ trục tọa độ Oty, vẽ đồ thị $y=f'(t+2)-2$ (hình vẽ)

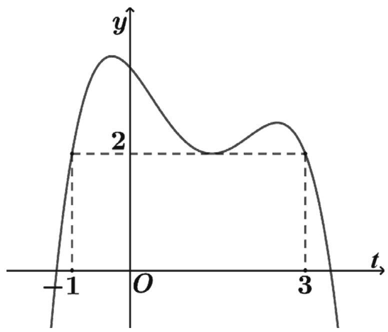


Từ đồ thị, ta thấy $(i) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -3 \le t \le -1 \\ 1 \le t \le 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -3 \le x-2 \le -1 \\ 1 \le x-2 \le 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 \le x \le 1 \\ 3 \le x \le 5 \end{array}\right.$.

Vậy $f(x)$ nghịch biến trên $(-1;1)$ và $(3;5)$.

Câu 14. Chọn C

Đặt $x = 3t+1$, ta có $f'(x) \ge 0 \Leftrightarrow f'(3t+1) \ge 0 \Leftrightarrow f'(3t+1)+2 \ge 2$.



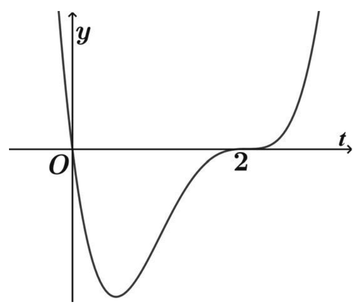
Vẽ đồ thị hàm số $y = f'(3t+1)+2$ trên hệ trục tọa độ Oty, ta thấy đồ thị nằm trên đường $y=2$ khi và chỉ khi $-1 \le t \le 3 \Leftrightarrow -2 \le 3t+1 \le 10 \Leftrightarrow -2 \le x \le 10$.

Do đó $f(x)$ đồng biến trên $(-2;10)$.

Câu 15. Chọn D

Đặt $x = t^3+1$, ta có $f'(x) \ge 0 \Leftrightarrow f'(t^3+1) \ge 0$.

Trên hệ trục tọa độ Oty, vẽ đồ thị $y = f'(t^3+1)$ (hình vẽ)



Từ đồ thị, ta thấy $f'(t^3+1) \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \ge 2 \\ t \le 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t^3+1 \ge 9 \\ t^3+1 \le 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge 9 \\ x \le 1 \end{array}\right.$.

Vậy hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(9;+\infty)$.

BÀI 3 – CỰC TRỊ HÀM HỢP KHÔNG THAM SỐ

Chúng ta gặp rất nhiều bài toán cực trị hàm hợp, hàm tổng và đề bài cho đồ thị. Đa số các bài toán này ta đều có thể dùng phương pháp ghép trục, nhưng ta sẽ không trình bày trong phần này phương pháp đó.

1. PHƯƠNG PHÁP

Ví dụ 1. Cho hàm số bậc bốn $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Số điểm cực đại của hàm số $y=f\left(\sqrt{x^2-2x+2}\right)$ là:

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty$

A. 1. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Giải

Phân tích và giải bài toán

Để tìm số điểm cực đại của hàm số $y=f\left(\sqrt{x^2-2x+2}\right)$, ta cần tìm xem có bao nhiêu lần y' đổi dấu từ dương sang âm.

Xét $g\left(x\right)=f\left(\sqrt{x^2-2x+2}\right)$ có

$$g'\left(x\right)=f'\left(\sqrt{x^2-2x+2}\right).\frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x+2}}=f'\left(\sqrt{x^2-2x+2}\right).\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}}.$$

Tương tự như phần đơn điệu hàm hợp ở bài trước, ta tiếp tục tìm các điểm làm đạo hàm đổi dấu

Ta có: $g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'\left(\sqrt{x^2-2x+2}\right)=0\\x-1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x^2-2x+2}=-1\\\sqrt{x^2-2x+2}=1\\\sqrt{x^2-2x+2}=3\\x=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-2x-7=0\\x=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1-2\sqrt{2}\\x=1+2\sqrt{2}\\x=1\end{array}\right..$

Chú ý rằng khi $x\to-\infty$ thì $\sqrt{x^2-2x+2}\to+\infty,$ nên $f'\left(\sqrt{x^2-2x+2}\right)>0,$ do đó $g'\left(x\right)<0.$

Từ đó ta có bảng xét dấu $g'\left(x\right)$ như sau:

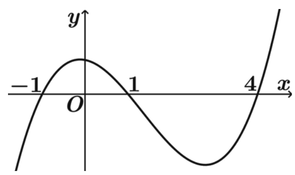
x	$-\infty$		$1-2\sqrt{2}$		1		$1+2\sqrt{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ đó hàm số $g\left(x\right)$ có 3 điểm cực trị, trong đó có 2 điểm cực tiểu và 1 điểm cực đại.

→ Chọn đáp án A

Lưu ý: *Nếu đề bài chỉ hỏi về số điểm cực trị của hàm số $g(x)$, các em chỉ cần tìm các điểm làm cho $g'(x)$ đổi dấu và kết luận. Nếu $g(x)$ liên tục và có $2n$ điểm cực trị, hàm số $g(x)$ sẽ có n điểm cực đại và n điểm cực tiểu.*

Ví dụ 2. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và có đạo hàm $f'(x)$ trên tập số thực $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ cho như hình vẽ. Đồ thị hàm số $g(x)=f(x^2+x+2)$ có hoành độ điểm cực đại là:



A. $x=1$. **B.** $x=-2$. **C.** $x=\frac{1}{2}$. **D.** $x=-\frac{1}{2}$.

Giải

Phân tích và giải bài toán

Tương tự bài trước, ta tính đạo hàm và tìm các điểm làm cho đạo hàm đổi dấu.

Xét $g'(x)=(2x+1)f'(x^2+x+2)$. Ta có:

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+1=0 \\ f'(x^2+x+2)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{1}{2} \\ x^2+x+2=-1 \\ x^2+x+2=1 \\ x^2+x+2=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-0,5 \\ x=1 \\ x=-2 \end{array}\right.$$

Vậy $g'(x)$ đổi dấu qua 3 điểm $-0,5;1;-2$. Ngoài ra dễ thấy $\lim\limits_{x\to+\infty} g'(x)>0$ nên ta có bảng xét dấu $g'(x)$ như sau

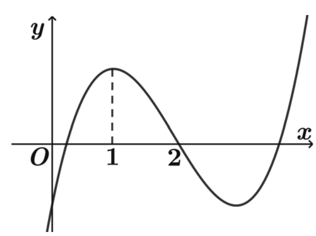
x	$-\infty$		-2		$-0,5$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy hoành độ điểm cực đại của đồ thị hàm số $y=g(x)$ là $x=-\frac{1}{2}$.

→ Chọn đáp án D

Lưu ý: *Em cần phân biệt được điểm cực đại của hàm số, cực đại của hàm số và điểm cực đại của đồ thị hàm số.*

Ví dụ 3. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình dưới



Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f(e^x-x)$ là

A. 5. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

Giải

Phân tích và giải bài toán

Bài toán cho thông tin về đồ thị hàm $f(x)$, nhưng khi giải toán liên quan tới đơn điệu và cực trị, các em cần quan tâm đến sự đổi dấu của $f'(x)$. Vì thế thông tin quan trọng liên quan tới dấu của $f'(x)$ cũng được thể hiện qua đồ thị thông qua 2 điểm cực trị.

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f(x)$, ta thấy $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=a\,(a>2) \end{array}\right.$.

Nhớ rằng với $x\in(-\infty;-1)$, đồ thị hàm số đi lên, nên $f'(x)\ge 0$. Tương tự với các khoảng $(1;a)$ và $(a;+\infty)$.

Ta có: $g'(x)=\left(e^x-1\right)f'\left(e^x-x\right)$. Do đó $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} e^x-1=0 \\ f'\left(e^x-x\right)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ e^x-x=1\ (i) \\ e^x-x=a\ (ii) \end{array}\right.$.

Xét hàm số $h(x)=e^x-x$ có $h'(x)=e^x-1 \Rightarrow h'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$. Ta có bảng biến thiên của hàm số $y=h(x)$ như sau:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Từ đó, phương trình (i) có đúng 1 nghiệm $x=0$ nhưng $f'\left(e^x-x\right)$ không đổi dấu qua nghiệm đó, phương trình (ii) có 2 nghiệm phân biệt. Vậy $g'(x)$ đổi dấu 3 lần qua các nghiệm của (ii) và $x=0$, nên $g(x)$ có 3 điểm cực trị

→ Chọn đáp án B

Lưu ý: *Chú ý rằng khi x qua điểm* 0 *không làm cho* $f'\left(e^x-x\right)$ *đổi dấu, nhưng* e^x-1 *có đổi dấu, dẫn đến* $g'(x)$ *đổi dấu.*

2. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

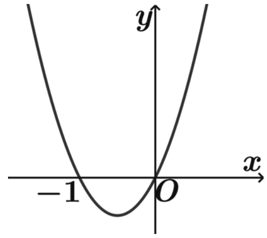
1. Cho hàm số $f(x)$. Bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f\left(x^2-2x\right)$ là

A. 7. **B.** 9. **C.** 5. **D.** 3.

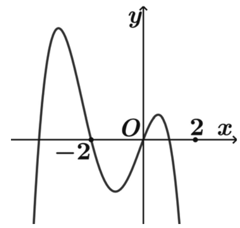
2. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có hàm số đạo hàm $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số điểm cực đại của hàm số $g(x)=f\left(x-x^2\right)$ là

A. 3. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 2.

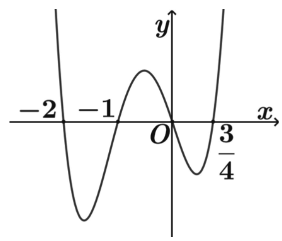
3. Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên dưới. Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f\left(-x^3+3x\right)$ là



A. 9. **B.** 3.
C. 7. **D.** 5.

4. Cho hàm bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.

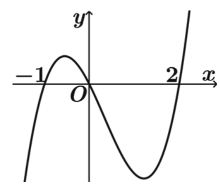
Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f\left(2x^3+3x^2\right)$ là



A. 11. **B.** 3.
C. 7. **D.** 5.

5. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ.

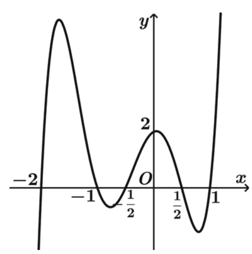
Hỏi hàm số $y=f\left(\sqrt{1+\sin x}-1\right)$ có bao nhiêu điểm cực đại trên khoảng $(-2\pi;2\pi)$?



A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 7.

6. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị đạo hàm $f'(x)$ như hình vẽ

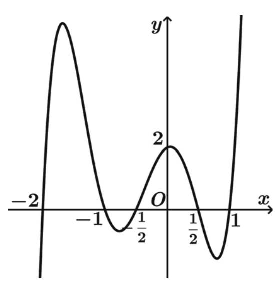
Số điểm cực đại của hàm số $y=f\left(2-\sqrt{16-x^2}\right)$ là:



A. 9. **B.** 5.
C. 8. **D.** 4.

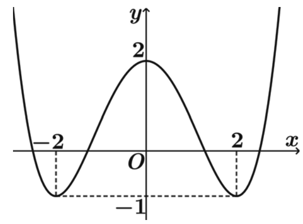
7. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị đạo hàm $f'(x)$ như hình vẽ

Số điểm cực đại của hàm số $y=f\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)$ là:



A. 0. **B.** 1.
C. 2. **D.** 3.

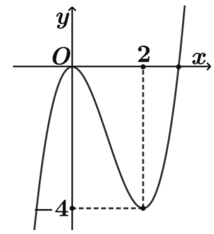
8. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Số điểm cực trị của hàm số $y = f\left(f(x)\right)$ là

A. 10. **B.** 9.
C. 7. **D.** 8.

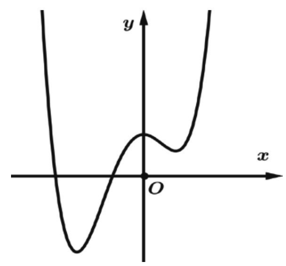
9. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ



Hàm số $y = f\left[f(x)\right]$ có bao nhiêu điểm cực đại?

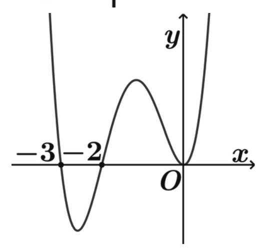
A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

10. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có 3 điểm cực trị (trong đó có 1 điểm $x = 0$) và có đồ thị như hình vẽ. Tìm số điểm cực trị của hàm số $f\left(\dfrac{1}{(x-1)^2}\right)$



A. 3. **B.** 0.
C. 1. **D.** 2.

11. Cho hàm số bậc năm $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $g(x) = f\left(3 - 2\sqrt{x+1}\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 0. **B.** 1.
C. 2. **D.** 3.

12. Cho hàm số $f(x)$ có $f'(x) = 4x^3 + 2x\ \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x) = f^3\left(x^2 - 2x - 3\right)$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

13. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = 3x^2 - 3$ và $f(2) = 4$. Hàm số $g(x) = \left[f(1-2x)\right]^2$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

14. **[ĐỀ CHÍNH THỨC 2019 – MÃ 112]** Cho hàm số $y = f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:

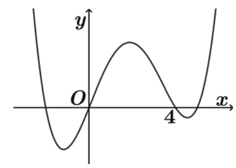
x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	↘	-3	↗	2	↘	-1	↗	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $y = f\left(4x^2 + 4x\right)$ là

A. 3. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 9.

15. **[ĐỀ THAM KHẢO 2020]** Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.

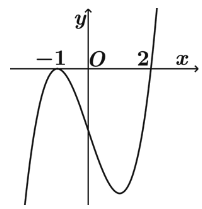
Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^3 + 3x^2)$ là



A. 5. **B.** 3.

C. 7. **D.** 11.

16. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ.



Số điểm cực đại của hàm số $y = \left[xf(x+2)\right]^2$ là

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

ĐÁP ÁN

1A	**2A**	**3A**	**4C**	**5C**	**6D**	**7C**	**8B**	**9C**	**10D**
11C	**12C**	**13A**	**14B**	**15C**	**16A**				

Câu 1. Chọn A

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y = f'(x)$, ta thấy $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a\ (a < -1) \\ x = b\ (-1 < b < 0) \\ x = c\ (0 < c < 1) \\ x = d\ (d > 1) \end{array}\right.$.

Xét $g'(x) = (2x-2)f'(x^2-2x)$. Ta có: $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-2=0 \\ f'(x^2-2x)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x^2-2x = a\ (i) \\ x^2-2x = b\ (ii) \\ x^2-2x = c\ (iii) \\ x^2-2x = d\ (iv) \end{array}\right.$.

Xét hàm số $h(x) = x^2 - 2x$ có $h'(x) = 2x - 2$, ta có bảng biến thiên của hàm số $h(x)$ như sau:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Từ đó, phương trình (i) vô nghiệm, các phương trình $(ii), (iii)$ và (iv) đều có 2 nghiệm phân biệt, nên $g'(x)$ đổi dấu 7 lần nên $g(x)$ có 7 điểm cực trị.

Câu 2. Chọn A

Xét $g'(x)=(1-2x)f'\left(x-x^2\right)\Rightarrow g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1-2x=0\\ f'\left(x-x^2\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1-2x=0\\ x-x^2=-1\\ x-x^2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{2}\\ x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}\\ x=0\\ x=1\end{array}\right.$.

Từ đó hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực trị, ngoài ra dễ thấy $\lim\limits_{x\to+\infty}f'\left(x-x^2\right)>0$ suy ra $\lim\limits_{x\to+\infty}g'(x)<0$, do đó hàm số có 3 điểm cực đại và 2 điểm cực tiểu.

Câu 3. Chọn A

Từ đồ thị hàm số $y=f(x)$, ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=a\ (a<-2)\\ x=b\ (-2<b<0)\\ x=c\ (0<c<2)\end{array}\right.$.

Xét $g'(x)=\left(-3x^2+3\right)f'\left(-x^3+3x\right)$. Ta có $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-3x^2+3=0\\ f'\left(-x^3+3x\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-1\\ -x^3+3x=a\ \ (i)\\ -x^3+3x=b\ \ (ii)\\ -x^3+3x=c\ \ (iii)\end{array}\right.$

Đặt $h(x)=-x^3+3x$ có $h'(x)=-3x^2+3$. Ta có bảng biến thiên hàm số $h(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

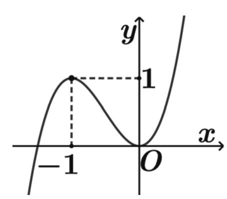
Từ đó (i) có đúng 1 nghiệm, các phương trình (ii) và (iii) đều có 3 nghiệm phân biệt, do đó phương trình $g'(x)=0$ có 9 nghiệm phân biệt và $g'(x)$ đổi dấu qua các điểm đó, nên $g(x)$ có 9 điểm cực trị.

Câu 4. Chọn C

Từ giả thiết, ta có: $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=a\\ x=b\\ x=c\end{array}\right.$, với $-2<a<-1<b<0<c<\dfrac{3}{4}$.

Xét $g'(x)=\left(6x^2+6x\right)f'\left(2x^3+3x^2\right)$, ta có $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=-1\\ 2x^3+3x^2\in\{a;b;c\}\end{array}\right.$

Ta vẽ đồ thị hàm số $y=2x^3+3x^2$, ta thấy các phương trình $2x^3+3x^2=a;\ 2x^3+3x^2=b$ đều có đúng 1 nghiệm, phương trình $2x^3+3x^2=c$ có 3 nghiệm, các nghiệm này đều là các nghiệm đơn.



Do đó $g'(x)$ đổi dấu 7 lần nên $g(x)$ có 7 điểm cực trị.

Câu 5. Chọn C

Xét $g(x)=f\left(\sqrt{1+\sin x}-1\right)\Rightarrow g'(x)=f'\left(\sqrt{1+\sin x}-1\right).\dfrac{\cos x}{2\sqrt{1+\sin x}}$.

Vì $1+\sin x\geq 0\ \forall x\in\mathbb{R}$ nên ta chỉ cần xét dấu của $f'\left(\sqrt{1+\sin x}-1\right).\cos x$

Ta có: $f'\left(\sqrt{1+\sin x}-1\right).\cos x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'\left(\sqrt{1+\sin x}-1\right)=0\\ \cos x=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{1+\sin x}-1=-1\\ \sqrt{1+\sin x}-1=0\\ \sqrt{1+\sin x}-1=2\\ \cos x=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}\sin x=-1 & (i)\\ \sin x=0 & (ii)\\ \sin x=8 & (iii)\\ \cos x=0 & (iv)\end{array}\right.$

Các nghiệm của (i) không làm cho $f'\left(\sqrt{1+\sin x}-1\right)$ đổi dấu, phương trình (iii) vô nghiệm. Ta có: $(ii)\Leftrightarrow x=k\pi;(iv)\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$. Từ đó trên $(-2\pi;2\pi)$, hàm số $g(x)$ có các điểm cực trị là $-\dfrac{3\pi}{2};-\pi;-\dfrac{\pi}{2};0;\dfrac{\pi}{2};\pi;\dfrac{3\pi}{2}$ nên $g(x)$ có 7 điểm cực trị thuộc $(-2\pi;2\pi)$. Chú ý rằng khi $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$, ta thấy $\sqrt{1+\sin x}-1\in\left(0;\sqrt{2}-1\right)$ nên $f'\left(\sqrt{1+\sin x}-1\right)<0$, do đó $g'(x)<0$. Từ đó ta có bảng xét dấu $g'(x)$ như sau

x	-2π		$-\frac{3\pi}{2}$		$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	$\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	$\|$	$+$	

Do đó hàm số $y=g(x)$ có đúng 3 điểm cực đại trên khoảng $(-2\pi;2\pi)$.

Câu 6. Chọn D

Hàm số xác định khi $16-x^2\geq 0\Leftrightarrow -4\leq x\leq 4$.

Xét $g(x)=f\left(2-\sqrt{16-x^2}\right)$ có $g'(x)=f'\left(2-\sqrt{16-x^2}\right).\dfrac{x}{\sqrt{16-x^2}}$.

Ta có: $f'\left(2-\sqrt{16-x^2}\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}2-\sqrt{16-x^2}=-2 & (i)\\ 2-\sqrt{16-x^2}=-1 & (ii)\\ 2-\sqrt{16-x^2}=-0,5 & (iii)\\ 2-\sqrt{16-x^2}=0,5 & (iv)\\ 2-\sqrt{16-x^2}=1 & (v)\end{array}\right.$.

Dễ thấy phương trình $2-\sqrt{16-x^2}=a$ với $a\in(-2;2)$ có 2 nghiệm phân biệt, do đó các phương trình $(ii),(iii),(iv)$ và (v) đều có 2 nghiệm phân biệt, phương trình $(i)\Leftrightarrow x^2=0\Leftrightarrow x=0$ (nghiệm kép).

Ngoài ra $\frac{x}{\sqrt{16-x^2}}=0 \Leftrightarrow x=0.$ Vậy $g'(x)$ đổi dấu $2.4+1=9$ lần, nên hàm số $g(x)$ có 9 điểm cực trị. Lại có $x \to 4^- \Rightarrow \sqrt{16-x^2} \to 0^+ \Rightarrow 2-\sqrt{16-x^2} \to 2^- \Rightarrow f'\left(2-\sqrt{16-x^2}\right)>0.$

Do đó $\lim\limits_{x \to 4^-} g'(x)=\lim\limits_{x \to 4^-} f'\left(2-\sqrt{16-x^2}\right)\frac{x}{\sqrt{16-x^2}}>0,$ hàm số $g(x)$ liên tục trên $[-4;4]$ có số lẻ điểm cực trị nên số điểm cực đại bằng 4, số điểm cực tiểu bằng 5.

Câu 7. Chọn C

Xét hàm số $g(x)=f\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)$ có tập xác định $[-1;1]$.

Ta có: $g'(x)=f'\left(1-\sqrt{1-x^2}\right).\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

Ta có: $f'\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 1-\sqrt{1-x^2}=-2 & (i) \\ 1-\sqrt{1-x^2}=-1 & (ii) \\ 1-\sqrt{1-x^2}=-0,5 & (iii) \\ 1-\sqrt{1-x^2}=0,5 & (iv) \\ 1-\sqrt{1-x^2}=1 & (v) \end{array}\right.$.

Dễ thấy phương trình (v) có nghiệm kép $x=0,$ các phương trình $(i),(ii),(iii)$ đều vô nghiệm, và phương trình (iv) có 2 nghiệm phân biệt là $x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$

Ta lại có $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=0 \Leftrightarrow x=0.$ Do đó $g'(x)$ đổi dấu 3 lần qua các điểm $-\frac{\sqrt{3}}{2}; 0; \frac{\sqrt{3}}{2}.$

Dễ thấy với $x \in \left(0;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ thì $x^2 \in \left(0;\frac{3}{4}\right) \Rightarrow 1-x^2 \in \left(\frac{1}{4};1\right) \Rightarrow \sqrt{1-x^2} \in \left(\frac{1}{2};1\right) \Rightarrow 1-\sqrt{1-x^2} \in \left(0;\frac{1}{2}\right),$ do đó $f'\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)>0.$ Từ đó ta có bảng xét dấu $g'(x)$ như sau

x	-1		$-\frac{\sqrt{3}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{3}}{2}$		1
$g'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	$\Vert$

Vậy hàm số $g(x)$ có đúng 2 điểm cực đại.

Câu 8. Chọn B

Xét $g(x)=f(f(x))$ có $g'(x)=f'(f(x)).f'(x) \Rightarrow g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(f(x))=0 \\ f'(x)=0 \end{array}\right.$.

Ta có: $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=0 \\ x=2 \end{array}\right. \Rightarrow f'(f(x))=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} f(x)=-2 & (i) \\ f(x)=0 & (ii) \\ f(x)=2 & (iii) \end{array}\right.$.

Dễ thấy phương trình (i) vô nghiệm, phương trình (ii) có 4 nghiệm đơn, phương trình (iii) có 3 nghiệm, trong đó có 2 nghiệm đơn và 1 nghiệm kép (là nghiệm $x=0$). Vậy $f'\left(f(x)\right)$ đổi dấu 6 lần, nên $g'(x)$ đổi dấu 9 lần. Vậy hàm số $y=f\left(f(x)\right)$ có tất cả 9 điểm cực trị.

Câu 9. Chọn C

Xét $g(x)=f\left[f(x)\right]$ thì $g'(x)=f'\left[f(x)\right].f'(x)$.

Do đó $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \\ f'\left[f(x)\right]=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \\ f(x)=0 \\ f(x)=2 \end{array}\right.$.

Từ đồ thị hàm số $y=f(x)$, ta thấy phương trình $f(x)=0$ có đúng 1 nghiệm đơn (nghiệm còn lại là nghiệm kép $x=0$), còn phương trình $f(x)=2$ có đúng 1 nghiệm đơn. Do đó $g'(x)$ đổi dấu 4 lần nên $g(x)$ có 4 điểm cực trị. Mà hàm số $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $g(x)$ có đúng 2 điểm cực đại.

Câu 10. Chọn D

Từ đồ thị hàm số $y=f(x)$, ta thấy $f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=b<0 \\ x=0 \\ x=c>0 \end{array}\right.$.

Xét hàm $g(x)=f\left(\dfrac{1}{(x-1)^2}\right)$, TXĐ: $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$. Ta có: $g'(x)=-\dfrac{2}{(x-1)^3}f'\left(\dfrac{1}{(x-1)^2}\right)$,

Do đó: $g'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{(x-1)^2}=c \Leftrightarrow x=1\pm\dfrac{1}{\sqrt{c}}$. Hàm số có 2 điểm cực trị.

Câu 11. Chọn C

Xét $g'(x)=f'\left(3-2\sqrt{x+1}\right).\dfrac{-1}{\sqrt{x+1}}$. Ta có: $f'\left(3-2\sqrt{x+1}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 3-2\sqrt{x+1}=-3 & (i) \\ 3-2\sqrt{x+1}=-2 & (ii) \\ 3-2\sqrt{x+1}=0 & (iii) \end{array}\right.$.

Các phương trình (i) và (ii) đều có đúng 1 nghiệm, vì hàm số $f'(x)$ không đổi dấu qua $x=0$ (dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(x)$), nên các nghiệm của (iii) không làm cho $f'\left(3-2\sqrt{x+1}\right)$ đổi dấu.

Do đó $g'(x)$ đổi dấu 2 lần nên $g(x)$ có đúng 2 điểm cực trị.

Câu 12. Chọn C

Ta có: $f'(x)=x\left(4x^2+2\right) \Rightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ (nghiệm đơn).

Xét $g'(x)=3f^2\left(x^2-2x-3\right).f'\left(x^2-2x-3\right).(2x-2)$

Ta có: $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} f^2\left(x^2-2x-3\right)=0 & (i) \\ f'\left(x^2-2x-3\right)=0 & (ii) \\ 2x-2=0 & (iii) \end{array}\right.$. Các nghiệm của (i) không làm cho $g'(x)$ đổi dấu.

Ta có: $(ii) \Leftrightarrow x^2-2x-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=3 \end{array}\right.$. Vậy $g'(x)$ đổi dấu 3 lần qua các điểm $-1;1;3$ nên hàm số đã cho có 3 điểm cực trị. Đồng thời chú ý rằng $\lim\limits_{x\to+\infty} g'(x)=+\infty$ nên $g(x)$ có 2 điểm cực tiểu.

Câu 13. Chọn A

Để đơn giản, ta xét hàm số $h(x)=\left[f(x)\right]^2 \Rightarrow h(1-2x)=g(x)$. Do đó số điểm cực trị của hàm số $g(x)$ bằng số điểm cực trị của hàm số $h(x)$.

Từ giả thiết, $f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=x^3-3x+C$. Chú ý rằng $f(2)=2^3-3.2+C=4 \Rightarrow C=2$

Vậy $f(x)=x^3-3x+2$.

Xét $h'(x)=2f(x).f'(x) \Rightarrow h'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=0 \\ f'(x)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3-3x+2=0 \\ 3x^2-3=0 \end{array}\right.$

Phương trình $f(x)=0$ có 2 nghiệm $x=-2$ (nghiệm đơn) và $x=1$ (nghiệm kép). Từ đó $h'(x)$ đổi dấu 3 lần qua các điểm $x=-1; x=1$ và $x=-2$.

Câu 14. Chọn B

Ta có: $y'=(8x+4)f'\left(4x^2+4x\right) \Rightarrow y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 8x+4=0 \\ f'\left(4x^2+4x\right)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=\dfrac{-1}{2} & \\ 4x^2+4x=a\in(-\infty;-1) & (i) \\ 4x^2+4x=b\in(-1;0) & (ii) \\ 4x^2+4x=c\in(0;1) & (iii) \\ 4x^2+4x=d\in(1;+\infty) & (iv) \end{array}\right.$.

Xét hàm số $g(x)=4x^2+4x$, ta có bảng biến thiên hàm $g(x)$ như sau:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Từ đó, ta thấy các phương trình $(ii),(iii),(iv)$ đều có 2 nghiệm phân biệt, phương trình (i) vô nghiệm nên $y'=0$ có tất cả 7 nghiệm, và y' đổi dấu qua các nghiệm đó nên hàm số đã cho có 7 điểm cực trị.

Câu 15. Chọn C

Xét $g'(x)=\left(3x^2+6x\right)f'\left(x^3+3x^2\right)=3x(x+2)f'\left(x^3+3x^2\right)$.

Ta có: $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-2\\f'(x^3+3x^2)=0\ (i)\end{array}\right.$. Từ đồ thị hàm số $y=f(x)$, ta thấy

$f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=a\ (a<0)\\x=b\ (0<b<4)\\x=c\ (c>4)\end{array}\right.$. Do đó $f'(x^3+3x^2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^3+3x^2=a\ (ii)\\x^3+3x^2=b\ (iii)\\x^3+3x^2=c\ (iv)\end{array}\right.$.

Xét hàm số $h(x)=x^3+3x^2$, ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$h'(x)$		+	0	–	0	+	
$h(x)$	$-\infty$	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta thấy (ii) và (iv) có đúng 1 nghiệm, (iii) có đúng 3 nghiệm nên phương trình $f'(x^3+3x^2)=0$ có 5 nghiệm, do đó hàm số đã cho có đúng 7 điểm cực trị.

Câu 16. Chọn A

Xét $g(x)=\left[xf(x+2)\right]^2\Rightarrow g(x-2)=\left[(x-2)f(x)\right]^2=(x-2)^2f^2(x)$.

Đặt $f(x)=a(x+1)^2(x-2)\Rightarrow f^2(x)=a^2(x+1)^4(x-2)^2$, ta có: $g(x-2)=a^2(x+1)^4(x-2)^4$

Lưu ý rằng số điểm cực đại của hàm số $g(x)$ bằng số điểm cực đại của hàm số $g(x-2)$.

Xét $h(x)=g(x-2)=a^2(x+1)^4(x-2)^4$ có

$$h'(x)=a^2\left[4(x+1)^3(x-2)^4+4(x-2)^3(x+1)^4\right]=4a^2(x+1)^3(x-2)^3(x+1+x-2)$$

Từ đó $h'(x)$ đổi dấu 3 lần, trong đó đổi dấu từ dương sang âm đúng 1 lần nên $h(x)$ có đúng 1 điểm cực đại. Vậy $g(x)$ có đúng 1 điểm cực đại.

BÀI 4 - ĐIỀU KIỆN CÓ NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH

Trong bài học này, chúng ta sẽ cùng giải quyết các dạng toán tìm điều kiện của hàm số m để hàm số $f\left(u\left(x\right)\right)=m$ có nghiệm.

I. DẠNG TÌM TẬP GIÁ TRỊ

Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ đã biết, giả sử hàm số $f\left(u\left(x\right)\right)$ xác định trên D và có tập giá trị là K với mọi $x\in D.$ Khi đó phương trình $f\left(u\left(x\right)\right)=m$ có nghiệm trên khoảng D khi và chỉ khi $m\in K.$

Nhận xét: *Như vậy, ta đưa bài toán về dạng tìm tập giá trị của hàm số hợp.*

Ví dụ 1. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Tìm điều kiện của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt{f\left(\sin x\right)+1}-1\right)=m$ có nghiệm?

Giải

Với mọi $x\in\mathbb{R},$ ta có $\sin x\in\left[-1;1\right]\Rightarrow f\left(\sin x\right)\in\left[-1;3\right]\Rightarrow f\left(\sin x\right)+1\in\left[0;4\right]$

$$\Rightarrow\sqrt{f\left(\sin x\right)+1}\in\left[0;2\right]\Rightarrow\sqrt{f\left(\sin x\right)+1}-1\in\left[-1;1\right]\Rightarrow f\left(\sqrt{f\left(\sin x\right)+1}-1\right)\in\left[-1;3\right].$$

Vậy tập giá trị của hàm số $y=f\left(\sqrt{f\left(\sin x\right)+1}-1\right)$ là $\left[-1;3\right].$ Do đó phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $m\in\left[-1;3\right].$

Ví dụ 2. Cho hàm số bậc ba $f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Tìm điều kiện của tham số m để phương trình $f\left(f\left(\frac{1}{9}f^2\left(\cos x\right)\right)\right)=m$ có nghiệm

Giải

Ta có: $\cos x\in\left[-1;1\right]\Rightarrow f\left(\cos x\right)\in\left[-1;3\right]\Rightarrow f^2\left(\cos x\right)\in\left[0;9\right]\Rightarrow\frac{1}{9}f^2\left(\cos x\right)\in\left[0;1\right]$

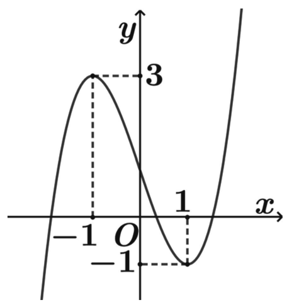
Hàm số $f\left(x\right)$ là hàm số bậc ba, đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị có tọa độ $\left(-1;3\right)$ và $\left(1;-1\right)$ suy ra điểm uốn $U\left(0;1\right)$ là trung điểm của 2 điểm cực trị. Do đó $f\left(0\right)=1.$

Vậy $\forall x\in[0;1], f(x)\in[-1;1]\Rightarrow f\left(\frac{1}{9}f^2(\cos x)\right)\in[-1;1]\Rightarrow f\left(f\left(\frac{1}{9}f^2(\cos x)\right)\right)\in[-1;3]$.

Vậy phương trình $f\left(f\left(\frac{1}{9}f^2(\cos x)\right)\right)=m$ có nghiệm khi và chỉ khi $m\in[-1;3]$.

Lưu ý: *Có một số bài toán yêu cầu tìm m để phương trình $f(u(x))=f(m)$ có nghiệm, nhớ rằng ở đây $f(m)$ là 1 hằng số phụ thuộc vào tham số m, vì thế ta vẫn tìm tập giá trị K của hàm số $y=f(u(x))$, sau đó tìm m để $f(m)\in K$. Tới đây ta tiếp tục dựa vào đồ thị để giải bất phương trình.*

Ví dụ 3. Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ



Tìm m để phương trình $\sqrt{f(\sin x)+1}=f(m)-1$ có nghiệm

Giải

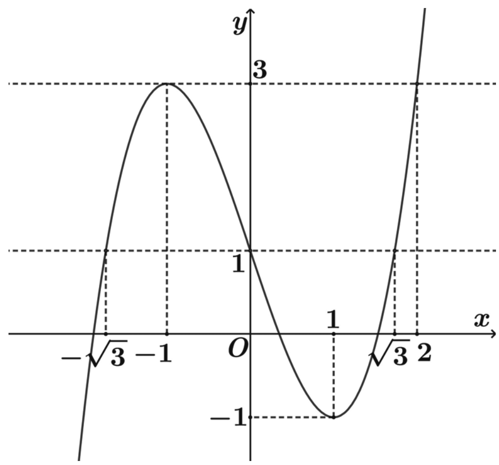
Ta có: $\sin x\in[-1;1]\Rightarrow f(\sin x)\in[-1;3]\Rightarrow f(\sin x)+1\in[0;4]\Rightarrow\sqrt{f(\sin x)+1}\in[0;2]$

Do đó phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $0\le f(m)-1\le 2\Leftrightarrow 1\le f(m)\le 3\ (i)$.

Hàm số $f(x)$ là hàm số bậc ba, từ đồ thị, ta dễ thấy $f(x)=x^3-3x+1$.

Vẽ đường thẳng $y=1$ cắt đồ thị tại 3 điểm có hoành độ $-\sqrt{3}; 0$ và $\sqrt{3}$.

Vẽ đường thẳng $y=3$ tiếp xúc với đồ thị tại điểm có hoành độ bằng -1, cắt đồ thị tại điểm có hoành độ bằng 2 (hình vẽ).



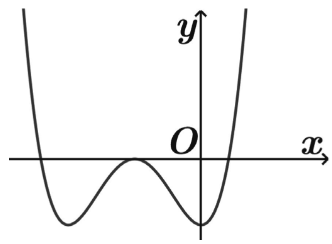
Để (i) đúng thì đường thẳng $y=f(m)$ phải nằm giữa 2 đường thẳng $y=1$ và $y=3$ (có thể nằm trên biên), điều này xảy ra khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l}-\sqrt{3}\le m\le 0\\ \sqrt{3}\le m\le 2\end{array}\right.$.

II. DÙNG HÀM ĐẶC TRƯNG ĐỂ BIẾN ĐỔI PHƯƠNG TRÌNH

Có nhiều bài toán mà phương trình của chúng ta phức tạp hơn rất nhiều, khi đó ta sử dụng phương pháp biến đổi hàm đặc trưng để đưa bài toán về phương trình đơn giản hơn

Giả sử hàm số $f(x)$ đơn điệu trên K, các hàm số $f(u(x))$ và $f(v(x))$ đều xác định trên K. Khi đó phương trình $f(u(x))=f(v(x))$ và phương trình $u(x)=v(x)$ là hai phương trình tương đương trên tập K.

Ví dụ 4. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Tìm *m* để phương trình $f(\sin x+1)=f(m^2+2m+2)$ có nghiệm?

Giải

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f(x)$, ta thấy hàm số $f(x)$ đồng biến trên $[0;+\infty)$.

Chú ý rằng $\sin x+1\ge 0\ \forall x\in\mathbb{R}$ và $m^2+2m+2>0\ \forall m\in\mathbb{R}$, do đó

$$f(\sin x+1)=f(m^2+2m+2)\Leftrightarrow \sin x+1=m^2+2m+2\ \ (i).$$

Phương trình (i) có nghiệm khi và chỉ khi $0\le m^2+2m+2\le 2\Leftrightarrow m^2+2m\le 0\Leftrightarrow -2\le m\le 0$.

Ví dụ 5. Cho hàm số $f(x)=x^3-x^2+2m$. Biết phương trình $f\left(\sqrt{f(x)+m}\right)=x^2-m$ có nghiệm $x\in[0;2]$. Giá trị thực lớn nhất của m thỏa mãn là

A. $\dfrac{32}{81}$. **B.** 0. **C.** $-\dfrac{32}{3}$. **D.** $\dfrac{32}{27}$.

Giải

Phương trình đã cho tương đương với: $f\left(\sqrt{f(x)+m}\right)+f(x)+m=f(x)+x^2\ \ (i)$.

Xét hàm số $g(t)=f(t)+t^2=t^3-t^2+2m+t^2=t^3+2m$, hàm số này đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $(i)\Leftrightarrow g\left(\sqrt{f(x)+m}\right)=g(x)\Leftrightarrow \sqrt{f(x)+m}=x\Leftrightarrow \begin{cases} f(x)+m=x^2\\ x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} f(x)-x^2=-m\\ x\ge 0\end{cases}$

Xét phương trình $f(x)-x^2=-m\Leftrightarrow x^3-x^2+2m-x^2=-m\Leftrightarrow x^3-2x^2=-3m\ \ (ii)$.

Ta cần tìm m để (ii) có nghiệm $x\in[0;2]$ (nghiệm này cũng thỏa mãn $x\ge 0$).

Xét hàm số $h(x)=x^3-2x^2$ có $h'(x)=3x^2-4x=x(3x-4)$. Do đó $h'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\\ x=\dfrac{4}{3}\end{array}\right.$. Ta có bảng biến thiên của hàm số $h(x)$ trên $[0;2]$ như sau

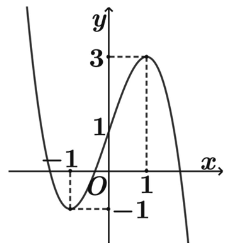
x	0	$\dfrac{4}{3}$	2

$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	0	↘	$-\dfrac{32}{27}$	↗	0

Vậy (ii) có nghiệm $x \in [0;2]$ khi và chỉ khi $-3m \in \left[-\dfrac{32}{27};0\right] \Leftrightarrow m \in \left[0;\dfrac{32}{81}\right]$.

III. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

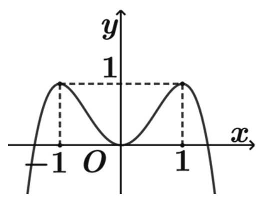
1. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(f(\cos x)) = m$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right)$?

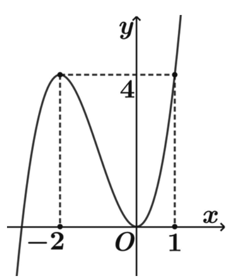
A. 2. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 3.

2. Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c\ (a, b, c \in \mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $3f\left(\dfrac{4\sin x - 1}{3}\right) = m$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(0;\dfrac{7\pi}{6}\right)$?



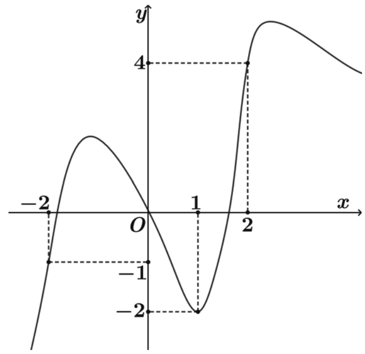
A. 4. **B.** 6. **C.** 2. **D.** 3.

3. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x^2 + 2x - 2) = 3m + 1$ có nghiệm thuộc $[0;1]$ là



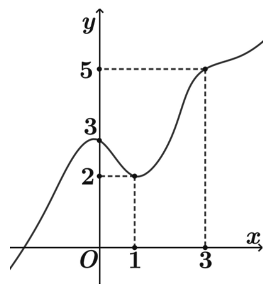
A. $[0;4]$. **B.** $[-1;0]$. **C.** $[0;1]$. **D.** $\left[-\dfrac{1}{3};1\right]$.

4. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(x^3-3x^2+2\right)=m^2-3m$ có nghiệm thuộc $\left(1;3\right)$



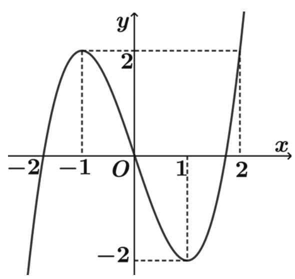
A. 21. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 4.

5. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\left|x-2\right|\right)=m$ có nghiệm thuộc $\left[-1;5\right]$ là



A. 3. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 2.

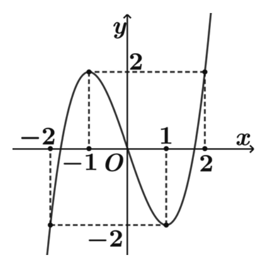
6. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt{2f\left(\cos x\right)}\right)=m$ có nghiệm $x\in\left[\frac{\pi}{2};\pi\right)$ là



A. −1. **B.** 0. **C.** 1. **D.** −2.

7. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên.

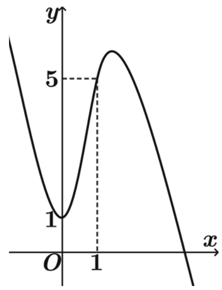
Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt{f\left(\sin x\right)+2}\right)=f\left(\frac{m}{2}\right)$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$?



A. 6. **B.** 5.

C. 8. **D.** 7.

8. Cho hàm số đa thức bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau



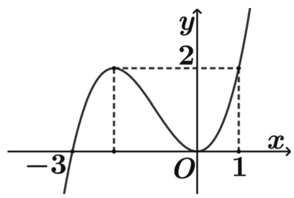
Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình

$$8^{f(x)-1} + 4^{f(x)-1} - (m+3).2^{f(x)} + 4 + 2m = 0$$

có nghiệm $x \in (0;1)$?

A. 285. **B.** 284. **C.** 141. **D.** 142.

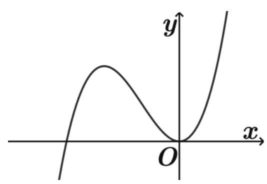
9. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ



Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f(|\sin x|) = f(m^2 - 4)$ có nghiệm?

A. 4. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 2.

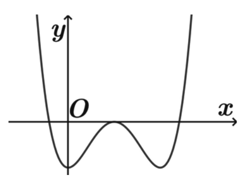
10. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(2|\sin x|) = f(m^2 + 6m + 10)$ có nghiệm?

A. 5. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

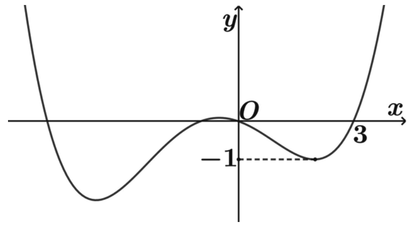
11. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(\sin x - 1) = f(2m - m^2 - 2)$ có nghiệm?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** Vô số.

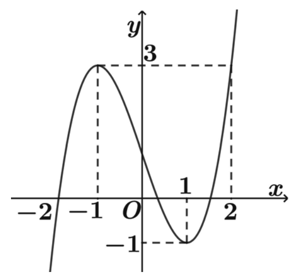
12. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ



Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $f^2\left(x\right)+\left(m-2\right)\left|f\left(x\right)\right|-2m=0$ có nghiệm thuộc $\left(0;3\right)$

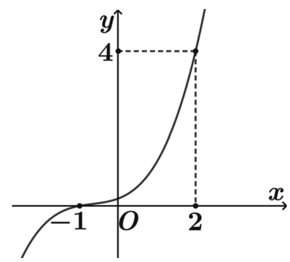
A. $-1<m<0$. **B.** $-1\le m<0$. **C.** $m\ge 0$. **D.** $0<m\le 1$.

13. Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in\left[-5;5\right]$ sao cho phương trình $\log_2^3\left(f\left(x\right)+1\right)-\log_{\sqrt{2}}^2\left(f\left(x\right)+1\right)+\left(2m-8\right)\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{f\left(x\right)+1}+2m=0$ có nghiệm $x\in\left(-1;1\right)$.



A. 7. **B.** 6. **C.** 5. **D.** Vô số.

14. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ



Hỏi có bao nhiêu giá trị $m\in\mathbb{Z}$ để bất phương trình $f\left(2f\left(x\right)\right)+\sqrt{f\left(x\right)-m}-f\left(m+f\left(x\right)\right)\le 0$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(-1;2\right)$?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

15. Cho hàm số $f\left(x\right)=x^5+3x^3-4m$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $f\left(\sqrt[3]{f\left(x\right)+m}\right)=x^3-m$ có nghiệm thuộc $\left[1;2\right]$?

A. 14. **B.** 15. **C.** 16. **D.** 17.

16. Cho hàm số $f\left(x\right)=x^5+2x^3+4m$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt[3]{2f\left(x\right)+m}\right)=\dfrac{x^3-m}{2}$ có nghiệm thuộc $\left[0;2\right]$?

A. 10. **B.** 11. **C.** 12. **D.** 13.

ĐÁP ÁN

1B	2A	3D	4D	5C	6D	7D	8D	9A	10D
11B	12B	13A	14A	15C	16C				

Câu 1. Chọn B

Với $x\in\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$, ta thấy $\cos x\in[-1;0)$ nên $f(\cos x)\in[-1;1)\Rightarrow f\left(f(\cos x)\right)\in[-1;3)$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x\in\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi $m\in[-1;3)$, mà $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{-1;0;1;2\}$ nên có đúng 4 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 2. Chọn A

Với $x\in\left(0;\frac{7\pi}{6}\right)$, dễ thấy $\sin x\in\left(-\frac{1}{2};1\right]\Rightarrow\frac{4\sin x-1}{3}\in(-1;1]$ nên $f\left(\frac{4\sin x-1}{3}\right)\in[0;1]$.

Vậy phương trình $3f\left(\frac{4\sin x-1}{3}\right)=m$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(0;\frac{7\pi}{6}\right)$ khi và chỉ khi $\frac{m}{3}\in[0;1]$ $\Leftrightarrow m\in[0;3]$. Vậy có đúng 4 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 3. Chọn D

Với $x\in[0;1]$, dễ thấy $x^2+2x-2\in[-2;1]\Rightarrow f\left(x^2+2x-2\right)\in[0;4]$, do đó phương trình $f\left(x^2+2x-2\right)=3m+1$ có nghiệm $x\in[0;1]$ khi và chỉ khi $3m+1\in[0;4]\Leftrightarrow m\in\left[-\frac{1}{3};1\right]$.

Câu 4. Chọn D

Với $x\in(1;3)$, dễ thấy $x^3-3x^2+2\in[-2;2)\Rightarrow f\left(x^3-3x^2+2\right)\in[-2;4)$.

Ta cần tìm m để $m^2-3m\in[-2;4)$.

Ta có: $m^2-3m\ge -2\Leftrightarrow m^2-3m+2\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\ge 2\\ m\le 1\end{array}\right.$.

Lại có $m^2-3m<4\Leftrightarrow m^2-3m-4<0\Leftrightarrow -1<m<4$.

Vậy $\left[\begin{array}{l}-1<m\le 1\\ 2\le m<4\end{array}\right.$. Mà $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{0;1;2;3\}$. Vậy có đúng 4 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn.

Câu 5. Chọn C

Ta có: Với $x\in[-1;5]$, ta có $x-2\in[-3;3]\Rightarrow|x-2|\in[0;3]\Rightarrow f\left(|x-2|\right)\in[2;5]$.

Do đó phương trình $f\left(|x-2|\right)=m$ có nghiệm thuộc $[-1;5]$ khi và chỉ khi $m\in[2;5]$, mà $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{2;3;4;5\}$. Vậy có 4 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 6. Chọn D

Với $x\in\left[\frac{\pi}{2};\pi\right)$, ta có

$$\cos x\in(-1;0]\Rightarrow f(\cos x)\in[0;2)\Rightarrow 2f(\cos x)\in[0;4)\Rightarrow\sqrt{2f(\cos x)}\in[0;2).$$

Chú ý rằng $\forall x\in[0;2)$ thì $f(x)\in[-2;2)$, nên tập giá trị của hàm số $f\left(\sqrt{2f(\cos x)}\right)$ trên $\mathbb{R}$ là $[-2;2)$, do đó phương trình $f\left(\sqrt{2f(\cos x)}\right)=m$ có nghiệm khi và chỉ khi $m\in[-2;2)$.

Mà $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{-2;-1;0;1\}$ nên tổng các giá trị nguyên của tham số m là -2.

Câu 7. Chọn D

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f(x)$, ta thấy $f(x)\in(-2;2)\ \forall x\in(-1;1)$.

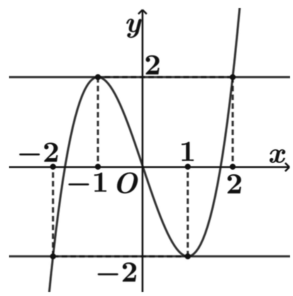
Ta có: $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow \sin x\in(-1;1)\Rightarrow f(\sin x)\in(-2;2)\Rightarrow f(\sin x)+2\in(0;4)$

$\Rightarrow\sqrt{f(\sin x)+2}\in(0;2)$.

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f(x)$, ta thấy $f(x)\in[-2;2)\ \forall x\in(0;2)$.

Do đó $f\left(\sqrt{f(\sin x)+2}\right)\in[-2;2)\ \forall x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Vậy phương trình $f\left(\sqrt{f(\sin x)+2}\right)=f\left(\frac{m}{2}\right)$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi $f\left(\frac{m}{2}\right)\in[-2;2)$.

Vẽ các đường thẳng $y=-2$ và $y=2$ và đồ thị hàm số $y=f(x)$ trên cùng hệ trục tọa độ,



Ta thấy $f\left(\frac{m}{2}\right)\in[-2;2)\Leftrightarrow\begin{cases}-2\le\frac{m}{2}<2\\ \frac{m}{2}\ne -1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-4\le m<4\\ m\ne -2\end{cases}$. Mà $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{-4;-3;-1;0;1;2;3\}$.

Vậy có 7 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 8. Chọn D

Đặt $2^{f(x)-1}=t$, phương trình đã cho tương đương với

$$t^3+t^2-2(m+3)t+4+2m=0\Leftrightarrow(t-1)\left(t^2+2t-2m-4\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\ t^2+2t-2m-4=0\ \ (i)\end{array}\right.$$

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f(x)$, ta thấy với $x\in(0;1)$ thì $f(x)\in(1;5)\Rightarrow t=2^{f(x)-1}\in(1;16)$.

Vì $1\notin(1;16)$ nên ta cần tìm m để phương trình (i) có nghiệm $t\in(1;16)$.

Ta có: $(i)\Leftrightarrow t^2+2t-4=2m\ (ii)$. Xét hàm số $g(t)=t^2+2t-4$ có $g'(t)=2t+2>0\ \forall t\in(1;16)$, do đó (ii) có nghiệm $t\in(1;16)$ khi và chỉ khi $2m\in(g(1);g(16))\Leftrightarrow 2m\in(-1;284)\Leftrightarrow m\in\left(-\frac{1}{2};142\right)$.

Mà $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{0;1;2;...;141\}$ nên có 142 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 9. Chọn A

Ta có: $|\sin x|\in[0;1]\Rightarrow f(|\sin x|)\in[0;2]$, do đó phương trình $f(|\sin x|)=f(m^2-4)$ có nghiệm khi và chỉ khi $f(m^2-4)\in[0;2]$.

Trên hệ trục tọa độ Oxy vẽ đường thẳng $y=0$ và $y=2$, ta thấy $0\le f(x)\le 2\Leftrightarrow -3\le x\le 1$.

Do đó $f(m^2-4)\in[0;2]\Leftrightarrow -3\le m^2-4\le 1\Leftrightarrow 1\le m^2\le 5$.

Mà $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{1;-1;2;-2\}$. Vậy có đúng 4 giá trị nguyên của m.

Câu 10. Chọn D

Từ đồ thị hàm số $y=f(x)$, ta thấy hàm số $f(x)$ đồng biến trên $[0;+\infty)$.

Chú ý rằng $2|\sin x|\ge 0\ \ \forall x\in\mathbb{R}$ và $m^2+6m+10>0\ \forall m\in\mathbb{R}$ nên phương trình đã cho tương đương với $2|\sin x|=m^2+6m+10$.

Với mọi $x\in\mathbb{R}$, ta có $2|\sin x|\in[0;2]$, do đó phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $m^2+6m+10\in[0;2]\Leftrightarrow m^2+6m+8\le 0\Leftrightarrow -4\le m\le -2$. Vậy có đúng 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 11. Chọn B

Từ đồ thị hàm số $y=f(x)$, ta thấy hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(-\infty;0]$.

Chú ý rằng $\sin x-1\le 0\ \ \forall x\in\mathbb{R}$ và $2m-m^2-2\le 0\ \forall m\in\mathbb{R}$, do đó

$$f(\sin x-1)=f(2m-m^2-2)\Leftrightarrow \sin x-1=2m-m^2-2\ \ (i).$$

Vì hàm số $y=\sin x-1$ có tập giá trị là $[-2;0]$ nên (i) có nghiệm khi và chỉ khi $2m-m^2-2\in[-2;0]$

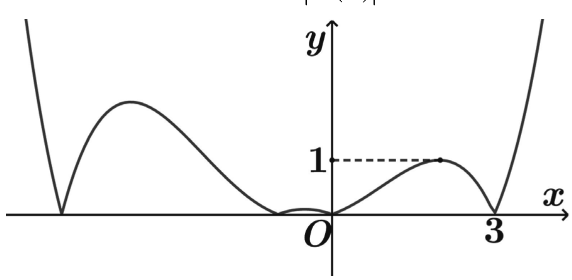
$\Leftrightarrow 2m-m^2-2\ge -2\Leftrightarrow 2m-m^2\ge 0\Leftrightarrow 0\le m\le 2$.

Mà $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{0;1;2\}$. Vậy có đúng 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 12. Chọn B

Phương trình tương đương với: $(|f(x)|-2)(|f(x)|+m)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}|f(x)|=2 & (i)\\ |f(x)|=-m & (ii)\end{array}\right.$

Từ đồ thị hàm số $y=f(x)$, ta vẽ đồ thị hàm số $y=|f(x)|$ như sau



Từ đồ thị trên, ta thấy phương trình (i) không có nghiệm thuộc $(0;3)$. Do đó phương trình đã cho có nghiệm thuộc $(0;3)$ khi và chỉ khi (ii) có nghiệm thuộc $(0;3)$. Muốn vậy $0<-m\le 1\Leftrightarrow -1\le m<0$.

Câu 13. Chọn A

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$, ta thấy với $x \in (-1;1)$ thì $f(x) \in (-1;3)$.

Đặt $\log_2(f(x)+1) = t \Rightarrow t < 2\ \forall x \in (-1;1)$.

Phương trình đã cho trở thành:

$$\Leftrightarrow t^3 - 4t^2 - (m-4)t + 2m = 0 \Leftrightarrow (t-2)(t^2 - 2t - m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2\ (l) \\ m = t^2 - 2t \end{array}\right..$$

Phương trình đã cho có nghiệm trên khoảng $(-1;1)$ khi và chỉ khi phương trình $m = t^2 - 2t$ có nghiệm trên khoảng $(-\infty;2)$.

Xét hàm số $f(t) = t^2 - 2t$ trên khoảng $(-\infty;2)$ có $f'(t) = 2(t-1) \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

Từ đó ta có bảng biến thiên hàm $f(t)$ trên $(-\infty;2]$ như sau:

x	$-\infty$		1		2
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

Vậy phương trình $m = t^2 - 2t$ có nghiệm trên khoảng $(-\infty;2)$ khi và chỉ khi $m \ge -1$. Mà $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in [-5;5] \end{cases}$ nên $m \in \{-1,0,1,2,3,4,5\}$. Do đó có 7 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn.

Câu 14. Chọn A

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$, ta thấy hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Điều kiện: $f(x) \ge m$. Khi đó $2f(x) \ge m + f(x) \Rightarrow f(2f(x)) \ge f(m + f(x))$, do đó

$$\begin{cases} f(2f(x)) - f(m+f(x)) \ge 0 \\ \sqrt{f(x) - m} \ge 0 \end{cases} \Rightarrow f(2f(x)) + \sqrt{f(x)-m} - f(m+f(x)) \ge 0.$$

Vậy BPT đã cho tương đương với $f(x) = m$, ta cần tìm m để phương trình $f(x) = m$ có nghiệm thuộc $(-1;2)$, điều này xảy ra khi và chỉ khi $m \in (f(-1); f(2)) \Leftrightarrow m \in (0;4)$.

Mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{1;2;3\}$.

Câu 15. Chọn C

Phương trình đã cho tương đương $f\left(\sqrt[3]{f(x)+m}\right) + f(x) + m = f(x) + x^3\ (i)$

Xét hàm số $f(t) + t^3 = t^5 + 3t^3 - 4m + t^3 = t^5 + 4t^3 - 4m$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, nên

$$(i) \Leftrightarrow \sqrt[3]{f(x)+m} = x \Leftrightarrow f(x) + m = x^3 \Leftrightarrow f(x) - x^3 = -m \Leftrightarrow x^5 + 2x^3 = 3m\ (ii)$$

Hàm số (ii) có nghiệm $x \in [1;2]$ khi và chỉ khi $3m \in [3;48] \Leftrightarrow m \in [1;16]$. Vậy có đúng 16 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 16. Chọn C

Phương trình đã cho tương đương với:

$$2f\left(\sqrt[3]{2f(x)+m}\right)=x^3-m \Leftrightarrow 2f\left(\sqrt[3]{2f(x)+m}\right)+\left(2f(x)+m\right)=2f(x)+x^3\ \ (i).$$

Xét hàm số $g(t)=2f(t)+t^3=2\left(t^5+2t^3+4m\right)+t^3=2t^5+5t^3+8m$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, do đó

$(i)\Leftrightarrow g\left(\sqrt[3]{2f(x)+m}\right)=g(x)\Leftrightarrow \sqrt[3]{2f(x)+m}=x\Leftrightarrow 2f(x)+m=x^3\Leftrightarrow 2\left(x^5+2x^3+4m\right)=x^3$

$\Leftrightarrow 2x^5+3x^3=-8m\ \ (ii).$

Xét hàm số $h(x)=2x^5+3x^3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, có $h(0)=0; h(2)=88$ nên (ii) có nghiệm $x\in[0;2]$ khi và chỉ khi $0\le -8m\le 88\Leftrightarrow -11\le m\le 0$. Mà $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{-11;-10;...;0\}$ nên có 12 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

BÀI 5 – TƯƠNG GIAO HÀM HỢP KHÔNG CÓ THAM SỐ

Trong bài học này, ta sẽ luyện tập các bài toán tương giao hàm hợp không có tham số, tất nhiên những bài toán này đều có thể sử dụng phương pháp ghép trục, tuy nhiên khi ở dạng không có tham số, chúng ta cũng có thể nhanh chóng giải theo phương pháp truyền thống.

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Xét bài toán tổng quát:

Giả thiết: Cho hàm số $y = f(x)$ đã biết thông tin về đồ thị (hoặc các khoảng biến thiên).

Yêu cầu: Đếm số nghiệm của phương trình $f(u(x)) = k$ với $k \in \mathbb{R}$ là 1 hằng số đã biết

Phương pháp giải

- Bước 1: Đặt $u(x) = t,$ phương trình $f(u(x)) = k \ (i) \Leftrightarrow f(t) = k \ (ii).$
- Bước 2: Dựa vào thông tin bài toán, tìm các nghiệm của phương trình (ii) theo $t.$
- Bước 3: Vẽ bảng biến thiên (hoặc đồ thị) của hàm số $y = u(x),$ sau đó đếm số nghiệm x theo từng phương trình $u(x) = t_i$ với t_i là các nghiệm của $(ii).$

Ví dụ 1. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[0;\dfrac{7\pi}{2}\right]$ của phương trình $f(2\cos x) = \dfrac{1}{2}$ là

A. 5. **B.** 8. **C.** 6. **D.** 7.

Giải

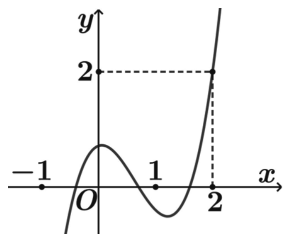
Xét hàm số $t(x) = 2\cos x,$ ta có $t'(x) = -2\sin x.$ Ta có bảng biến thiên hàm số $t(x)$ trên $\left[0;\dfrac{7\pi}{2}\right]$

x	0		π		2π		3π		$\dfrac{7\pi}{2}$
t'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
t	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	0

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y=f\left(x\right)$, ta thấy $f\left(t\right)=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll} t=a\left(a<-2\right) & \left(i\right)\\ t=b\left(-2<b<0\right) & \left(ii\right)\\ t=c\left(0<c<2\right) & \left(iii\right)\\ t=d\left(d>2\right) & \left(iv\right)\end{array}\right.$

Chú ý rằng phương trình $\left(i\right)$ vô nghiệm, phương trình $\left(ii\right)$ có 4 nghiệm, phương trình $\left(iii\right)$ có 3 nghiệm, phương trình $\left(iv\right)$ vô nghiệm. Vậy phương trình đã cho có đúng 7 nghiệm.

Ví dụ 2. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ là hàm đa thức bậc ba có đồ thị như hình bên. Số nghiệm thuộc khoảng $\left(0;3\pi\right)$ của phương trình $f\left(\cos x+1\right)=\cos x+1$.



A. 5. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 7.

Giải

Đặt $\cos x+1=t$, vì $\cos x\in\left[-1;1\right]\Rightarrow t\in\left[0;2\right]$. Phương trình đã cho tương đương với $f\left(t\right)=t$.

Trên cùng hệ trục tọa độ *Oty*, ta vẽ đồ thị hàm số $y=f\left(t\right)$ và đường thẳng $y=t$, ta thấy trên $\left[0;2\right]$, chúng cắt nhau tại hai điểm có hoành độ $t_1\in\left(0;1\right)$ và $t_2=2$.

Do đó phương trình $f\left(t\right)=t$ có 2 nghiệm thuộc $\left[0;2\right]$ là $t_1\in\left(0;1\right)$ và $t_2=2$.

x	0		π		2π		3π
t	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

Từ đó, phương trình $t=t_1$ có 3 nghiệm phân biệt thuộc $\left(0;3\pi\right)$, phương trình $t=2$ có đúng 1 nghiệm thuộc $\left(0;3\pi\right)$ nên phương trình đã cho có đúng 4 nghiệm.

Ví dụ 3. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình bên. Xác định số nghiệm của phương trình $\left|f\left(x^3-3x^2\right)\right|=\dfrac{3}{2}$, biết $f\left(-4\right)=0$.

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f\left(x\right)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

A. 9. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 10.

Giải

Đặt $t = x^3 - 3x^2$, phương trình tương đương với $\left|f(t)\right| = \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(t) = \dfrac{3}{2} \\ f(t) = -\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$.

Vì $f(-4) = 0$ nên $f(t) = \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t = t_1 \in (-\infty; -4) & (i) \\ t = t_2 \in (2; +\infty) & (ii) \end{array}\right.$; $f(t) = -\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t = t_3 \in (-4; -2) & (iii) \\ t = t_4 \in (-2; 0) & (iv) \\ t = t_5 \in (0; 2) & (v) \\ t = t_6 \in (2; +\infty) & (vi) \end{array}\right.$.

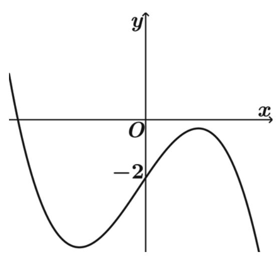
Ta có bảng biến thiên hàm $t(x)$ như sau:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
t'		$+$	0	$-$	0	$+$	
t	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Do đó các phương trình $(i), (ii), (v), (vi)$ đều có đúng 1 nghiệm, phương trình (iii) và (iv) đều có 3 nghiệm nên phương trình đã cho có 10 nghiệm.

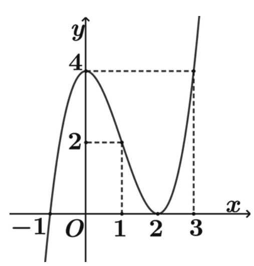
II. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

1. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ dưới. Hỏi phương trình $\left[f(x)\right]^2 = 4$ có bao nhiêu nghiệm?



A. 5.　　**B.** 3.　　**C.** 6.　　**D.** 4.

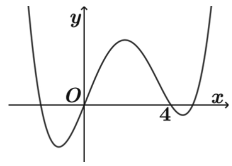
2. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên



Số nghiệm của phương trình $f(x)\left[f(x) - 4\right] = 0$ là

A. 2.　　**B.** 4.　　**C.** 3.　　**D.** 1.

3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm của phương trình $f\left(x^3+3x^2\right)=0$ là



A. 4 **B.** 5 **C.** 6 **D.** 7

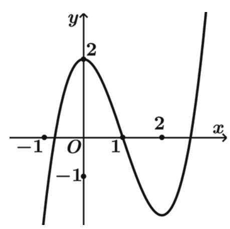
4. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
y'		$+$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2 ‖ $+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Phương trình $f\left(x^3-3x\right)+3=0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?

A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

5. Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Số nghiệm của phương trình $f\left(f(x)\right)=1$ là

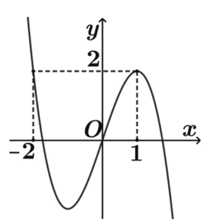
A. 3. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 6.

6. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau. Số nghiệm thực của phương trình $f\left(f(x)\right)+2=0$ là

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 6.

7. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm của phương trình $f\left(1-f(x)\right)=2$ là



A. 5. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

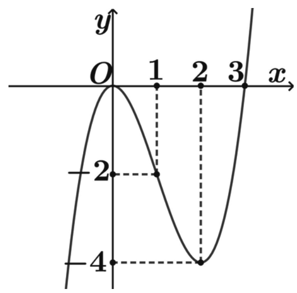
8. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-5	↗	3	↘	-5	↗	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $\left|f\left(x^2-2x-1\right)\right| = 4$ bằng

A. 2. **B.** 4. **C.** 8. **D.** 6.

9. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Tìm số nghiệm thực của phương trình $f\left(\sqrt{-x^2+4x-3}\right) = -2$



A. 1. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

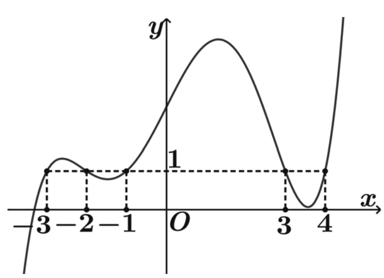
10. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		0		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	3	↘	2	↗	$+\infty$

Hỏi phương trình $2f\left(x^2-|x|\right) = 5$ có bao nhiêu nghiệm.

A. 4. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 5.

11. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau



Số nghiệm của phương trình $f(2\sin x) = 1$ trên đoạn $[0; 2\pi]$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

12. **[ĐỀ THAM KHẢO 2020 – LẦN 01]** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $[-\pi;2\pi]$ của phương trình $2f(\sin x)+3=0$ là

A. 4. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 8.

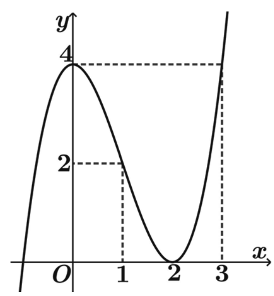
13. **[ĐỀ THAM KHẢO 2020 – LẦN 02]** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[0;\dfrac{5\pi}{2}\right]$ của phương trình $f(\sin x)=1$ là

A. 7. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6

14. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Số nghiệm thuộc đoạn $[-\pi;\pi]$ của phương trình $f(4|\sin x|)=3$ là

A. 3. **B.** 10. **C.** 8. **D.** 6.

15. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như hình. Số nghiệm thuộc đoạn $\left[0;\dfrac{9\pi}{2}\right]$ của phương trình $f(2\sin x+1)=1$ là:

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

A. 7. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 6.

16. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$ của phương trình $3f(2+2\cos x)-4=0$ bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 4.

17. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $[0;2\pi]$ của phương trình $\left|f(|\sin x|)-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$ là

A. 7. **B.** 11. **C.** 6. **D.** 12.

18. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	0

Số nghiệm của phương trình $f\left(x-2\sqrt{x+1}\right)=0$ là

A. 3. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 2.

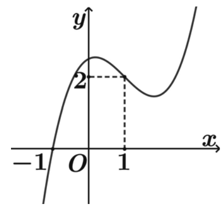
19. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right]$ của phương trình $5f\left(\cos^2 x-\cos x\right)=1$ là

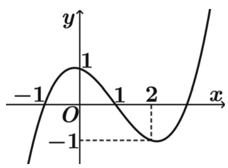
A. 11. **B.** 10. **C.** 9. **D.** 12.

20. Cho hàm số $f(x)$ là hàm số đa thức bậc ba có đồ thị như hình bên dưới. Số nghiệm thuộc khoảng $(0;3\pi)$ của phương trình $f(\sin x-1)=\sin x$ là



A. 5. **B.** 6. **C.** 2. **D.** 3.

21. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên khoảng $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ



Phương trình $f(\cos x)+1=\cos^3 x$ có bao nhiêu nghiệm trên $(0;100\pi)$.

A. 50. **B.** 100. **C.** 99. **D.** 49.

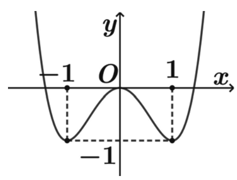
22. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-2	↗	1	↘	-2	↗	$+\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[0;\dfrac{7\pi}{2}\right]$ của phương trình $\left(f(2\cos x)-\sin x+4\right)\left(2f(2\cos x)-1\right)=0$ là

A. 5. **B.** 7. **C.** 11. **D.** 8.

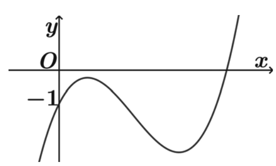
23. Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ có đồ thị như hình vẽ



Phương trình $\sqrt{f\left(\sqrt{f(x)}\right)+2}=f(x)+1$ có bao nhiêu nghiệm?

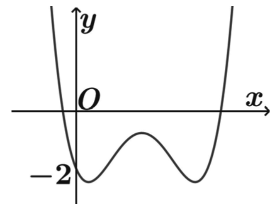
A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

24. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong như hình vẽ. Số nghiệm thực của phương trình $f\left(x^3 f(x)\right)+1=0$ là



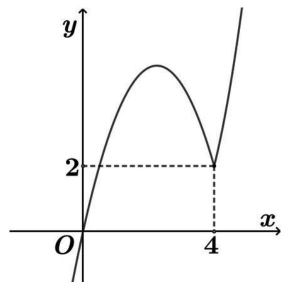
A. 8. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 4.

25. Cho hàm số bậc bốn $y=f\left(x\right)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $f\left(x^2 f\left(x\right)\right)=-2$ là



A. 8. **B.** 12. **C.** 6. **D.** 9.

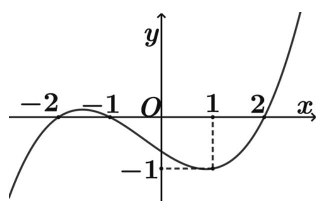
26. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ



Số nghiệm của phương trình $f\left(x.f\left(x^2\right)\right)=2$ là

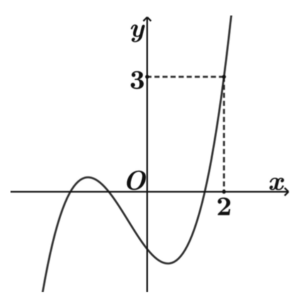
A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

27. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ như hình vẽ. Biết $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=+\infty$. Hỏi phương trình $f\left(f'\left(\sqrt{x^2+1}\right)\right)=f\left(-1\right)$ có bao nhiêu nghiệm?



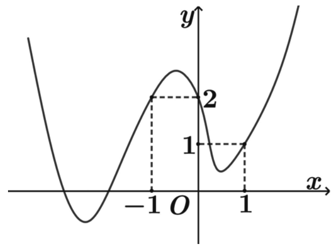
A. 1. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 7.

28. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ là hàm đa thức bậc ba, có đồ thị như hình vẽ. Hỏi phương trình $f\left(x^2+2\right)=\dfrac{1}{\ln 2x^2}$ có bao nhiêu nghiệm?



A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

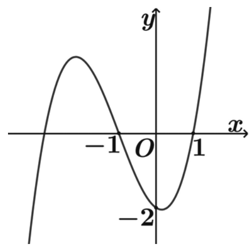
29. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ



Số nghiệm của phương trình $f\left[\ln f\left(x^2+1\right)-1\right]=2$ là

A. 4. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 7.

30. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ



Số nghiệm của phương trình $f\left[f\left(x^2\right)\ln x\right]=0$ là

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 6.

ĐÁP ÁN

1D	**2B**	**3C**	**4A**	**5C**	**6A**	**7C**	**8C**	**9A**	**10C**
11C	**12B**	**13C**	**14C**	**15A**	**16B**	**17A**	**18C**	**19B**	**20C**
21D	**22B**	**23C**	**24C**	**25D**	**26A**	**27B**	**28B**	**29C**	**30A**

Câu 1. Chọn D

Ta có: $\left[f(x)\right]^2=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=2 \\ f(x)=-2 \end{array}\right.$. Phương trình $f(x)=2$ có đúng 1 nghiệm, phương trình $f(x)=-2$ có 3 nghiệm phân biệt nên phương trình đã cho có 4 nghiệm.

Câu 2. Chọn B

Phương trình tương đương với: $\left[\begin{array}{l} f(x)=0 \\ f(x)-4=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=0\ (i) \\ f(x)=4\ (ii) \end{array}\right.$.

Dựa vào đồ thị hàm số, ta thấy (i) có đúng 2 nghiệm, phương trình (ii) có đúng 2 nghiệm nên phương trình đã cho có đúng 4 nghiệm.

Câu 3. Chọn C

Đặt $t=x^3+3x^2,$ phương trình đã cho tương đương với $f\left(t\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll} t=a\left(a<0\right) & \left(i\right) \\ t=0 & \left(ii\right) \\ t=4 & \left(iii\right) \\ t=b\left(b>4\right) & \left(iv\right) \end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $t\left(x\right)$ như sau:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$t'\left(x\right)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$t\left(x\right)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên trên, ta thấy các phương trình $\left(i\right)$ và $\left(iv\right)$ đều có đúng 1 nghiệm, phương trình $\left(ii\right)$ và $\left(iii\right)$ đều có đúng 2 nghiệm nên phương trình đã cho có đúng 6 nghiệm.

Câu 4. Chọn A

Đặt $t=x^3-3x,$ dựa vào bảng biến thiên của hàm số $f\left(x\right),$ ta có

$$f\left(t\right)=-3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll} t=t_1\in\left(-\infty;-2\right) & \left(i\right) \\ t=t_2\in\left(-2;2\right) & \left(ii\right) \\ t=t_3\in\left(2;+\infty\right) & \left(iii\right) \end{array}\right..$$

Khảo sát hàm số $t\left(x\right)$, ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
t'		$+$	0	$-$	0	$+$	
t	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Từ đó, phương trình $\left(i\right)$ có đúng 1 nghiệm, phương trình $\left(ii\right)$ có 3 nghiệm phân biệt, phương trình $\left(iii\right)$ có đúng 1 nghiệm. Do đó phương trình đã cho có đúng 5 nghiệm.

Câu 5. Chọn C

Đặt $f\left(x\right)=t,$ dựa vào đồ thị hàm số $y=f\left(x\right),$ ta thấy

$$f\left(f\left(x\right)\right)=1\Leftrightarrow f\left(t\right)=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=t_1\in\left(-1;0\right) \\ t=t_2\in\left(0;1\right) \\ t=t_3\in\left(2;+\infty\right) \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll} f\left(x\right)=t_1\in\left(-1;0\right) & \left(i\right) \\ f\left(x\right)=t_2\in\left(0;1\right) & \left(ii\right) \\ f\left(x\right)=t_3\in\left(2;+\infty\right) & \left(iii\right) \end{array}\right..$$

Tiếp tục quan sát đồ thị hàm số $y=f\left(x\right),$ ta thấy các phương trình $\left(i\right)$ và $\left(ii\right)$ đều có 3 nghiệm phân biệt, phương trình $\left(iii\right)$ có đúng 1 nghiệm. Vậy phương trình đã cho có tất cả 7 nghiệm.

Câu 6. Chọn A

Ta có: $f\left(f\left(x\right)\right)+2=0 \Leftrightarrow f\left(f\left(x\right)\right)=-2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f\left(x\right)=-2 \ \ (i) \\ f\left(x\right)=2 \quad (ii) \end{array}\right.$.

Dễ thấy phương trình (i) có đúng 2 nghiệm, phương trình (ii) có đúng 2 nghiệm nên phương trình đã cho có đúng 4 nghiệm thực.

Câu 7. Chọn C

Đặt $1-f\left(x\right)=t,$ phương trình đã cho tương đương với

$$f\left(t\right)=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-2 \\ t=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1-f\left(x\right)=-2 \\ 1-f\left(x\right)=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f\left(x\right)=3 \\ f\left(x\right)=0 \end{array}\right..$$

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f\left(x\right),$ ta thấy phương trình $f\left(x\right)=3$ có đúng 1 nghiệm, phương trình $f\left(x\right)=0$ có đúng 3 nghiệm nên phương trình đã cho có đúng 4 nghiệm.

Câu 8. Chọn C

Đặt $x^2-2x-1=t,$ phương trình đã cho tương đương với $\left|f\left(t\right)\right|=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f\left(t\right)=4 \\ f\left(t\right)=-4 \end{array}\right..$

Ta có: $t'=2x-2,$ từ đó ta có bảng biến thiên của hàm số $t\left(x\right)$ như sau

x	$-\infty$		1		$+\infty$
t'		$-$	0	$+$	
t	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên trên, ta thấy với $t\in\left(-\infty;-2\right)$ thì phương trình $x^2-2x-1=t$ vô nghiệm, nếu $t\in\left(-2;+\infty\right)$ thì phương trình $x^2-2x-1=t$ có 2 nghiệm.

Dễ thấy phương trình $f\left(t\right)=4$ có 2 nghiệm $t_1\in\left(-\infty;-2\right), t_2\in\left(2;+\infty\right)$; phương trình $f\left(t\right)=-4$ có 4 nghiệm $t_3\in\left(-\infty;-2\right), t_4\in\left(-2;0\right), t_5\in\left(0;2\right), t_6\in\left(2;+\infty\right).$ Do đó phương trình $\left|f\left(t\right)\right|=4$ có 4 nghiệm lớn hơn $-2,$ hai nghiệm nhỏ hơn $-2,$ nên phương trình đã cho có đúng 8 nghiệm.

Câu 9. Chọn A

Đặt $t=\sqrt{-x^2+4x-3},$ phương trình tương đương $f\left(t\right)=-2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t=a\in\left(-\infty;0\right) & (i) \\ t=1 & (ii) \\ t=b\in\left(2;3\right) & (iii) \end{array}\right..$

Xét hàm $t\left(x\right)$ có TXĐ: $D=\left[1;3\right],$ ta có $t'=\dfrac{-x+2}{\sqrt{-x^2+4x-3}}$ nên có bảng biến thiên

x	1		2		3
t'	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$
t	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Từ bảng biến thiên này, ta thấy phương trình (i) và (iii) vô nghiệm, phương trình (ii) có đúng 1 nghiệm nên phương trình đã cho có đúng 1 nghiệm.

Câu 10. Chọn C

Đặt $t = x^2 - |x|$, ta có $2f\left(x^2 - |x|\right) = 5 \Leftrightarrow 2f(t) = 5 \Leftrightarrow f(t) = \dfrac{5}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t = t_1 \in \left(-\infty; -\dfrac{1}{4}\right) & (i) \\ t = t_2 \in \left(-\dfrac{1}{4}; 0\right) & (ii) \\ t = t_3 \in \left(0; \dfrac{1}{4}\right) & (iii) \\ t = t_4 \in \left(\dfrac{1}{4}; +\infty\right) & (iv) \end{array}\right.$.

Ta có $t' = 2x - \dfrac{x}{|x|} \Rightarrow t' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{1}{2} \\ x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$, tại $x = 0$, t' không xác định.

Từ đó ta có bảng biến thiên hàm $t(x)$ như sau:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
t'		$-$	0	$+$	$\parallel$	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy phương trình (i) vô nghiệm, phương trình (ii) có 4 nghiệm, các phương trình (iii) và (iv) đều có 2 nghiệm nên phương trình đã cho có 8 nghiệm.

Câu 11. Chọn C

Đặt $t = 2\sin x$, ta có $t \in [-2; 2]$. Phương trình đã cho tương đương với $f(t) = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = -2 \end{array}\right.$ (do $t \in [-2; 2]$).

Vẽ bảng biến thiên hàm $t(x)$ trên $[0; 2\pi]$, ta có:

x	$-\infty$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	0

Từ đó, phương trình $t = -1$ có 2 nghiệm và phương trình $t = -2$ có đúng 1 nghiệm x trên $[0; 2\pi]$ nên phương trình $f(2\sin x) = 1$ có đúng 3 nghiệm trên đoạn $[0; 2\pi]$.

Câu 12. Chọn B

Đặt $t=\sin x$, phương trình tương đương $f(t)=-\frac{3}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll} t=t_1\in(-\infty;-1) & (i)\\ t=t_2\in(-1;0) & (ii)\\ t=t_3\in(0;1) & (iii)\\ t=t_4\in(1;+\infty) & (iv)\end{array}\right.$.

Xét hàm số $t(x)$ trên $[-\pi;2\pi]$, ta có bảng biến thiên:

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

Từ bảng biến thiên trên, ta thấy (i) và (iv) vô nghiệm, (ii) có 4 nghiệm và (iii) có đúng 2 nghiệm nên phương trình đã cho có 6 nghiệm thuộc $[-\pi;2\pi]$.

Câu 13. Chọn C

Đặt $t=\sin x$, phương trình đã cho tương đương với: $f(t)=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll} t=t_1\in(-\infty;-1) & (i)\\ t=t_2\in(-1;0) & (ii)\\ t=t_3\in(0;1) & (iii)\\ t=t_4\in(1;+\infty) & (iv)\end{array}\right.$.

Xét hàm số $t(x)$ trên $\left[0;\frac{5\pi}{2}\right]$, ta có bảng biến thiên

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{2}$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1

Từ bảng biến thiên trên, ta thấy (i) và (iv) vô nghiệm, (ii) có 2 nghiệm và (iii) có đúng 3 nghiệm nên phương trình đã cho có 5 nghiệm thuộc $\left[0;\frac{5\pi}{2}\right]$

Câu 14. Chọn C

Đặt $t=4|\sin x|$, ta có $f(4|\sin x|)=3\Leftrightarrow f(t)=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll} t=t_1\in(-\infty;0) & (i)\\ t=t_2\in(0;1) & (ii)\\ t=t_3\in(2;3) & (iii)\end{array}\right.$.

Xét $t(x)=4|\sin x|$, khảo sát hàm số này trên $[-\pi;\pi]$, ta có bảng biến thiên:

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$t(x)$	0	↗	4	↘	0	↗	4	↘	0

Từ bảng biến thiên trên, ta thấy phương trình (i) vô nghiệm, các phương trình (ii) và (iii) đều có 4 nghiệm nên phương trình đã cho có 8 nghiệm.

Câu 15. Chọn A

Đặt $t = 2\sin x + 1$, phương trình $f(2\sin x + 1) = 1 \Leftrightarrow f(t) = 1$. Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$, ta thấy $f(t) = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \ (i) \\ t = a \in (1;3) \ (ii) \\ t = b \in (3;+\infty) \ (iii) \end{array}\right.$.

Xét $t' = 2\cos x$, ta có bảng biến thiên hàm $t(x)$ trên $\left[0;\frac{9\pi}{2}\right]$ như sau

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{2}$		$\frac{7\pi}{2}$		$\frac{9\pi}{2}$
$t'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$t(x)$	1	↗	3	↘	-1	↗	3	↘	-1	↗	3

Từ bảng biến thiên, ta thấy (i) có đúng 2 nghiệm, (ii) có đúng 5 nghiệm và (iii) vô nghiệm trên $\left[0;\frac{9\pi}{2}\right]$. Vậy phương trình đã cho có đúng 7 nghiệm thuộc $\left[0;\frac{9\pi}{2}\right]$

Câu 16. Chọn B

Đặt $t = 2 + 2\cos x$. Ta có $3f(2 + 2\cos x) - 4 = 0 \Leftrightarrow f(t) = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t = t_1 \in (-\infty;0) & (i) \\ t = t_2 \in (0;2) & (ii) \\ t = t_3 \in (2;4) & (iii) \\ t = t_4 \in (4;+\infty) & (iv) \end{array}\right.$.

Ta có $t' = -2\sin x < 0\ \forall x \in (0;\pi)$, ta có bảng biến thiên hàm $t(x)$ trên $[0;\pi]$ như sau

x	0		π
t'		$-$	
t	4	↘	0

Từ đó các phương trình (i) và (iv) vô nghiệm, các phương trình (ii) và (iii) đều có nghiệm duy nhất thuộc $(0;\pi)$ nên phương trình đã cho có đúng 2 nghiệm thuộc $(0;\pi)$.

Câu 17. Chọn A

Đặt $\left|\sin x\right| = t,$ phương trình đã cho tương đương với: $\left[\begin{array}{l} f\left(t\right)-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2} \\ f\left(t\right)-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f\left(t\right)=1 \\ f\left(t\right)=0 \end{array}\right. \left(i\right).$

Chú ý rằng $\left|\sin x\right| \in \left[0;1\right] \Rightarrow t \in \left[0;1\right].$ Do đó $\left(i\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=t_0 \in \left(0;1\right) \\ t=0 \end{array}\right..$

Khảo sát hàm số $t=\left|\sin x\right|$ trên $\left[0;2\pi\right],$ ta có bảng biến thiên

x	0		$\dfrac{\pi}{2}$		π		$\dfrac{3\pi}{2}$		2π
t	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Từ đó, phương trình $t=t_0$ có 4 nghiệm thuộc $\left[0;2\pi\right],$ phương trình $t=0$ có 3 nghiệm thuộc $\left[0;2\pi\right]$ nên phương trình đã cho có đúng 7 nghiệm thuộc $\left[0;2\pi\right].$

Câu 18. Chọn C

Đặt $t = x-2\sqrt{x+1},$ ta có $f\left(x-2\sqrt{x+1}\right)=0 \Leftrightarrow f\left(t\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t=t_1 \in \left(-\infty;-2\right) & \left(i\right) \\ t=t_2 \in \left(-2;-1\right) & \left(ii\right) \\ t=t_3 \in \left(-1;0\right) & \left(iii\right) \\ t=t_5 \in \left(1;+\infty\right) & \left(v\right) \end{array}\right..$

Xét $t' = 1-\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}=\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}}=\dfrac{x}{\sqrt{x+1}\left(\sqrt{x+1}+1\right)}.$

Từ đó ta có bảng biến thiên hàm $t\left(x\right)$ trên $\left[-1;+\infty\right)$ như sau

x	-1		0		$+\infty$
t'	$\|\|$	$-$	0	$+$	
t	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên hàm $t\left(x\right),$ ta thấy phương trình $\left(i\right)$ vô nghiệm, phương trình $\left(ii\right)$ có 2 nghiệm, các phương trình $\left(iii\right),\left(iv\right)$ đều có đúng 1 nghiệm nên phương trình đã cho có 4 nghiệm.

Câu 19. Chọn B

Đặt $t=\cos^2 x-\cos x.$ Phương trình tương đương $f\left(t\right)=\dfrac{1}{5} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t=t_1 \in \left(-\infty;-\dfrac{1}{4}\right) & \left(i\right) \\ t=t_2 \in \left(-\dfrac{1}{4};0\right) & \left(ii\right) \\ t=t_3 \in \left(0;2\right) & \left(iii\right) \\ t=t_4 \in \left(2;+\infty\right) & \left(iv\right) \end{array}\right..$

Xét hàm số $t(x)=\cos^2 x-\cos x$ trên $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right]$, ta có $t'=-(2\cos x-1)\sin x\Rightarrow t'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=\frac{1}{2}\\ \sin x=0\end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên hàm $t(x)$ trên $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right]$ như sau:

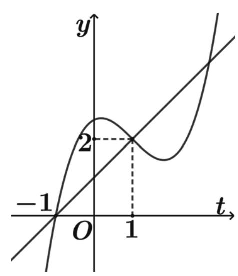
x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{3}$	π	$\frac{5\pi}{3}$	2π	$\frac{7\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{2}$
t	0	$-\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	2	$-\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	0

Từ bảng biến thiên trên, ta thấy các phương trình (i) và (iv) đều vô nghiệm, phương trình (ii) có 8 nghiệm thuộc $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right]$, phương trình (iii) có 2 nghiệm thuộc $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right]$. Vậy phương trình đã cho có 10 nghiệm thuộc $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right]$.

Câu 20. Chọn C

Đặt $t=\sin x-1$, phương trình đã cho tương đương với $f(t)=t+1$.

Trên cùng hệ trục tọa độ Oty, ta vẽ đồ thị hàm số $y=f(t)$ và đường thẳng $y=t+1$ (hình vẽ)



Từ đồ thị ta có $f(t)=t+1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\\ t=1\\ t=m,\quad (m>1).\end{array}\right.$

Ta có: $t'(x)=\cos x$, từ đó ta có bảng biến thiên hàm số $t(x)$ trên $[0;3\pi]$ như sau

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{2}$		3π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1		0		-2		0		-1

Từ bảng biến thiên trên, ta thấy phương trình $t=1$ và $t=m$ vô nghiệm, phương trình $t=-1$ có đúng 2 nghiệm thuộc $(0;3\pi)$ nên phương trình đã cho có đúng 2 nghiệm thuộc $(0;3\pi)$.

Câu 21. Chọn D

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$, ta thấy $f\left(x\right)\ge 0\ \forall x\in\left[-1;1\right]$.

Ta có: $\cos x\in\left[-1;1\right]\Rightarrow f\left(\cos x\right)\ge 0\Rightarrow f\left(\cos x\right)+1\ge 1$.

Mà $\cos^3 x\le 1$ nên phương trình

$$f\left(\cos x\right)+1=\cos^3 x\Leftrightarrow\begin{cases}f\left(\cos x\right)=0\\ \cos^3 x=1\end{cases}\Leftrightarrow\cos x=1\Leftrightarrow x=k2\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

Ta có: $k2\pi\in\left(0;100\pi\right)\Leftrightarrow k\in\left(0;50\right)$. Mà $k\in\mathbb{Z}\Rightarrow k\in\left\{1;2;...;49\right\}$. Vậy phương trình đã cho có 49 nghiệm thuộc $\left(0;100\pi\right)$.

Câu 22. Chọn B

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy $f\left(x\right)\ge -2\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f\left(2\cos x\right)\ge -2$, mà $-\sin x\ge -1$ nên $f\left(2\cos x\right)-\sin x+4\ge -2-1+4>0$, do đó phương trình đã cho tương đương với $2f\left(2\cos x\right)-1=0$

Đặt $2\cos x=t$, phương trình tương đương $f\left(t\right)=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}t=t_1\in\left(-\infty;-2\right) & \left(i\right)\\ t=t_2\in\left(-2;0\right) & \left(ii\right)\\ t=t_3\in\left(0;2\right) & \left(iii\right)\\ t=t_4\in\left(2;+\infty\right) & \left(iv\right)\end{array}\right.$.

Khảo sát hàm số $t\left(x\right)$ trên $\left[0;\dfrac{7\pi}{2}\right]$, ta có:

x	0		π		2π		3π		$\dfrac{7\pi}{2}$
t'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
t	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	0

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy phương trình $\left(i\right)$ và $\left(iv\right)$ vô nghiệm, phương trình $\left(ii\right)$ có 4 nghiệm phân biệt, phương trình $\left(iii\right)$ có đúng 3 nghiệm nên phương trình đã cho có 7 nghiệm.

Câu 23. Chọn C

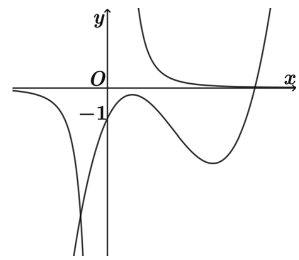
Từ đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$, dễ thấy $f\left(x\right)=x^4-2x^2$. Đặt $\sqrt{f\left(x\right)}=t$, phương trình đã cho tương đương với $\sqrt{f\left(t\right)+2}=t^2+1\Leftrightarrow\sqrt{t^4-2t^2+2}=t^2+1\Leftrightarrow t^4-2t^2+2=t^4+2t^2+1\Leftrightarrow t^2=\dfrac{1}{4}$

Phương trình đã cho tương đương $f\left(x\right)=\dfrac{1}{4}$, nên phương trình này có đúng 2 nghiệm.

Câu 24. Chọn C

Từ đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$, ta thấy phương trình $f\left(x\right)=-1$ có 3 nghiệm $\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=a\left(a>0\right)\\ x=b\left(b>a\right)\end{array}\right.$.

Do đó $f\left(x^3 f(x)\right)+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3 f(x)=0\ (i) \\ x^3 f(x)=a\ (ii) \\ x^3 f(x)=b\ (iii) \end{array}\right.$.



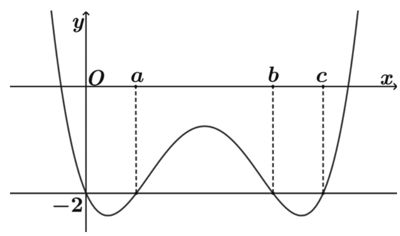
Xét $(i) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f(x)=0 \end{array}\right.$, do đó (i) có 2 nghiệm.

Xét $(ii) \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{a}{x^3}$, xét sự tương giao của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đồ thị hàm số $y=\dfrac{a}{x^3}$ $(a>0)$, dễ thấy chúng cắt nhau tại 2 điểm nên có 2 nghiệm.

Vậy (ii) và (iii) đều có 2 nghiệm nên phương trình đã cho có đúng 6 nghiệm.

Câu 25. Chọn D

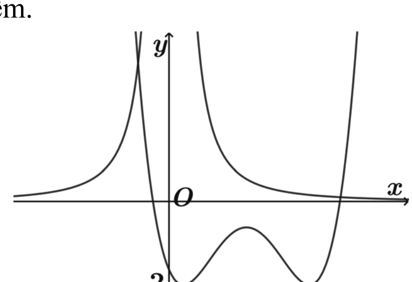
Từ đồ thị, ta thấy $f(x)=-2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=a \\ x=b \\ x=c \end{array}\right.(0<a<b<c)$.



Do đó $f\left(x^2 f(x)\right)=-2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 f(x)=0\ (i) \\ x^2 f(x)=a\ (ii) \\ x^2 f(x)=b\ (iii) \\ x^2 f(x)=c\ (iv) \end{array}\right.$.

Xét $(i) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f(x)=0 \end{array}\right.$, nên phương trình (i) có 3 nghiệm.

Xét $(ii) \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{a}{x^2}$, dễ thấy đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{a}{x^2}$ tại đúng 2 điểm nên phương trình này có đúng 2 nghiệm.



Tương tự, các phương trình (iii) và (iv) đều có đúng 2 nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có $3+3.2=9$ (nghiệm).

Câu 26. Chọn A

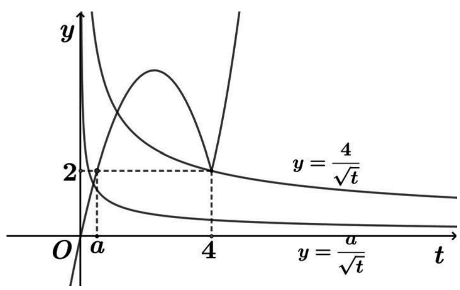
Xét sự tương giao của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ và đường thẳng $y=2$, ta thấy phương trình $f\left(x\right)=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=4\\x=a\left(0<a<4\right)\end{array}\right.$.

Do đó $f\left(xf\left(x^2\right)\right)=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}xf\left(x^2\right)=4\\xf\left(x^2\right)=a\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(x^2\right)=\dfrac{4}{x}\ (i)\\f\left(x^2\right)=\dfrac{a}{x}\ (ii)\end{array}\right.$ (do $x=0$ không là nghiêm).

Với $x<0$, ta có $x^2>0\Rightarrow f\left(x^2\right)>0$ (dựa vào đồ thị), nên các phương trình đều vô nghiệm.

Với $x>0$, đặt $x^2=t$, ta có $\left(i\right)\Leftrightarrow f\left(t\right)=\dfrac{4}{\sqrt{t}}\left(iii\right);\left(ii\right)\Leftrightarrow f\left(t\right)=\dfrac{a}{\sqrt{t}}\left(iv\right)$.

Trên cùng hệ trục tọa độ Oxt, vẽ các đồ thị $y=f\left(t\right);y=\dfrac{4}{\sqrt{t}};y=\dfrac{a}{\sqrt{t}}$ (minh họa như hình vẽ)



Từ đó $\left(iii\right)$ có 2 nghiệm, $\left(iv\right)$ có đúng 1 nghiệm nên phương trình đã cho có 3 nghiệm.

Câu 27. Chọn B

Từ đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$, ta vẽ bảng biến thiên của hàm số $y=f\left(x\right)$ như sau:

x	$-\infty$		-2		-1		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		↘		↗	$f\left(-1\right)$	↘		↗	$+\infty$

Từ đó, phương trình $f\left(f'\left(\sqrt{x^2+1}\right)\right)=f\left(-1\right)\ \left(i\right)$ có nghiệm $x=-1$ và $x=a\left(a>2\right)$. Ngoài ra phương trình $\left(i\right)$ còn có thể có thêm 1 nghiệm nữa là $x=b\left(b<-2\right)$.

Từ đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$, ta thấy $f'\left(x\right)\ge-1\ \forall x\in\left[-1;+\infty\right)$, mà $\sqrt{x^2+1}\ge1\Rightarrow f'\left(\sqrt{x^2+1}\right)\ge-1$.

Do đó phương trình $f'\left(\sqrt{x^2+1}\right)=b$ vô nghiệm.

Do đó $f\left(f'\left(\sqrt{x^2+1}\right)\right)=f\left(-1\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'\left(\sqrt{x^2+1}\right)=-1\ \left(i\right)\\f'\left(\sqrt{x^2+1}\right)=a\quad\left(ii\right)\end{array}\right.$.

Dễ thấy $(i) \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}=1 \Leftrightarrow x=0$; $(ii) \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}=c\,(c>2)$, phương trình này có 2 nghiệm.

Vậy phương trình (i) có đúng 3 nghiệm.

Câu 28. Chọn B

Điều kiện: $\begin{cases} x \neq 0 \\ 2x^2 \neq 1 \end{cases}$. Phương trình tương đương với: $\ln 2x^2 = \dfrac{1}{f\left(x^2+2\right)}$.

Xét hàm số $g(x)=\dfrac{1}{f\left(x^2+2\right)}-\ln 2x^2$ ta có $g'(x)=-\dfrac{2xf'\left(x^2+2\right)}{f^2\left(x^2+2\right)}-\dfrac{4x}{2x^2}=-2x\left[\dfrac{f'\left(x^2+2\right)}{f^2\left(x^2+2\right)}+\dfrac{1}{x^2}\right]$.

Dựa vào đồ thị hàm số

Chú ý rằng $f'(x)>0\ \forall x \geq 2$, do đó $f'\left(x^2+2\right)>0$. Từ đó $g'(x)$ đổi dấu qua điểm 0.

Dễ thấy $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty; \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty; \lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=+\infty; \lim\limits_{x\to 0^-} g(x)=+\infty$. Từ đó ta có bảng biến thiên hàm $g(x)$ như sau:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	‖	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-\infty$

Phương trình $g(x)=0$ có đúng 2 nghiệm nên phương trình $f\left(x^2+2\right)=\dfrac{1}{\ln 2x^2}$ có đúng 2 nghiệm.

Câu 29. Chọn C

Xét hàm số $g(x)=\ln f\left(x^2+1\right)-1$. Hàm số $g(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$, có: $g'(x)=\dfrac{2xf'\left(x^2+1\right)}{f\left(x^2+1\right)}$

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f(x)$, ta thấy $f(x)>0\ \forall x\in[1;+\infty)$ và $f'(x)>0\ \forall x\in[1;+\infty)$. Do đó $\begin{cases} f'\left(x^2+1\right)>0 \\ f\left(x^2+1\right)>0 \end{cases} \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow g'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$.

Hàm số $g(x)$ có đúng 1 điểm cực trị là $x=0$, có $g(0)=\ln f(1)-1=-1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$, ta có bảng biến thiên hàm số $g(x)$ như sau:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f(x)$, ta thấy phương trình $f(x)=2$ có đúng 4 nghiệm là $x=a\,(a<-1)$; $x=-1; x=0; x=b\,(b>1)$.

Do đó $f\left(g\left(x\right)\right)=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}g\left(x\right)=a\ \ (i)\\ g\left(x\right)=-1\,(ii)\\ g\left(x\right)=0\ \ (iii)\\ g\left(x\right)=b\ \ (iv)\end{array}\right.$

Dựa vào bảng biến thiên hàm số $y=g\left(x\right)$, ta thấy phương trình (i) vô nghiệm, phương trình (ii) có đúng 1 nghiệm $x=0$, phương trình (iii) và (iv) đều có 2 nghiệm phân biệt, nên phương trình đã cho có tất cả 5 nghiệm.

Câu 30. Chọn A

Xét hàm số $g\left(x\right)=f\left(x^2\right)\ln x$, có TXĐ: $\left(0;+\infty\right)$.

Ta có: $g'\left(x\right)=2xf'\left(x^2\right).\ln x+\frac{1}{x}.f\left(x^2\right)=\frac{1}{x}\left[f\left(x^2\right)+x^2f'\left(x^2\right)\ln x^2\right]\ \forall x\in\left(0;+\infty\right)$.

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$, ta thấy $f'\left(x\right)>0\ \forall x>0$.

Với $0<x<1$, ta có $x^2\in\left(0;1\right)\Rightarrow\begin{cases}f\left(x^2\right)<0\\ \ln x^2<0\end{cases}\Rightarrow g'\left(x\right)<0$.

Với $x>1$, ta có $x^2\in\left(1;+\infty\right)\Rightarrow\begin{cases}f\left(x^2\right)>0\\ \ln x^2>0\end{cases}\Rightarrow g'\left(x\right)>0$.

Lại có $g\left(1\right)=f\left(1\right)+f'\left(1\right).\ln 1=0$ và $\lim\limits_{x\to0^+}g\left(x\right)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(f\left(x^2\right)\ln x\right)=+\infty$ nên ta có bảng biến thiên của hàm số $y=g\left(x\right)$ trên $\left(0;+\infty\right)$ như sau:

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Từ đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$, ta có $f\left(g\left(x\right)\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}g\left(x\right)=a\left(a<-2\right)\\ g\left(x\right)=-1\\ g\left(x\right)=1\end{array}\right.$. Dựa vào bảng biến thiên của hàm $g\left(x\right)$, ta thấy các phương trình $g\left(x\right)=a$ và $g\left(x\right)=-1$ vô nghiệm, phương trình $g\left(x\right)=1$ có đúng 2 nghiệm nên phương trình đã cho có đúng 2 nghiệm.

BÀI 6 - PHƯƠNG PHÁP GHÉP TRỤC

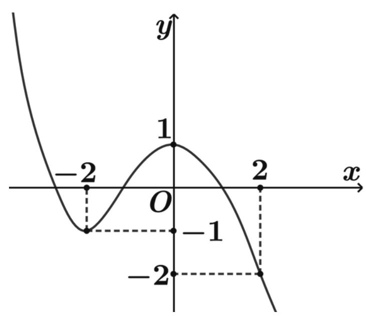
Phương pháp ghép trục cho ta hình ảnh về bảng biến thiên của hàm hợp $y = f\left(u\left(x\right)\right)$, khi ta đã biết thông tin về hàm số $f\left(x\right)$ và hàm số $u\left(x\right)$.

I. CÁCH LÀM TRUYỀN THỐNG CỦA CÁC BÀI TOÁN BIỆN LUẬN NGHIỆM

Trong thực tế, ta gặp khá nhiều bài toán có dạng: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ đã biết thông tin đồ thị (hoặc đã biết các khoảng đơn điệu), yêu cầu tìm m để phương trình $f\left(u\left(x\right)\right) = m$ có đúng k nghiệm ($k \in \mathbb{R}$). Những bài toán này thường là những bài toán khó ở mức VD-VDC với lời giải khá cồng kềnh và thường xét khá nhiều trường hợp.

Để cho dễ hiểu, chúng ta sẽ đi từ trường hợp cụ thể, sau đó đến bài toán tổng quát

Bài toán mở đầu. Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có đồ thị như sau



Biết $\lim\limits_{x \to +\infty} f\left(x\right) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f\left(x\right) = +\infty$. Tìm m để phương trình $f\left(x^3 - 3x\right) = m$ có đúng 5 nghiệm?

Giải

Cách làm truyền thống

Đặt $u = x^3 - 3x$, ta có $u' = 3x^2 - 3 \Rightarrow u' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right.$. Từ đó ta có bảng biến thiên hàm $u\left(x\right)$ như sau

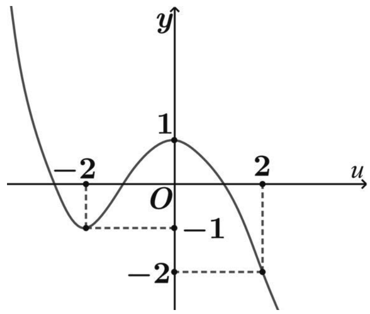
x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
u'		$+$	0	$-$	0	$+$	
u	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên trên, ta thấy:

- Với $\left[\begin{array}{l} u < -2 \\ u > 2 \end{array}\right.$ thì phương trình $x^3 - 3x = u$ có đúng 1 nghiệm x.
- Với $\left[\begin{array}{l} u = -2 \\ u = 2 \end{array}\right.$ thì phương trình $x^3 - 3x = u$ có đúng 2 nghiệm x.

- Với $-2<u<2$ thì phương trình $x^3-3x=u$ có đúng 3 nghiệm x.

Xét hệ trục tọa độ Ouy, đồ thị hàm số $y=f(u)$ như hình vẽ:



- Với $m\in(-\infty;-2)$, phương trình $f(u)=m\Leftrightarrow u=u_1\left(u_1\in(2;+\infty)\right)\Leftrightarrow x^3-3x=u_1$, phương trình này có đúng 1 nghiệm x.
- Với $m=-2$, phương trình $f(u)=m\Leftrightarrow u=2\Leftrightarrow x^3-3x=2$, phương trình này có đúng 2 nghiệm x.
- Với $-2<m<-1$, phương trình $f(u)=m\Leftrightarrow u=u_2\left(u_2\in(-2;2)\right)\Leftrightarrow x^3-3x=u_2$, phương trình này có đúng 3 nghiệm x.
- Với $m=-1$, phương trình $f(u)=m\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=-2\\u=u_3\in(-2;2)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^3-3x=-2\\x^3-3x=u_3\end{array}\right.$, do đó trường hợp này có 5 nghiệm x.
- Với $-1<m<1$, phương trình $f(u)=m\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=u_4\in(-2;2)\\u=u_5\in(-2;2)\\u=u_6\in(-\infty;-2)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^3-3x=u_4\\x^3-3x=u_5\\x^3-3x=u_6\end{array}\right.$, do đó trường hợp này có 7 nghiệm x.
- Với $m=1$, phương trình $f(u)=m\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=0\\u=u_6\in(-\infty;-2)\end{array}\right.$, do đó trường hợp này có 4 nghiệm x.
- Với $m>1$, phương trình $f(u)=m\Leftrightarrow u=u_7\in(-\infty;-2)$, do đó trường hợp này có 1 nghiệm x.

Vậy phương trình đã cho có đúng 5 nghiệm khi và chỉ khi $m=-1$.

Nhận xét

Cách làm này khá cồng kềnh, hướng giải quyết là đối chiếu từ nghiệm của phương trình $f(u)=m$ theo u chuyển sang nghiệm của phương trình $x^3-3x=u$ theo x. Mặc dù cách này trình bày tự luận khá tốt tuy nhiên nếu làm không cẩn thận, hoặc làm tắt sẽ rất dễ dẫn đến sai sót.

Ta vẫn tìm được m trong trường hợp bài toán bỏ bớt giả thiết $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty;\ \lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$. Tuy nhiên khi bỏ giả thiết này thì sẽ không biện luận được tất cả các trường hợp có thể có của m, ví dụ khi $m>1$ thì ta chưa thể khẳng định được phương trình $f(u)=m$ có đúng 1 nghiệm, vì có thể không có nghiệm.

II. CÁCH GIẢI THEO PHƯƠNG PHÁP GHÉP TRỤC

> Xét bài toán ở Ví dụ 1 ở trên, ta sẽ thiết lập bảng biến thiên của hàm số $y = f\left(x^3 - 3x\right)$ khi đã biết các thông tin của bài toán. Bản chất của phương pháp này là ta gộp sự biến thiên của $x \to u = x^3 - 3x$ và sự biến thiên của $u \to f(u)$

Đặt $u = x^3 - 3x,$ hàm số $u(x)$ có 2 điểm cực trị là $x = 1$ và $x = -1,$ từ đó ta có bảng biến thiên hàm số $f\left(x^3 - 3x\right)$ theo phương pháp ghép trục như sau

x	$-\infty$			-1		1		$+\infty$
u	$-\infty$	-2	0	2	0	-2	0	$+\infty$
$f(u)$	$+\infty$	-1	1	-2	1	-1	1	$-\infty$

Từ bảng biến thiên trên, ta thấy đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = f\left(x^3 - 3x\right)$ tại đúng 5 điểm khi và chỉ khi $m = -1.$

III. BẢN CHẤT CỦA PHƯƠNG PHÁP GHÉP TRỤC

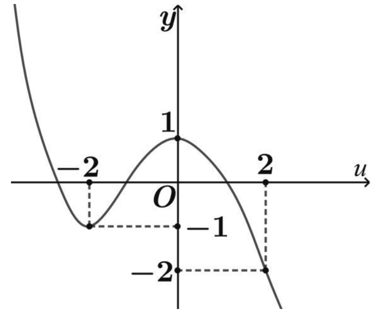
Ở cách giải trên, ta đã lập bảng biến thiên hàm số $f\left(x^3 - 3x\right)$ gồm có 3 dòng

- *Dòng 1: Gồm các điểm cực trị của hàm số $u(x)$ và các điểm biên khi ta muốn khảo sát hàm số $f\left(x^3 - 3x\right)$ trên khoảng nào. Cụ thể ở đây là $(-\infty; +\infty)$ và hàm số $u(x) = x^3 - 3x$ có 2 điểm cực trị là -1 và 1.*
- *Dòng 2: Ta điền các giá trị cực trị và giá trị biên của hàm số $u(x) = x^3 - 3x$ vào, cụ thể là $\lim\limits_{x \to -\infty} u(x) = -\infty,$ $u(-1) = 2,$ $u(1) = -2,$ $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = +\infty.$ Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x),$ ta thấy trên $(-\infty; 2)$ có 2 điểm cực trị là -2 và $0,$ trên $(-2; 2)$ có đúng 1 điểm cực trị là $0,$ trên khoảng $(-2; +\infty)$ có đúng 1 điểm cực trị là $0.$*
- *Dòng 3: Điền các giá trị của hàm ứng với mỗi trường hợp của biến (đã được liệt kê ở dòng 2), sau đó hoàn tất bảng biến thiên bằng các dấu mũi tên*

Giải thích

Các em xem video sau (bằng cách quét mã QR-CODE trên điện thoại) để hiểu rõ hơn

- Bản chất của việc vẽ bảng biến thiên hàm số $f(u(x))$ là ta coi $u(x)$ là biến, và chia nhỏ các khoảng của biến ra gồm 3 khoảng là $(-\infty; 2),$ $(-2; 2)$ và $(-2; +\infty).$ Đặc biệt ở đây khoảng $(-2; 2)$ biến đi ngược, nghĩa là biến đi từ 2 về $-2.$ Từ đồ thị hàm số $y = f(x),$ ta có đồ thị hàm số $y = f(u)$ trên hệ trục tọa độ Ouy như sau



- Hãy xét các giá trị của hàm số $f(u)$ trên từng khoảng của u. Đầu tiên u chạy từ $-\infty \to 2$, ở đây có 2 điểm cực trị là -2 và 0 làm thay đổi chiều biến thiên của hàm $f(u)$, từ đó ta điền các giá trị -2 và 0 và giữa. Nghĩa là ta đã chia nhỏ khoảng $u \in (-\infty;2)$ thành các khoảng $(-\infty;-2);(-2;0)$ và $(0;2)$ để xét các chiều biến thiên và vẽ dấu mũi tên ở dòng thứ 3.

- Tương tự với khoảng $u \in (-2;+\infty)$, khi u chạy từ $2 \to +\infty$, có chạy qua 1 điểm cực trị là $u=0$, điểm này sẽ làm thay đổi chiều biến thiên của hàm $f(u)$ nên ta điền 0 vào giữa khoảng, bản chất là ta đang chia nhỏ khoảng này thành 2 khoảng $(-2;0)$ và $(0;+\infty)$ để xét chiều biến thiên.

- Với khoảng $(-2;2)$, hãy chú ý ở đây u chạy ngược $2 \to -2$, giá trị của biến cũng sẽ đi ngược lại so với hình dáng ban đầu. Khi u chạy từ $-2 \to 0$, giá trị của biến đi từ $-2 \to 1$, và khi u chạy từ $0 \to -2$, giá trị của biến đi từ $1 \to -1$ nên ta điền điểm 0 vào giữa vì điểm này làm thay đổi chiều biến thiên.

IV. TỔNG QUÁT

Cho hàm số $y=f(x)$ đã biết thông tin (ta có thể xác định tất cả các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số), ta có thể xác định được bảng biến thiên của hàm số $y=f(u(x))$ trên D như sau

- Bước 1: Xác định tất cả các điểm cực trị của hàm số $y=u(x)$ nằm trong khoảng D mà ta khảo sát

- Bước 2: Lập bảng biến thiên xét sự tương quan giữa hai hàm $u(x)$ (biến x) và $f(u)$ (biến u).

x	x_1					x_2		x_3	$\cdots$	x_n
$u(x)$	$u(x_1)$	u_1	u_2	$\dots$	u_k	$u(x_2)$	$\cdots$	$u(x_3)$	$\cdots$	$u(x_n)$
$f(u(x))$	$f(u(x_1))$ ↗	$f(u_1)$ ↘	$f(u_2)$ ↗	$\dots$	$f(u_k)$ ↗	$f(u(x_2))$ ↘	$\dots$	$f(u(x_3))$	$\dots$	$f(u(x_n))$

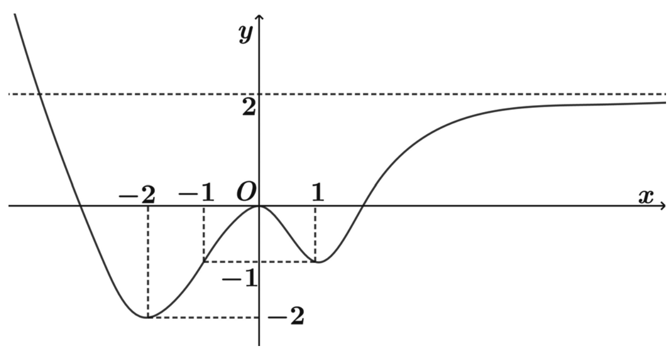
Bảng biến thiên theo phương pháp ghép trục này thường có 3 dòng:

- Dòng 1 (dòng của x): Tất cả các điểm cực trị của hàm số $u(x)$ trong khoảng D và hai đầu mút của D, chú ý rằng ở bảng trên, $x_2, x_3, \dots, x_{n-1}$ là các điểm cực trị của $u(x)$, trong trường hợp $D=(-\infty;+\infty)$ thì ta coi x_1 là $-\infty$, x_n là $+\infty$, khi đó $u(x_1)=\lim\limits_{x\to x_1} u(x)$, $u(x_n)=\lim\limits_{x\to x_n} u(x)$.

- Dòng 2 (dòng của u): Ta điền tất cả các giá trị $u(x_1), u(x_2), ..., u(x_n)$, và dựa vào giả thiết bài toán, quan sát hàm $f(u)$ với u đóng vai trò là biến.
    - Nếu $u(x_1) < u(x_2)$, khi biến u chạy $u(x_1) \to u(x_2)$, đi qua các điểm cực trị là $u_1, u_2, ..., u_k$ thì ta điền các giá trị đó vào giữa khoảng theo thứ tự $u(x_1) < u_1 < u_2 < ... < u_k < u(x_2)$.
    - Nếu $u(x_1) > u(x_2)$, khi biến u chạy $u(x_2) \to u(x_1)$, đi qua các điểm cực trị là $u_1, u_2, ..., u_k$ thì ta điền các giá trị đó vào giữa khoảng theo thứ tự $u(x_1) > u_1 > u_2 > ... > u_k > u(x_2)$.
    - Nếu biến u chạy trong khoảng này không đi qua điểm cực trị nào thì ta không điền gì cả
    - Làm tương tự với các khoảng $u(x_2) \to u(x_3)$, $u(x_3) \to u(x_4)$, $\dots, u(x_{n-1}) \to u(x_n)$.
- Dòng 3 (dòng của f): Điền tất cả các giá trị của hàm f theo biến u rồi

V. MỘT SỐ VÍ DỤ

Ví dụ 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ (đường thẳng $y = 2$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số).



Tìm m để phương trình $f(x^2 + 2x) = m$

a) Có nhiều nghiệm nhất. b) Có đúng 2 nghiệm. c) Có số lẻ nghiệm.

Giải

Nhận xét: Bài toán sẽ được giải quyết nếu ta vẽ được bảng biến thiên của hàm số $y = f(x^2 + 2x)$

Đặt $u = x^2 + 2x$, ta có $u' = 2x + 2 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x = -1$. Ta vẽ bảng biến thiên của hàm số $y = f(x^2 + 2x)$ theo phương pháp ghép trục như sau:

x	$-\infty$			-1			$+\infty$
u	$+\infty$	1	0	-1	0	1	$+\infty$
$f(u)$	2	-1	0	-1	0	-1	2

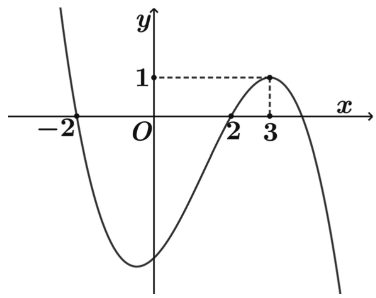
Số nghiệm của phương trình $f(x^2 + 2x) = m$ bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x^2 + 2x)$ và đường thẳng $y = m$.

a) Phương trình $f\left(x^2+2x\right)=m$ có nhiều nhất 6 nghiệm khi $-1<m<0$.

b) Phương trình $f\left(x^2+2x\right)=m$ có đúng 2 nghiệm khi $0<m<2$.

c) Phương trình $f\left(x^2+2x\right)=m$ có số lẻ nghiệm khi $m=-1$.

Ví dụ 2. Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ



Tìm m để phương trình $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=m$ có đúng 4 nghiệm

Giải

Đặt $u=x+\frac{1}{x}$, ta có $u'=1-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2}=\frac{(x-1)(x+1)}{x^2}$. Từ đó ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f\left(x+\frac{1}{x}\right)$ theo phương pháp ghép trục như sau:

x	$-\infty$	-1	0			1		$+\infty$
u	$-\infty$	-2	$-\infty$	$+\infty$	3	2	3	$+\infty$
$f(u)$	$+\infty$ ↘	0 ↗	$+\infty$	$-\infty$ ↗	1 ↘	0 ↗	1 ↘	$-\infty$

Do đó phương trình $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=m$ có đúng 4 nghiệm khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=1 \end{array}\right.$.

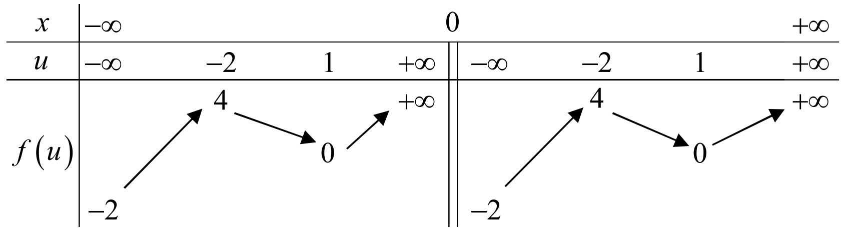
Ví dụ 3. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	-2	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=\left|f\left(x-\frac{1}{x}\right)\right|$?

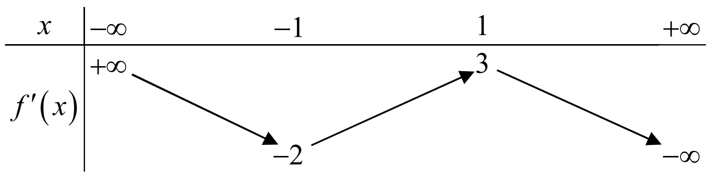
Giải

Đặt $u = x - \dfrac{1}{x}$, ta có $u' = 1 + \dfrac{1}{x^2} > 0\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Từ đó ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f\left(x - \dfrac{1}{x}\right)$ theo phương pháp ghép trục như sau:



Từ bảng biến thiên trên, ta thấy hàm số $y = f\left(x - \dfrac{1}{x}\right)$ có đúng 4 điểm cực trị và phương trình $f\left(x - \dfrac{1}{x}\right) = 0$ có 4 nghiệm, trong đó có đúng 2 nghiệm đơn, vì thế hàm số $y = \left|f\left(x - \dfrac{1}{x}\right)\right|$ có $4 + 2 = 6$ điểm cực trị.

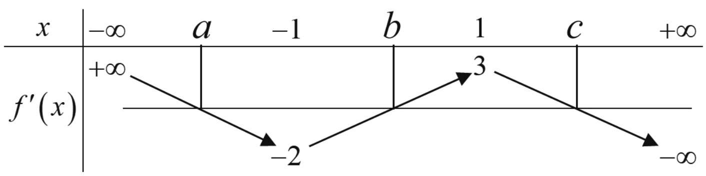
Ví dụ 4. Cho hàm số $y = f(x)$, hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như sau



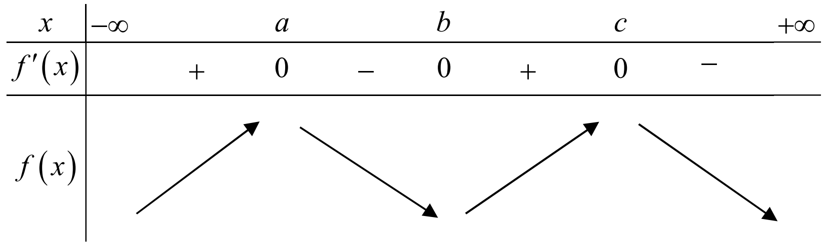
Hàm số $y = f\left(4x^2 + 4x\right)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

Giải

Từ bảng biến thiên của hàm số $y = f'(x)$, ta thấy phương trình $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a \in (-\infty; -1) \\ x = b \in (-1; 1) \\ x = c \in (1; +\infty) \end{array}\right.$.



Từ đó ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ như sau

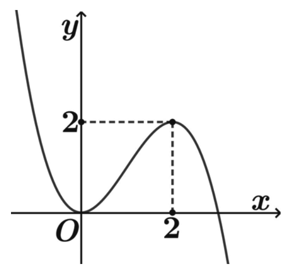


Đặt $u = 4x^2 + 4x$, ta có $u' = 8x + 4 \Rightarrow u' = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2}$, từ đó ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f\left(4x^2 + 4x\right)$ theo phương pháp ghép trục như sau

x	$-\infty$			$-\dfrac{1}{2}$			$+\infty$
u	$+\infty$	c	b	-1	b	c	$+\infty$
$f(u)$	↗	↘	↗	↘	↗	↘	

Vậy hàm số $f\left(4x^2+4x\right)$ có đúng 2 điểm cực tiểu.

Ví dụ 5. Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ



Hàm số $y=\left|f^3(x+2)-3f(x+2)\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

Giải

Đặt $g(x)=\left|f^3(x)-3f(x)\right|$, ta có $y=\left|f^3(x+2)-3f(x+2)\right|=g(x+2)$. Do đó đồ thị hàm số $y=\left|f^3(x+2)-3f(x+2)\right|$ được tạo ra bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số $y=g(x)$ sang trái 2 đơn vị, nên số điểm cực trị của hàm số $y=\left|f^3(x+2)-3f(x+2)\right|$ bằng số điểm cực trị của hàm số $y=g(x)$.

Xét hàm số $h(x)=f^3(x)-3f(x), v(x)=x^3-3x \Rightarrow g(x)=\left|h(x)\right|$ và $h(x)=v\left(f(x)\right)$. Dễ thấy bảng biến thiên của hàm số $v(x)$ như sau

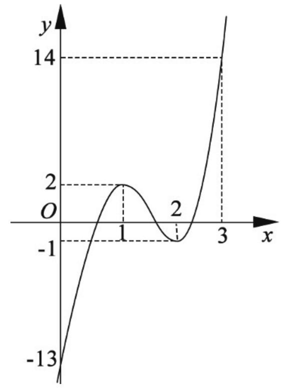
x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
v'		$+$	0	$-$	0	$+$	
v	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

Từ đó ta có bảng biến thiên của hàm số $v\left(h(x)\right)$ theo phương pháp ghép trục như sau

x	$-\infty$		0		2			$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	1	0	1	2	1	-1	$-\infty$
$v\left(f(x)\right)$	$+\infty$ ↘	-2 ↗	0 ↘	-2 ↗	2 ↘	-2 ↗	2 ↘	$-\infty$

Từ đó, hàm số $v\left(f(x)\right)$ có 6 điểm cực trị và phương trình $v\left(f(x)\right)=0$ có đúng 5 nghiệm đơn (bội lẻ) nên hàm số $y=\left|v\left(f(x)\right)\right|$ có tất cả $6+5=11$ điểm cực trị.

Ví dụ 6. Cho hàm số $f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ



Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(f\left(x\right)+1\right)=m$ có ba nghiệm phân biệt bằng

A. 11. **B.** 14. **C.** 22. **D.** 27.

Giải

Đặt $u=f\left(x\right)+1$, dựa vào đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$, ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f\left(f\left(x\right)+1\right)$ theo phương pháp ghép trục như sau

x	$-\infty$			1			2			$+\infty$
$f\left(x\right)$	$-\infty$			2			-1			$+\infty$
u	$-\infty$	1	2	3	2	1	0	1	2	$+\infty$
$f\left(u\right)$	$-\infty$	2	-1	14	-1	2	-13	2	-1	$+\infty$

Từ đây, phương trình $f\left(f\left(x\right)+1\right)=m$ có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l}-13<m<-1\\2<m<14\end{array}\right.$. Mà $m\in\mathbb{Z}$ nên có 22 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Cách giải truyền thống

Đặt $f\left(x\right)+1=t$, phương trình đã cho tương đương với $f\left(t\right)=m$

Nếu phương trình $f\left(t\right)=m$ có nhiều hơn 1 nghiệm t (nghĩa là $-1\le m\le 2$), giả sử 2 nghiệm trong số đó là t_1 và t_2, dựa vào đồ thị, ta thấy các nghiệm này đều thuộc $\left(0;3\right)$, do đó $t_1-1;t_2-1\in\left(-1;2\right)$ nên các phương trình $f\left(x\right)=t_1-1$ và $f\left(x\right)=t_2-1$ đều có 3 nghiệm phân biệt. Do đó phương trình $f\left(f\left(x\right)+1\right)=m$ có ít nhất 6 nghiệm (loại).

Vậy phương trình $f\left(t\right)=m$ có đúng 1 nghiệm, giả sử là nghiệm t_0. Phương trình tương đương với $f\left(x\right)=t_0-1$, phương trình này có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\Leftrightarrow t_0-1\in\left(-1;2\right)\Leftrightarrow t_0\in\left(0;3\right)$.

Vậy cần tìm m để phương trình $f\left(t\right)=m$ có đúng 1 nghiệm, nghiệm đó thuộc $\left(0;3\right)$. Điều này xảy ra khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l}2<m<14\\-13<m<-1\end{array}\right.$.

Mà $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\left\{3;4;...;13\right\}\cup\left\{-12;-11;...;-2\right\}$. Tổng các giá trị của m là $13-2=11$.

VI. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

1. Cho hàm số $f(x)=x^2+2x$. Tìm m để phương trình $f(x^2+2x-1)=m$:

a) Vô nghiệm. b) Có đúng 1 nghiệm. c) Có đúng 2 nghiệm. d) Có đúng 3 nghiệm.

2. Cho hàm số $f(x)=x^2-2x$. Tìm m để phương trình $f(x^3-3x)=m$:

a) Vô nghiệm. b) Có đúng 1 nghiệm. c) Có đúng 2 nghiệm. d) Có đúng 3 nghiệm.
e) Có đúng 4 nghiệm. f) Có đúng 5 nghiệm. g) Có đúng 6 nghiệm.

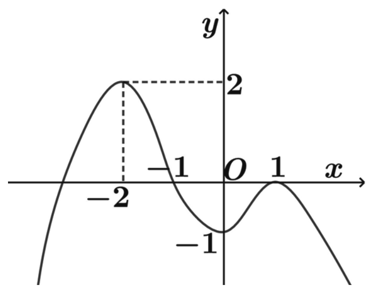
3. Cho hàm số $f(x)=x^3+3x^2$. Tìm m để phương trình $f(x^3+3x^2-1)=m$:

a) Có đúng 1 nghiệm b) Có đúng 2 nghiệm c) Có đúng 3 nghiệm d) Có đúng 4 nghiệm
e) Có đúng 5 nghiệm f) Có đúng 6 nghiệm g) Có đúng 7 nghiệm

4. Cho hàm số $f(x)=x^3-3x$. Tìm m để phương trình $f(f(x))=m$:

a) Có đúng 1 nghiệm. b) Có đúng 5 nghiệm. c) Có nhiều hơn 5 nghiệm.

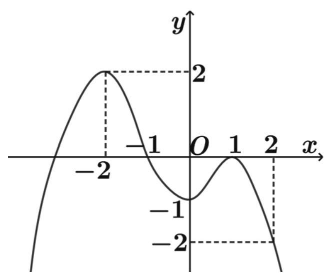
5. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Biết $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.



Tìm m để phương trình $f(x^2-2x)=m$ có

a) Đúng 2 nghiệm. b) Đúng 3 nghiệm. c) Đúng 4 nghiệm. d) Nhiều hơn 4 nghiệm.

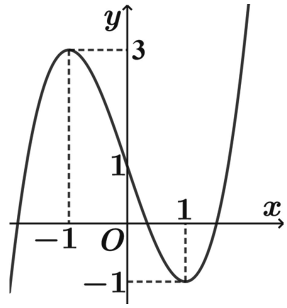
6. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Biết $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.



Tìm m để phương trình $f(f(x))=m$ có

a) Vô nghiệm. b) Đúng 2 nghiệm. c) Đúng 3 nghiệm. d) Đúng 4 nghiệm.
e) Đúng 6 nghiệm. f) Đúng 7 nghiệm. g) Nhiều hơn 7 nghiệm.

7. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(\cos x)=m$ có 4 nghiệm thuộc nửa khoảng $\left[0;\dfrac{7\pi}{2}\right)$ là



A. $[1;3)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(-1;3)$. **D.** $(1;3)$.

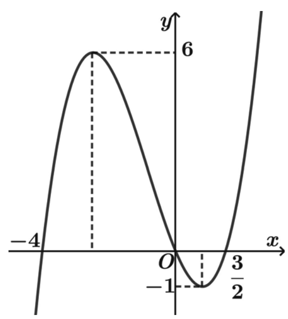
8. **[ĐỀ CHÍNH THỨC 2020 – LẦN 2]** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	-2	↗	2	↘	-3	↗	$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $3f\left(x^2-4x\right)=m$ có ít nhất 3 nghiệm thực phân biệt thuộc khoảng $(0;+\infty)$?

A. 15. **B.** 12. **C.** 14. **D.** 13.

9. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Biết $\lim\limits_{x\to-\infty}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}=+\infty$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $\left|f\left(x^3-3x^2\right)\right|-\log_2 m=0$ có 8 nghiệm phân biệt?



A. 60. **B.** 63. **C.** 62. **D.** 61.

10. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
y'			$-$		0		$+$		0	$-$	
y	$+\infty$	↘	3	↘	-1	↗	1	↗	3	↘	$-\infty$

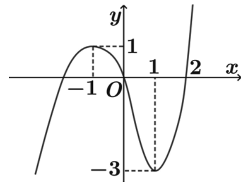
Số giá trị nguyên của tham số *m* để phương trình $f^2(\cos x)+(m-20)f(\cos x)+m-21=0$ có đúng 6 nghiệm thuộc $[0;2\pi]$ là

A. 6. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

11. Cho hàm số $f\left(x\right)=x^3-3x+1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(f\left(x\right)-1\right)=2m-1$ có đúng 9 nghiệm

A. 7. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 9.

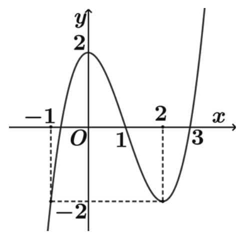
12. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ



Tìm m để phương trình $f\left[2+f\left(\mathrm{e}^x\right)\right]=m$ có đúng 3 nghiệm?

A. $0<m<1$. **B.** $0\le m<1$. **C.** $m>0$. **D.** $m\le 1$.

13. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị như hình vẽ



Tìm m để phương trình $f\left(2\sin x+1\right)=m$ có 6 nghiệm phân biệt thuộc $\left[0;2\pi\right]$

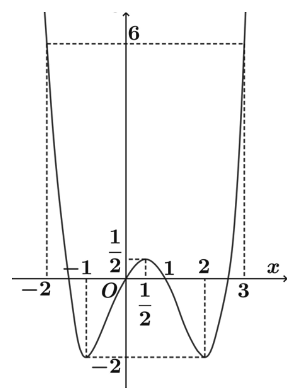
A. $-2<m\le 0$. **B.** $m<-2$. **C.** $0\le m<2$. **D.** $-2<m<0$.

14. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ

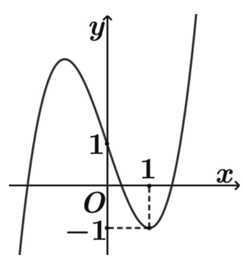
Phương trình $f\left(x^3-3x\right)=m$ có 6 nghiệm phân biệt thuộc $\left[-1;2\right]$ khi và chỉ khi

A. $-2<m<\dfrac{1}{2}$. **B.** $-2\le m<\dfrac{1}{2}$.

C. $m<-2$. **D.** $m>1$.

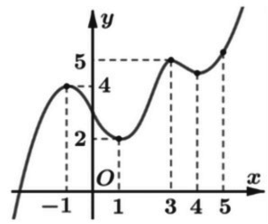


15. Cho hàm số $f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Có tất cả bao nhiêu số nguyên $m\in\left[-10;10\right]$ để phương trình $f\left(x^4+x^2\right)-m^2+10=0$ có đúng hai nghiệm phân biệt là



A. 14. **B.** 15. **C.** 16. **D.** 18.

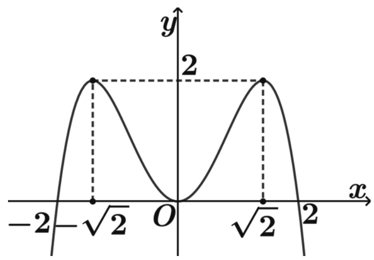
16. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(x^2-2x\right)=m$ có đúng 4 nghiệm thực phân biệt thuộc đoạn $\left[-\dfrac{3}{2};\dfrac{7}{2}\right]$?



A. 1. **B.** 2.

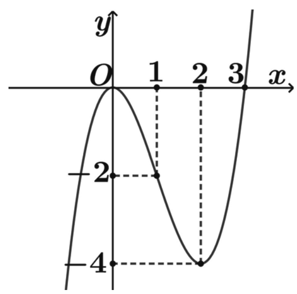
C. 3. **D.** 4.

17. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Tìm m để phương trình $f\left(\sqrt{4-x^2}\right)=m$ có 4 nghiệm phân biệt



A. $0\le m<2$. **B.** $m\ge 2$. **C.** $0<m\le 2$. **D.** $0<m<2$.

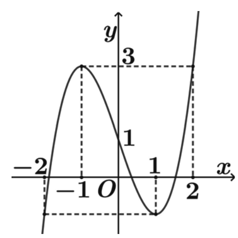
18. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f\left(\sqrt{-x^2+4x-3}\right)=m$ có đúng 2 nghiệm?



A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

19. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ

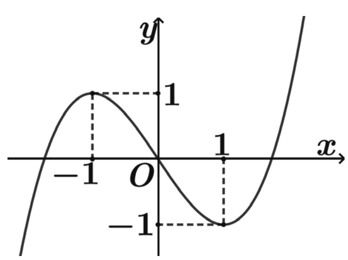
Số điểm cực tiểu của hàm số $y=f\left(x^3-3|x|\right)$ là



A. 3. **B.** 4.

C. 7. **D.** 6.

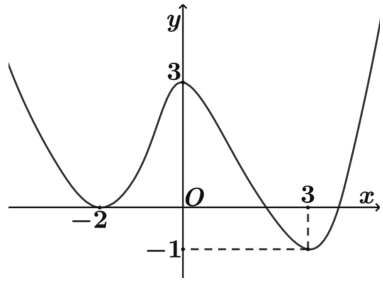
20. Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ



Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=\left|f^2(x)+f(x)-3\right|$ là

A. 5. **B.** 7. **C.** 9. **D.** 11.

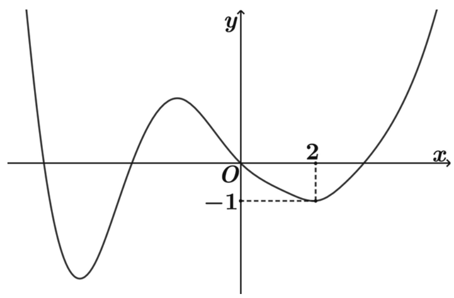
21. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Biết $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty;\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.$



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = \left|f(1-2x) - 4f^2(1-2x) + 2\right|$ là

A. 11. **B.** 13. **C.** 15. **D.** 17.

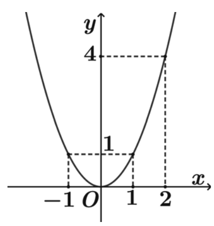
22. Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx$ có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu số nguyên $m \in [-10;10]$ để phương trình $2f\left(\dfrac{1}{x^2}\right) = m + 2$ có đúng 2 nghiệm?

A. 12. **B.** 13. **C.** 15. **D.** 14.

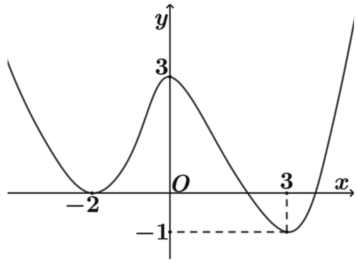
23. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ



Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f(3f(\sin x) - 1) = m$ có đúng 4 nghiệm thuộc $[0;2\pi]$

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 2.

24. Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm đa thức và có đồ thị như hình vẽ.



Số điểm cực trị của hàm số $y = f(2|x| + 1)$ là

A. 1. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 5.

25. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	0	$\nearrow$	16	$\searrow$	4	$\nearrow$	12

Hỏi có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $\log_6\left(2f(x)+m\right) = \log_4\left(f(x)\right)$ có 4 nghiệm phân biệt?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 7.

26. Cho hàm số $f(x) = x^2 + \dfrac{2}{x}$. Chứng minh rằng với mọi giá trị của m, phương trình $f\left(x^3 - 3x\right) = m$ luôn có đúng 2 nghiệm thuộc $(0; +\infty)$

ĐÁP ÁN

7D	**8A**	**9D**	**10C**	**11B**	**12B**	**13A**	**14A**	**15C**	**16B**
17D	**18C**	**19B**	**20B**	**21B**	**22D**	**23A**	**24C**	**25A**	

Câu 1. Giải

Ta có: $f'(x) = 2x + 2,$ từ đó ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Đặt $u = x^2 + 2x - 1,$ ta vẽ bảng biến thiên hàm số $y = f\left(x^2 + 2x - 1\right)$ theo phương pháp ghép trục

x	$-\infty$				-1				$+\infty$
u	$+\infty$		-1		-2		-1		$+\infty$
$f(u)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $f\left(x^2 + 2x - 1\right) = m$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f\left(x^2 + 2x - 1\right)$ và đường thẳng $y = m,$ từ đó:

- Phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi $m < -1.$
- Không tồn tại m để phương trình có đúng 1 nghiệm
- Phương trình có đúng 2 nghiệm khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m > 0 \end{array}\right.$.
- Phương trình có đúng 3 nghiệm khi và chỉ khi $m = 0.$

Câu 2. Giải

Ta có: $f'(x) = 2x - 2,$ từ đó ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ như sau:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$

Đặt $u = x^3 - 3x$ ta vẽ bảng biến thiên hàm số $y = f\left(x^2 + 2x - 1\right)$ theo phương pháp ghép trục

x				-1				-1					
u	$-\infty$		1		2		1		-2		1		$+\infty$
$f(u)$	$+\infty$	↘	-1	↗	0	↘	-1	↗	8	↘	-1	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên trên, ta có

- Phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi $m < -1.$
- Phương trình có đúng 1 nghiệm khi và chỉ khi $m \in \varnothing.$
- Phương trình có đúng 2 nghiệm khi và chỉ khi $m > 8.$
- Phương trình có đúng 3 nghiệm khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l} m = 8 \\ m = -1 \end{array}\right..$
- Phương trình có đúng 4 nghiệm khi và chỉ khi $0 < m < 8.$
- Phương trình có đúng 5 nghiệm khi và chỉ khi $m = 0.$
- Phương trình có đúng 6 nghiệm khi và chỉ khi $-1 < m < 0.$

Câu 3. Giải

Ta có: $f'(x) = 3x^2 + 6x,$ từ đó ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ như sau

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

Đặt $u = x^3 + 3x^2 - 1,$ ta có $u' = 3x^2 + 6x$ nên ta có bảng biến thiên hàm số $y = f\left(x^3 + 3x^2 - 1\right)$ theo phương pháp ghép trục như sau:

x	$-\infty$						-2				0				$+\infty$
u	$-\infty$		-2		0		3		0		-1		0		$+\infty$
$f(u)$	$-\infty$	↗	4	↘	0	↗	54	↘	0	↗	2	↘	0	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên trên:

- Phương trình có 1 nghiệm khi $\left[\begin{array}{l} m<0 \\ m>54 \end{array}\right.$.
- Phương trình có 2 nghiệm khi $m=54$.
- Phương trình có 3 nghiệm khi $4<m<54$.
- Phương trình có 4 nghiệm khi $\left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=4 \end{array}\right.$.
- Phương trình có 5 nghiệm khi $2<m<4$.
- Phương trình có 6 nghiệm khi $m=2$.
- Phương trình có 7 nghiệm khi $0<m<2$.

Câu 4. Giải

Ta có: $f'(x)=3x^2-3,$ từ đó ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

Ta vẽ bảng biến thiên của hàm số $y=f\left(f(x)\right)$ theo phương pháp ghép trục như sau:

x	$-\infty$			-1			1			$+\infty$
u	$-\infty$	-1	1	2	1	-1	-2	-1	1	$+\infty$
$f(u)$	$-\infty$	↗ 2	↘ -2	↗ 2	↘ -2	↗ 2	↘ -2	↗ 2	↘ -2	↗ $+\infty$

Từ bảng biến thiên trên, ta thấy

- Phương trình $f\left(f(x)\right)=m$ có đúng 1 nghiệm khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l} m<-2 \\ m>2 \end{array}\right.$.
- Phương trình $f\left(f(x)\right)=m$ có đúng 5 nghiệm khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l} m=-2 \\ m=2 \end{array}\right.$.
- Phương trình $f\left(f(x)\right)=m$ có nhiều hơn 5 nghiệm khi và chỉ khi $-2<m<2$.

Câu 5. Giải

Đặt $u=x^2-2x,$ ta có $u'=2x-2$ nên ta có bảng biến thiên hàm số $y=f\left(x^2-2x\right)$ theo phương pháp ghép trục như sau:

x	$-\infty$			1			$+\infty$
u	$+\infty$	1	0	-1	0	1	$+\infty$
$f(u)$	$-\infty$	↗ 0	↘ -1	↗ 0	↘ -1	↗ 0	↘ $-\infty$

Từ bảng biến thiên trên, ta có:

- Không tồn tại m để phương trình $f\left(x^2-2x\right)=m$ có đúng 2 nghiệm
- Phương trình $f\left(x^2-2x\right)=m$ có đúng 3 nghiệm khi và chỉ khi $m=0$.
- Phương trình $f\left(x^2-2x\right)=m$ có đúng 4 nghiệm khi và chỉ khi $m=-1$.
- Phương trình $f\left(x^2-2x\right)=m$ có nhiều hơn 4 nghiệm khi và chỉ khi $-1<m<0$.

Câu 6. Giải

Từ đồ thị hàm số $y=f(x)$, bằng việc đặt $f(x)=u$, ta vẽ bảng biến thiên của hàm số $y=f\left(f(x)\right)$ theo phương pháp ghép trục như sau

x	$-\infty$				-2			0	1		$+\infty$
u	$-\infty$	-2	0	1	2	1	0	-1	0	-2	$-\infty$
$f(u)$	$-\infty$ ↗	2 ↘	-1 ↗	0 ↘	-2 ↗	0 ↘	-1 ↗	0 ↘	-1 ↗	2 ↘	$-\infty$

Từ bảng biến thiên trên, ta thấy

- Phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi $m>2$.
- Phương trình có đúng 2 nghiệm khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l} m=2 \\ m<-2 \end{array}\right.$.
- Phương trình có đúng 3 nghiệm khi và chỉ khi $m=-2$.
- Phương trình có đúng 4 nghiệm khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l} -2<m<-1 \\ 0<m<2 \end{array}\right.$.
- Phương trình có đúng 6 nghiệm thì $m\in\varnothing$.
- Phương trình có đúng 7 nghiệm khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=0 \end{array}\right.$.
- Phương trình có nhiều hơn 7 nghiệm khi và chỉ khi $-1<m<0$.

Câu 7. Chọn D

Cách 1: Biện luận nghiệm

Đặt $\cos x=t$, ta có $f(\cos x)=m\ (i)\Leftrightarrow f(t)=m\ (ii)$.

Ta có bảng biến thiên hàm số $t(x)$ trên $\left[0;\frac{7\pi}{2}\right)$ như sau:

x	0		π		2π		3π		$\frac{7\pi}{2}$
t'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
t	1 ↘		-1 ↗		1 ↘		-1 ↗		0

Từ đó, ta có:

- Nếu $t=-1,$ phương trình $\cos x=t$ có 2 nghiệm thuộc $\left[0;\dfrac{7\pi}{2}\right).$
- Nếu $t\in(-1;0),$ phương trình $\cos x=t$ có 4 nghiệm thuộc $\left[0;\dfrac{7\pi}{2}\right).$
- Nếu $t\in[0;1),$ phương trình $\cos x=t$ có 3 nghiệm thuộc $\left[0;\dfrac{7\pi}{2}\right).$
- Nếu $t=1,$ phương trình $\cos x=t$ có 2 nghiệm thuộc $\left[0;\dfrac{7\pi}{2}\right).$

Do đó, điều kiện để (i) có 4 nghiệm thuộc $\left[0;\dfrac{7\pi}{2}\right)$ là trên $[-1;1],$ phương trình (ii) có đúng 1 nghiệm và nghiệm đó thuộc $(-1;0),$ hoặc phương trình (ii) có đúng 2 nghiệm phân biệt là -1 và 1.

Chú ý rằng hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $[-1;1]$ nên phương trỉnh $f(x)=m$ chỉ có tối đa 1 nghiệm thuộc $[-1;1],$ do đó ta cần tìm m để trên $[-1;1],$ phương trình (ii) có đúng 1 nghiệm và nghiệm đó thuộc $(-1;0),$ hay $1<m<3.$

Cách 2: Ghép trục

Đặt $u=\cos x,$ hàm số $u(x)$ có các điểm cực trị trên $\left(0;\dfrac{7\pi}{2}\right)$ là $\pi, 2\pi, 3\pi.$

Do đó ta có bảng biến thiên hàm số $f(\cos x)$ (theo phương pháp ghép trục) như sau:

x	0	π	2π	3π	$\dfrac{7\pi}{2}$
u	1	-1	1	-1	0
$f(u)$	-1 ↗	3 ↘	-1 ↗	3 ↘	1

Từ đó, phương trình $f(\cos x)=m$ có 4 nghiệm thuộc nửa khoảng $\left[0;\dfrac{7\pi}{2}\right)$ khi và chi khi $m\in(1;3).$

Câu 8. Chọn A

Đặt $u=x^2-4x,$ ta có $u'=2x-4\Rightarrow u'=0\Leftrightarrow x=2.$ Từ đó ta vẽ bảng biến thiên của hàm số $y=f\left(x^2-4x\right)$ trên $[0;+\infty)$ theo phương pháp ghép trục như sau:

x	0		2			$+\infty$
u	0	-2	-4	-2	0	$+\infty$
$f(u)$	-3 ↗	2 ↘	-2 ↗	2 ↘	-3 ↗	$+\infty$

Từ đó, phương trình $f\left(x^2-4x\right)=\dfrac{m}{3}$ có ít nhất 3 nghiệm thực phân biệt thuộc $(0;+\infty)$ khi và chỉ khi $-3<\dfrac{m}{3}\le 2 \Leftrightarrow -9<m\le 6,$ mà $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow$ có 15 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 9. Chọn D

Đặt $g(x)=\left|f(x)\right|$, từ đồ thị hàm số $y=f(x)$, ta có bảng biến thiên của hàm số $y=g(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-4	a	0	b	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$ ↘	0 ↗	6 ↘	0 ↗	1 ↘	0 ↗	$+\infty$

Đặt $u=x^3-3x^2$, phương trình tương đương $g(u)=\log_2 m.$ Ta vẽ bảng biến thiên của hàm số theo phương pháp ghép trục như sau:

x	$-\infty$			0		2					$+\infty$
u	$-\infty$	-4	a	0	a	-4	a	0	b	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$g(u)$	$+\infty$ ↘	0 ↗	6 ↘	0 ↗	6 ↘	0 ↗	6 ↘	0 ↗	1 ↘	0 ↗	$+\infty$

Từ đó, phương trình $\left|f\left(x^3-3x^2\right)\right|-\log_2 m=0$ có 8 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $1<\log_2 m<6 \Leftrightarrow 2<m<2^6.$

Mà $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{3;4;5;...;63\}$, nên có 61 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 10. Chọn C

Phương trình đã cho tương đương với:

$$\left(f(\cos x)+1\right)\left(f(\cos x)+m-21\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} f(\cos x)=-1 & (i) \\ f(\cos x)=21-m & (ii) \end{array}\right..$$

Đặt $u=\cos x,$ ta có $u'=-\sin x,$ từ đó ta có bảng biến thiên hàm số $f(\cos x)$ trên $[0;2\pi]$ theo phương pháp ghép trục như sau:

x	0		π		2π
u	1	0	-1	0	1
$f(u)$	1 ↘	-1 ↗	3 ↘	-1 ↗	1

Từ bảng biến thiên trên, ta thấy (i) có đúng 2 nghiệm thuộc $[0;2\pi]$, để phương trình đã cho có đúng 6 nghiệm thuộc $[0;2\pi]$ thì phương trình (ii) có đúng 4 nghiệm thuộc $[0;2\pi]$, muốn vậy ta cần có $-1<21-m\le 1 \Leftrightarrow 20\le m<22.$ Mà $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{20;21\}.$

Câu 11. Chọn B

Ta có: $f'(x)=3x^2-3 \Rightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \end{array}\right.$. Từ đó ta có bảng biến thiên hàm số $f(x)$ như sau

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Từ đó ta có bảng biến thiên hàm số $y=f\left(f(x)-1\right)$ theo phương pháp ghép trục như sau:

x	$-\infty$			-1			1			$+\infty$
$u=f(x)-1$	$-\infty$	-1	1	2	1	-1	-2	-1	1	$+\infty$
$f(u)$	$-\infty$	3	-1	3	-1	3	-1	3	-1	$+\infty$

Từ đó, phương trình $f\left(f(x)-1\right)=2m-1$ có đúng 9 nghiệm khi và chỉ khi $-1<2m-1<3 \Leftrightarrow 0<2m<4 \Leftrightarrow 0<m<2$. Mà $m\in\mathbb{Z} \Rightarrow m=1$.

Bài toán mở rộng: Cho hàm số $f(x)=x^3-3x+1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(f\left(f(x)-1\right)\right)=2m-1$ có đúng 9 nghiệm

A. 7. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 10.

Chọn A – Đáp án: $2<m<10$.

Câu 12. Chọn B

Xét $u=\mathrm{e}^x; v=2+f(u)$ ta có bảng biến thiên hàm số $y=f\left[2+f\left(\mathrm{e}^x\right)\right]$ theo phương pháp ghép trục như sau:

x	$-\infty$				$+\infty$
$u=\mathrm{e}^x$	0		1		$+\infty$
$v=2+f(u)$	2	1	-1	1	$+\infty$
$f(v)$	0	-3	1	-3	$+\infty$

Vậy phương trình $f\left[2+f\left(\mathrm{e}^x\right)\right]=m$ có đúng 3 nghiệm khi và chỉ khi $0\le m<1$.

Câu 13. Chọn A

Đặt $u=2\sin x+1$, ta vẽ bảng biến thiên hàm số $y=f\left(2\sin x+1\right)$ bằng cách ghép trục như sau:

x	0		$\frac{\pi}{2}$			$\frac{3\pi}{2}$		2π
u	1	2	3	2	0	-1	0	1
$f(u)$	0	↘ -2	↗ 0	↘ -2	↗ 2	↘ -2	↗ 2	↘ 0

Từ bảng biến thiên trên, phương trình $f\left(2\sin x+1\right)=m$ có 6 nghiệm phân biệt thuộc $\left[0;2\pi\right]$ khi và chỉ khi $-2<m\le 0$.

Câu 14. Chọn A

Đặt $u=x^3-3x$ thì $u'=3x^2-3\Rightarrow u'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\end{array}\right.$. Từ đó ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f\left(x^3-3x\right)$ trên đoạn $\left[-1;2\right]$ theo phương pháp ghép trục như sau

x	-1			1			2
u	2	$\frac{1}{2}$	-1	-2	-1	$\frac{1}{2}$	0
$f(u)$	-2	↗ $\frac{1}{2}$	↘ -2	↗ 6	↘ -2	↗ $\frac{1}{2}$	↘ -2

Từ bảng biến thiên trên, ta thấy phương trình $f\left(x^3-3x\right)=m$ có 6 nghiệm phân biệt thuộc $\left[-1;2\right]$ khi và chỉ khi $-2<m<\frac{1}{2}$.

Câu 15. Chọn C

Đặt $u=x^4+x^2$, ta có $u'=4x^3+2x\Rightarrow u'=0\Leftrightarrow x=0$. Ta vẽ bảng biến thiên của hàm số $y=f\left(x^4+x^2\right)$ theo phương pháp ghép trục như sau:

x	$-\infty$				0				$+\infty$
u		$-$	1	$+$	0	$-$	1	$+$	
$f(u)$	$+\infty$	↘	-1	↗	1	↘	-1	↗	$+\infty$

Từ đó, phương trình $f\left(x^4+x^2\right)=m^2-10$ có đúng hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l}m^2-10=-1\\m^2-10>1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m^2=9\\m^2>11\end{array}\right.$. Mà $m\in\mathbb{Z}, m\in\left[-10;10\right]\Rightarrow m\in\left\{-10;-9;...;-3;3;4;...;10\right\}$. Vậy có 16 số nguyên m thỏa mãn điều kiện đề bài.

Câu 16. Chọn B

Đặt $u=x^2-2x$, ta có $u'=2x-2$ nên ta vẽ bảng biến thiên của hàm số $y=f\left(x^2-2x\right)$ trên $\left[-\frac{3}{2};\frac{7}{2}\right]$ theo phương pháp ghép trục như sau

x	$-\frac{3}{2}$				1				$\frac{7}{2}$
u	$5,25$	4	3	1	-1	1	3	4	$5,25$
$f(u)$	a	b	5	2	4	2	5	b	a

Vậy phương trình $f\left(x^2-2x\right)=m$ có đúng 4 nghiệm thực phân biệt thuộc đoạn $\left[-\frac{3}{2};\frac{7}{2}\right]$ khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l}2<m<4\\ m=5\end{array}\right.$, mà $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{3;5\}$.

Câu 17. Chọn D

Đặt $u=\sqrt{4-x^2}$, ta có $u'=\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$. Từ đó ta có bảng biến thiên của hàm số $f\left(\sqrt{4-x^2}\right)$ theo phương pháp ghép trục như sau:

x	-2		0		2
u	0	$\sqrt{2}$	2	$\sqrt{2}$	0
$f(u)$	0	2	0	2	0

Từ đó, phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $0<m<2$.

Câu 18. Chọn C

Đặt $u=\sqrt{-x^2+4x-3}$, ta có $u'=\frac{-x+2}{\sqrt{-x^2+4x-3}}\Rightarrow u'=0\Leftrightarrow x=2$. Từ đó ta vẽ bảng biến thiên hàm số $y=f\left(\sqrt{-x^2+4x-3}\right)$ theo phương pháp ghép trục như sau:

x	1	2	3
u	0	1	0
$f(u)$	0	-2	0

Vậy phương trình $f\left(\sqrt{-x^2+4x-3}\right)=m$ có đúng 2 nghiệm khi và chỉ khi $-2<m\le 0$. Mà $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{-1;0\}$ nên có đúng 2 số nguyên m thỏa mãn.

Câu 19. Chọn B

Xét hàm số $u(x)=x^3-3|x|$, ta có $u(x)=\begin{cases}x^3-3x & \text{khi } x\ge 0\\ x^3+3x & \text{khi } x<0\end{cases}\Rightarrow u'(x)=\begin{cases}3x^2-3 & \text{khi } x>0\\ 3x^2+3 & \text{khi } x<0\end{cases}$. Tại $x=0$ hàm số không có đạo hàm. Ta có: $u'(x)=0\Leftrightarrow x=1$.

Lại có $\lim\limits_{x\to 0^+}u'(x)=-3;\ \lim\limits_{x\to 0^-}u'(x)=3$ nên hàm số $u(x)$ có đúng 2 điểm cực trị là 0 và 1.

Từ đồ thị hàm số $y=f'(x)$, ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a\in(-2;-1) \\ x=b\in(0;1) \\ x=c\in(1;2) \end{array}\right.$. Chú ý rằng khi $x\in(c;+\infty)$ thì $f(x)$ đồng biến, do $f'(x)>0$.

Từ đó, ta vẽ bảng biến thiên của hàm số $y=f\left(x^3-3|x|\right)$ theo phương pháp ghép trục như sau:

x	$-\infty$		0		1				$+\infty$
u	$-\infty$	a	0	a	-2	a	b	c	$+\infty$
$f(u)$		↘	↗	↘	↗	↘	↗	↘	↗

Vậy hàm số $y=f\left(x^3-3|x|\right)$ có 4 điểm cực tiểu.

Câu 20. Chọn B

Xét hàm số $h(x)=f^2(x)+f(x)-3$, $v(x)=x^2+x-3$. Ta có $g(x)=|h(x)|$ và $h(x)=v(f(x))$.

Dễ thấy bảng biến thiên hàm số $v(x)$ như sau:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
v'		$-$	0	$+$	
v	$+\infty$	↘	$-\frac{13}{4}$	↗	$+\infty$

Từ đây ta vẽ bảng biến thiên của hàm số $v(f(x))$ theo phương pháp ghép trục như sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$v(f(x))$	$+\infty$ ↘	$-\frac{13}{4}$ ↗	-1 ↘	$-\frac{13}{4}$ ↗	-3 ↘	$-\frac{13}{4}$ ↗	$+\infty$

Vậy, hàm số $v(f(x))$ có đúng 5 điểm cực trị và phương trình $v(f(x))=0$ có đúng 2 nghiệm đơn, vậy hàm số đã có có tất cả $5+2=7$ điểm cực trị.

Câu 21. Chọn B

Xét hàm $h(x)=\left|f(x)-4f^2(x)+2\right|$, ta thấy $g(x)=h(1-2x)$ nên số điểm cực trị của hàm số $h(x)$ bằng số điểm cực trị của hàm số $g(x)$.

Xét hàm số $v(x)=f(x)-4f^2(x)+2$, ta có $h(x)=|v(x)|$.

Xét hàm số $k(x)=x-4x^2+2$. Ta có $v(x)=k(f(x))$.

Dễ thấy bảng biến thiên hàm số $k(x)$ như sau:

x	$-\infty$		$\frac{1}{8}$		$+\infty$
k'		$+$	0	$-$	
k	$-\infty$	↗	$\frac{33}{16}$	↘	$-\infty$

Vậy ta có bảng biến thiên của hàm số $v(x)=k(f(x))$ theo phương pháp ghép trục như sau

x	$-\infty$			-2			0			3			$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$		$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$		3		$\frac{1}{8}$	-1	$\frac{1}{8}$		$+\infty$
$k(f(x))$	$-\infty$	↗	$\frac{33}{16}$	↘ 2 ↗	$\frac{33}{16}$	↘	-31	↗	$\frac{33}{16}$	↘ -3 ↗	$\frac{33}{16}$	↘	$-\infty$

Từ đó, hàm số $v(x)=k(f(x))$ có đúng 7 điểm cực trị và phương trình $v(x)=0$ có đúng 6 nghiệm đơn nên hàm số $y=|v(x)|$ có 13 điểm cực trị.

Câu 22. Chọn D

Xét hàm số $g(x)=f\left(\frac{1}{x^2}\right)$ có tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Đặt $u=\frac{1}{x^2}$, ta có $u'=-\frac{2}{x^3}\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Từ đó ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ theo phương pháp ghép trục như sau

x	$-\infty$					0					$+\infty$
u	0		2		$+\infty$	‖	$+\infty$		2		0
$f(u)$	0	↘	-1	↗	$+\infty$	‖	$+\infty$	↘	-1	↗	0

Vậy phương trình đã cho có đúng 2 nghiệm khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l}\frac{m+2}{2}\ge 0\\ \frac{m+2}{2}=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\ge -2\\ m=-4\end{array}\right.$. Mà $m\in\mathbb{Z}, m\in[-10;10]$ nên $m\in\{-4;-2;-1;0;1;...;10\}$. Vậy có 14 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 23. Chọn A

Đặt $v=\sin x,$ ta có $v'=\cos x\Rightarrow v(x)$ có 2 điểm cực trị thuộc $(0;2\pi)$ là $\frac{\pi}{2}$ và $\frac{3\pi}{2}$

Đặt $u=f(v)=f(\sin x)$ và $t=3f(\sin x)-1=3u-1,$ ta có bảng biến thiên của hàm số $f(3f(\sin x)-1)$ theo phương pháp ghép trục như sau

x	0		$\frac{\pi}{2}$				$\frac{3\pi}{2}$		2π
v	0		1		0		-1		0
u	0		1		0		1		0
t	-1	0	2	0	-1	0	2	0	-1
f	1	0	4	0	1	0	4	0	1

Từ bảng biến thiên trên, ta thấy phương trình $f\left(3f\left(\sin x\right)-1\right)=m$ có 4 nghiệm phân biệt thuộc $\left[0;2\pi\right]$ khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l} m=0 \\ 1<m<4 \end{array}\right.$. Mà $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\left\{0;2;3\right\}$. Vậy có 3 giá trị nguyên của m.

Câu 24. Chọn C

Đặt $u=2|x|+1,$ dễ thấy $u\left(x\right)$ chỉ có đúng 1 điểm cực trị là $x=0.$

Từ đó ta có bảng biến thiên của hàm số $f\left(2|x|+1\right)$ theo phương pháp ghép trục như sau

x	$-\infty$		0		$+\infty$
u	$+\infty$	3	1	3	$+\infty$
f	$+\infty$	-1	$f\left(1\right)$	-1	$+\infty$

Từ đó hàm số đã cho có 3 điểm cực trị.

Câu 25. Chọn A

Đặt $\log_6\left(2f\left(x\right)+m\right)=\log_4\left(f\left(x\right)\right)=t,$ phương trình tương đương: $\begin{cases} 2f\left(x\right)+m=6^t \\ f\left(x\right)=4^t \end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases} f\left(x\right)=4^t \\ 6^t-2.4^t=m \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} t=\log_4 f\left(x\right) \\ 6^t-2.4^t=m \end{cases}$ (do $f\left(x\right)>0\ \ \forall x\in\mathbb{R}$)

Sử dụng phương pháp ghép trục: $u=f\left(x\right);t=\log_4 u;g\left(t\right)=6^t-2.4^t.$

Ta có $g'\left(t\right)=6^t\ln 6-2.4^t\ln 4=0\Leftrightarrow\left(\frac{3}{2}\right)^t=\frac{2\ln 4}{\ln 6}\Leftrightarrow t=\log_{\frac{3}{2}}\left(\log_6 16\right).$

x	$-\infty$		-1		1		
$u=f\left(x\right)$			16		4		12
$t=\log_4 u$	$-\infty$	t_0	2	t_0	1	t_0	$\log_4 12$
$g\left(t\right)$	0	$g\left(t_0\right)$	4	$g\left(t_0\right)$	-2	$g\left(t_0\right)$	$g\left(\log_4 12\right)$

Vậy, phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $-2<m<0.$

Câu 26. Giải

Hàm số $f(x)$ có TXĐ: $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, có $f'(x)=2x-\dfrac{2}{x^2}=\dfrac{2\left(x^3-1\right)}{x^2}$, do đó ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0			1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\Vert$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty\ \Vert$	$+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

Đặt $u=x^3-3x,$ ta có $u'=3x^2-3\Rightarrow u'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\end{array}\right.$. Vậy hàm số $u(x)$ có 2 điểm cực trị là -1 và 1.

Từ đó ta có bảng biến thiên của hàm số $f\left(x^3-3x\right)$ trên $(0;+\infty)$ theo phương pháp ghép trục:

x	0	1				$+\infty$
u	0	-2	0		1	$+\infty$
f	$-\infty$	3	$-\infty\ \Vert$	$+\infty$	3	$+\infty$

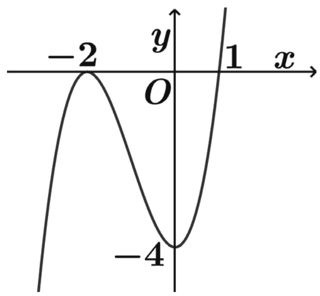
Từ bảng biến thiên trên, ta thấy phương trình $f\left(x^3-3x\right)=m$ luôn có đúng 2 nghiệm thực với mọi giá trị của m.

BÀI 7 – KỸ NĂNG BIỆN LUẬN NGHIỆM NÂNG CAO

Có rất nhiều bài toán biện luận nghiệm không sử dụng được phương pháp ghép trục, hoặc có thể sử dụng được, tuy nhiên không cần thiết, khi đó ta cần dùng các kỹ năng khác để giải quyết. Bài học này sẽ tìm hiểu các dạng toán như vậy

I. ĐẶT ẨN PHỤ ĐỂ ĐƯA VỀ NHÂN TỬ CHUNG

Ví dụ 1. Cho hàm số $f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình dưới đây



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in\left(-5;5\right)$ để phương trình $f^2\left(x\right)-\left(m+4\right)\left|f\left(x\right)\right|+2m+4=0$ có 6 nghiệm phân biệt?

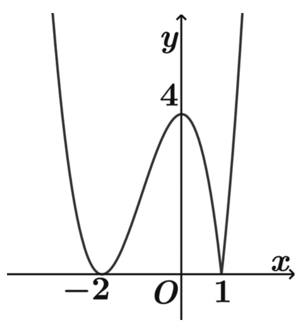
A. 4. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 3.

Giải

Ta có phương trình $f^2\left(x\right)-\left(m+4\right)\left|f\left(x\right)\right|+2m+4=0$

$$\Leftrightarrow\left(\left|f\left(x\right)\right|-2\right)\left(\left|f\left(x\right)-m-2\right|\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}\left|f\left(x\right)\right|=2 & (1)\\ \left|f\left(x\right)\right|=m+2 & (2)\end{array}\right..$$

Từ đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ ta có đồ thị hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ như sau:



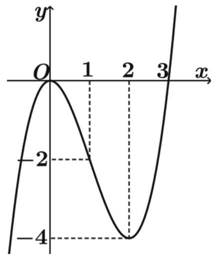
Từ đồ thị trên, ta có phương trình $\left(1\right)$ có 4 nghiệm phân biệt.

Để phương trình đã cho có 6 nghiệm phân biệt thì phương trình $\left(2\right)$ có 2 nghiệm phân biệt và khác các nghiệm của $\left(1\right)$. Suy ra $\left[\begin{array}{l}m+2>4\\ m+2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>2\\ m=-2\end{array}\right.$. Vì m nguyên và $m\in\left(-5;5\right)\Rightarrow m\in\left\{-2;3;4\right\}$.

Chọn D.

II. KHẢO SÁT HÀM SỐ TRUNG GIAN

Ví dụ 2. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ.



Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $7f\left(5-2\sqrt{1+3\cos x}\right) = 3m-10$ có đúng hai nghiệm phân biệt thuộc $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ là

A. 4. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 5.

Giải

Đặt $5-2\sqrt{1+3\cos x} = t,$ ta có bảng biến thiên hàm số $t(x)$ trên $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ như sau

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
t'		$+$	0	$-$	
t	3	$\searrow$	1	$\nearrow$	3

Phương trình đã cho có đúng 2 nghiệm thuộc $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ khi và chỉ khi phương trình $f(t) = \frac{3m-10}{7}$ có đúng 1 nghiệm $t \in (1;3]$, và không có nghiệm $t = 1$. Muốn vậy ta cần có $\left[\begin{array}{l} -2 < \frac{3m-10}{7} \le 0 \\ \frac{3m-10}{7} = -4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\frac{4}{3} < m \le \frac{10}{3} \\ m = -6 \end{array}\right.$. Mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-6;-1;0;1;2;3\}$ nên có đúng 6 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

III. TÍNH ĐỐI XỨNG CỦA NGHIỆM

Nếu hàm số $f(x)$ là hàm chẵn thì phương trình $f(x) = m$ có nghiệm $x = x_0$ thì cũng có nghiệm $x = -x_0$, vì thế phương trình $f(x) = m$ có số lẻ nghiệm thì điều kiện cần là $x = 0$ phải là 1 nghiệm.

Có một số bài toán không phải hàm chẵn, hàm lẻ nhưng có tính đối xứng, ví dụ phương trình $f\left(x^2+2x\right) = m \Leftrightarrow f\left((x+1)^2-1\right) = m,$ rõ ràng nếu x_0 là 1 nghiệm thì $-2-x_0$ cũng là 1 nghiệm (bản chất là đồ thị hàm số $y = f\left(x^2+2x\right)$ nhận đường $x=-1$ làm trục đối xứng). Vì thế nếu phương trình $f\left(x^2+2x\right) = m$ có số lẻ nghiệm thì $x = -1$ phải là 1 nghiệm.

Ví dụ 3. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Tìm m để phương trình $7f\left(\left|x\right|\right)+8x^2-x^4=m$

a) Có nghiệm duy nhất.   b) Có đúng 3 nghiệm.

Giải

Nhận xét: Hàm số $g\left(x\right)=7f\left(\left|x\right|\right)+8x^2-x^4$ là hàm chẵn vì $g\left(x\right)=g\left(-x\right),$ do đó nếu $x=x_0$ là 1 nghiệm của phương trình $g\left(x\right)=0$ thì $g\left(x_0\right)=m\Leftrightarrow g\left(-x_0\right)=m,$ do đó phương trình $g\left(x\right)=m$ có số lẻ nghiệm thì điều kiện cần là $x=0$ là 1 nghiệm của phương trình này, khi đó $g\left(0\right)=m\Leftrightarrow 7f\left(0\right)+8.0^2-0^4=m\Leftrightarrow m=7.$

Với $m=7,$ phương trình đã cho tương đương với $7f\left(\left|x\right|\right)+8x^2-x^4=7\Leftrightarrow f\left(\left|x\right|\right)=\frac{1}{7}\left(x^4-8x^2\right)+1.$

Xét hàm số $h\left(x\right)=\frac{1}{7}\left(x^4-8x^2\right)+1,$ ta có $h'\left(x\right)=\frac{1}{7}\left(4x^3-16x\right)=\frac{4}{7}x\left(x-2\right)\left(x+2\right),$ từ đó ta có bảng biến thiên hàm $h\left(x\right)$ như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
h'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
h	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	1	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên trên, ta thấy phương trình $f\left(\left|x\right|\right)=h\left(x\right)$ có đúng 1 nghiệm thuộc $\left(0;+\infty\right),$ nên phương trình đã cho có đúng 3 nghiệm. Từ đó ta có kết luận sau

- Không tồn tại m để phương trình đã cho có nghiệm duy nhất
- Phương trình đã cho có đúng 3 nghiệm khi và chỉ khi $m=7.$

IV. THAM SỐ XUẤT HIỆN Ở HÀM SỐ TRUNG GIAN

Có một số bài toán biện luận nghiệm của phương trình hàm hợp, $f\left(u\left(x\right)\right)=m,$ nhưng tham số m xuất hiện ở cả hàm số trung gian $u\left(x\right),$ khi giải quyết các bài toán này ta vẫn giải theo phương pháp truyền thống, đặt $t=u\left(x\right)$ và quan sát nghiệm của phương trình $u\left(x\right)=t$ và $f\left(t\right)=m.$

Ví dụ 4. Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(2\sin x + m\right) + 2 = 0$ có đúng 6 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[0;3\pi\right]$?

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 0.

Giải

Từ bảng biến thiên của hàm số $y = f\left(x\right)$, ta thấy

$$f\left(2\sin x + m\right) + 2 = 0 \Leftrightarrow f\left(2\sin x + m\right) = -2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\sin x + m = -1 \\ 2\sin x + m = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 2\sin x = -1 - m & \left(i\right) \\ 2\sin x = 1 - m & \left(ii\right) \end{array}\right..$$

Đặt $t = 2\sin x,$ dễ thấy bảng biến thiên hàm số $t\left(x\right)$ trên đoạn $\left[0;3\pi\right]$ như sau:

x	0		$\dfrac{\pi}{2}$		$\dfrac{3\pi}{2}$		$\dfrac{5\pi}{2}$		3π
t	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

Từ đó, phương trình $2\sin x = t$ chỉ có thể có số nghiệm là 1; 2 hoặc 4 nghiệm trên $\left[0;3\pi\right]$. Do đó phương trình đã cho có đúng 6 nghiệm thuộc $\left[0;3\pi\right]$ thì trong hai phương trình $\left(i\right)$ và $\left(ii\right)$, có 1 phương trình có 2 nghiệm, 1 phương trình có 4 nghiệm. Khi đó ta có 2 trường hợp

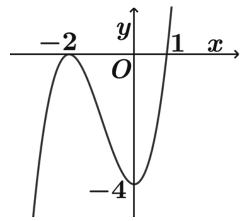
TH1. $\left(i\right)$ có 2 nghiệm và $\left(ii\right)$ có 4 nghiệm, hay $\begin{cases} -2 < -1 - m < 0 \\ 0 \le 1 - m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 1 \\ -1 < m \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m < 1.$

TH2. $\left(i\right)$ có 4 nghiệm và $\left(ii\right)$ có 2 nghiệm, hay $\begin{cases} -1 - m = 0 \\ 1 - m = 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1.$

Mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \left\{-1;0\right\}$ nên có 2 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán. Chọn A.

V. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

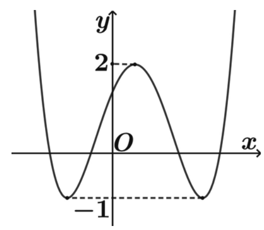
1. Cho hàm số $f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình dưới đây



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in\left[-5;5\right]$ để phương trình $f^2\left(x\right)+\left(m-3\right)\left|f\left(x\right)\right|-m+2=0$ có 6 nghiệm phân biệt?

A. 4. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 3.

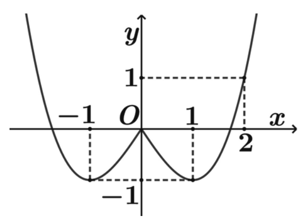
2. Cho hàm số $f\left(x\right)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ có đồ thị như hình vẽ



Biết phương trình $f^2\left(x\right)+m\left|f\left(x\right)\right|-m-1=0$ có số nghiệm là số lẻ. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

A. $m\in\left(-\infty;-5\right)$. **B.** $m\in\left[-5;-2\right)$. **C.** $m\in\left[-2;2\right)$. **D.** $m\in\left[2;+\infty\right)$.

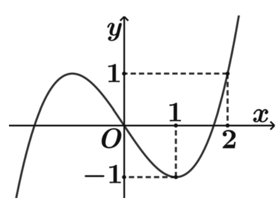
3. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình sau



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $10f^2\left(x\right)-\left(m+10\right)\left|f\left(x\right)\right|+m=0$ có đúng 10 nghiệm?

A. 8. **B.** 10. **C.** 9. **D.** 7.

4. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, biết $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)=+\infty$ và đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ như sau



Có bao nhiêu số nguyên $m\in\left[-10;10\right]$ để phương trình sau có đúng 4 nghiệm:

$$3f^3\left(\left|x\right|\right)-\left(m+6\right)f^2\left(\left|x\right|\right)+\left(2m+3\right)f\left(\left|x\right|\right)-m=0$$

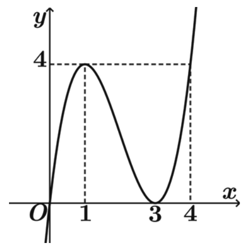
A. 11. **B.** 12. **C.** 9. **D.** 10.

5. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(x^3+1\right)=m$ có 4 nghiệm phân biệt là

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-9	$\nearrow$	7	$\searrow$	-9	$\nearrow$	$+\infty$

A. 15. **B.** 7. **C.** 17. **D.** 8.

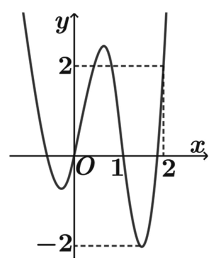
6. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên dưới.



Với tham số thực $m\in\left(0;4\right]$ thì phương trình $f\left(x\left(x-3\right)^2\right)=m$ có ít nhất bao nhiêu nghiệm thực thuộc $\left(0;4\right]$?

A. 4. **B.** 3. **C.** 7. **D.** 5.

7. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để số nghiệm của phương trình $f\left(\left|x^3-3x\right|\right)=m$ trên đoạn $\left[-2;2\right]$ đạt giá trị lớn nhất



A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

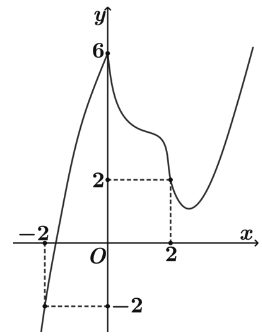
8. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Tìm m để phương trình $f\left(\left|x\right|\right)=m+1$ có 4 nghiệm phân biệt.

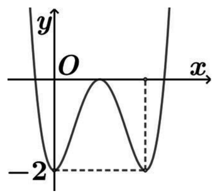
A. $m\in\left[0;1\right]$. **B.** $m\in\left(-2;0\right)$. **C.** $m\in\left[0;1\right)$. **D.** $m\in\left(0;1\right)$.

9. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(2\log_2 x\right)=m$ có nghiệm duy nhất thuộc $\left[\frac{1}{2};2\right)$



A. 9. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 4.

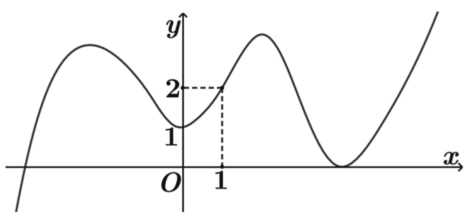
10. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ



Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $3f\left(\left|x+2m\right|\right)=m$ có 6 nghiệm phân biệt

A. 4. **B.** 5. **C.** 1. **D.** 7.

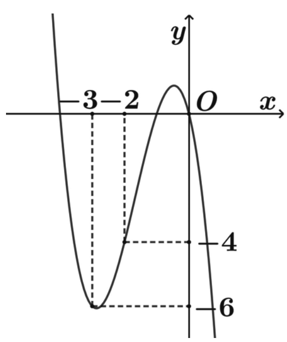
11. Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ



Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình $f\left(x^2\right)+\left|x\right|=m$ có đúng 1 nghiệm?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

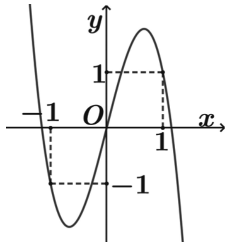
12. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ



Phương trình $f\left(x^2+m\right)-2x^2=2m$ có đúng 4 nghiệm khi và chỉ khi

A. $-3<m<-2$. **B.** $-2<m<-1$. **C.** $-1<m<0$. **D.** $0<m<1$.

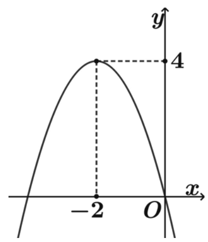
13. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ



Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m để phương trình $f(\cos x + m) = \cos x + m$ có số lẻ nghiệm thuộc $[0;2\pi]$. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** -1.

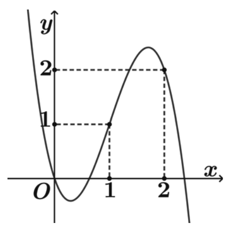
14. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ



Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f(\cos x + m) - \cos^2 x - 2m\cos x = m^2$ có đúng 2 nghiệm thuộc $[0;2\pi]$.

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

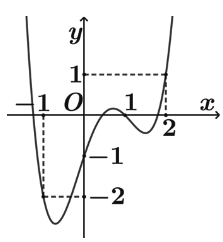
15. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của m để phương trình $f(\cos x + m) = \cos x + m$ có đúng 4 nghiệm trên $[0;2\pi]$. Tập hợp S là

A. $(0;2)\setminus\{1\}$. **B.** $(-2;0]\setminus\{-1\}$. **C.** $[0;2)\setminus\{1\}$. **D.** $(-2;0)$.

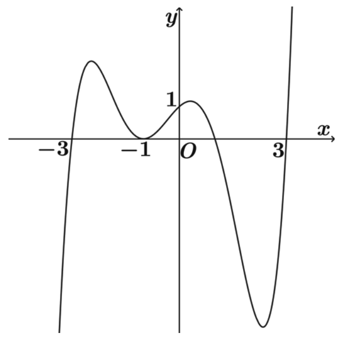
16. Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ có đồ thị như hình vẽ



Số giá trị nguyên của m để phương trình $f(|x| - m) = |x| - m - 1$ có số nghiệm là 1 giá trị thuộc $(0;5)$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

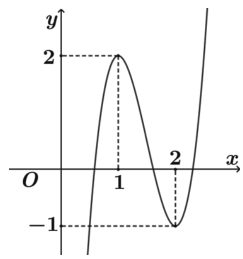
17. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $\left|f\left(|x-2|\right)+1\right|-m=0$ có 8 nghiệm phân biệt trong khoảng $(-5;5)$

A. 0 . **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số.

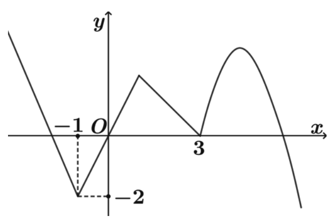
18. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ



Tìm m để phương trình $f\left(|x|+1\right) = m$ có đúng 4 nghiệm.

A. $-1 < m < 2$. **B.** $-1 \le m \le 2$. **C.** $1 < m < 2$. **D.** $-1 < m < 0$.

19. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình $f\left(x^2+2x\right) = m$ có số lẻ nghiệm

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

20. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	9	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Có bao nhiêu số nguyên dương m nhỏ hơn 100 để phương trình $\log\left(f(x)\right)^m = 1\left(m \in \mathbb{Z}^+\right)$ có 6 nghiệm phân biệt?

A. 97. **B.** 98. **C.** 47. **D.** 48.

21. Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $f\left(f(x+m)+m\right)=m$ có 9 nghiệm phân biệt?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

22. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu như hình vẽ

x	$-\infty$		a		0		b		c		d		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	

Biết $f(a)+f(d)>2f(b)$. Hỏi phương trình $f\left(\sqrt{x^2+m}\right)=f(b)$ có nhiều nhất bao nhiêu nghiệm?

A. 3. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 5.

23. Cho hàm số $f(x)=(x+1)(x-2)(x+m+2)$. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f(|x|+m)=0$ có đúng 4 nghiệm?

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

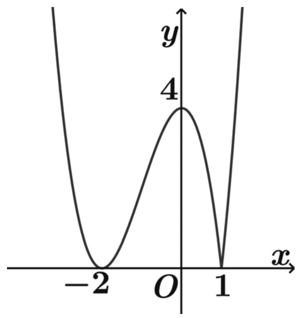
ĐÁP ÁN

1A	2B	3C	4D	5A	6D	7B	8D	9B	10B
11B	12A	13C	14B	15C	16B	17B	18A	19B	20D
21A	22B	23A							

Câu 1. Chọn A

Ta có phương trình $f^2\left(x\right)+\left(m-3\right)\left|f\left(x\right)\right|-m+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\left|f\left(x\right)\right|=1 & (1)\\ \left|f\left(x\right)\right|=2-m & (2)\end{array}\right.$.

Từ đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ ta có đồ thị hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ như sau:



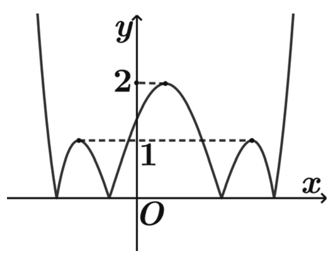
Từ đồ thị trên, ta có phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt.

Để phương trình đã cho có 6 nghiệm phân biệt thì phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt và khác các nghiệm của (1). Suy ra $\left[\begin{array}{l}2-m>4\\ 2-m=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m<-2\\ m=2\end{array}\right.$. Vì m nguyên và $m\in\left[-5;5\right]\Rightarrow m\in\left\{-5;-4;-3;2\right\}$.

Câu 2. Chọn B

Phương trình đã cho tương đương với: $\left(\left|f\left(x\right)\right|-1\right)\left(\left|f\left(x\right)\right|+m+1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left|f\left(x\right)\right|=1\\ \left|f\left(x\right)\right|=-m-1\end{array}\right.$.

Từ đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$, ta xác định đồ thị hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ như hình vẽ.



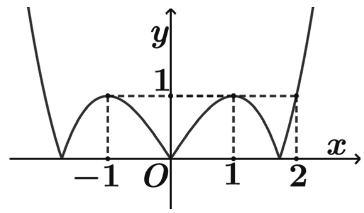
Ta thấy phương trình $\left|f\left(x\right)\right|=1$ có đúng 6 nghiệm, vậy phương trình đã cho có số nghiệm là số lẻ thì phương trình $\left|f\left(x\right)\right|=-m-1$ phải có số nghiệm là số lẻ, muốn vậy ta cần có $-m-1=2\Leftrightarrow m=-3.$

Câu 3. Chọn C

Đặt $\left|f\left(x\right)\right|=t,$ phương trình tương đương

$$10t^2-(m+10)t+m=0 \Leftrightarrow 10t(t-1)-m(t-1)=0 \Leftrightarrow (t-1)(10t-m)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=\dfrac{m}{10} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |f(x)|=1 \\ |f(x)|=\dfrac{m}{10} \end{array}\right..$$

Từ giả thiết, ta có đồ thị hàm số $t=|f(x)|$ như sau



Do đó, phương trình $|f(x)|=1$ có 4 nghiệm, để phương trình đã cho có đúng 10 nghiệm thì phương trình $|f(x)|=\dfrac{m}{10}$ có đúng 6 nghiệm, muốn vậy ta cần có $0<\dfrac{m}{10}<1 \Leftrightarrow 0<m<10$.

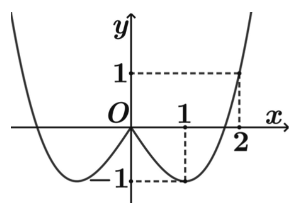
Mà $m\in\mathbb{Z} \Rightarrow m\in\{1;2;...;9\}$, nên có đúng 9 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 4. Chọn D

Đặt $f(|x|)=t$, phương trình tương đương với

$$3t^3-(m+6)t^2+(2m+3)t-m=0 \Leftrightarrow (t-1)^2(3t-m)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=\dfrac{m}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(|x|)=1 \\ f(|x|)=\dfrac{m}{3} \end{array}\right..$$

Từ đồ thị hàm số $y=f(|x|)$, ta có đồ thị hàm số $y=f(x)$ như sau



Từ đó, phương trình $f(|x|)=1$ có đúng 2 nghiệm. Để phương trình đã cho có đúng 4 nghiệm thì phương trình $f(|x|)=\dfrac{m}{3}$ có đúng 2 nghiệm và $\dfrac{m}{3}\neq 1$, điều này xảy ra khi $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \dfrac{m}{3}>0 \\ \dfrac{m}{3}\neq 1 \end{cases} \\ \dfrac{m}{3}=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m>0 \\ m\neq 3 \end{cases} \\ m=-3 \end{array}\right..$

Mà $m\in\mathbb{Z}, m\in[-10;10] \Rightarrow m\in\{-3;1;2;4;5;6;...;10\}$. Vậy có đúng 10 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 5. Chọn A

Đặt $x^3+1=t$, hàm số $t(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên phương trình $f(x^3+1)=m$ có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $f(t)=m$ có 4 nghiệm phân biệt, nhìn vào bảng biến thiên, ta thấy điều kiện cần và đủ là $-9 < m < 7$, mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-8;-7;...;6\}$, nên có 15 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 6. Chọn D

Xét $t = x(x-3)^2$, ta có $t' = (x-3)^2 + 2(x-3)x = (x-3)(3x-3) \Rightarrow t' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên hàm $t(x)$ trên $[0;4]$ như sau

x	0		1		3		4
t'		+	0	−	0	+	
t		$\nearrow$	4	$\searrow$		$\nearrow$	4
	0				0		

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy với $t \in (0;4)$, phương trình $x(x-3)^2 = t$ có 3 nghiệm x thuộc $(0;4]$. Với $t = 4$ thì phương trình $x(x-3)^2 = t$ có đúng 2 nghiệm x thuộc $(0;4]$.

Ta có: $f\left(x(x-3)^2\right) = m\ (i) \Leftrightarrow f(t) = m\ (ii)$.

Với $m \in (0;4)$ thì (ii) có 3 nghiệm $t \in (0;4)$ nên (i) có 9 nghiệm $x \in (0;4]$.

Với $m = 4$ thì (ii) có đúng 2 nghiệm trên $(0;4]$ là $t = 1$ và $t = 4$, khi đó (i) có đúng 5 nghiệm.

Vậy phương trình $f\left(x(x-3)^2\right) = m$ có ít nhất 5 nghiệm thực thuộc $(0;4]$.

Câu 7. Chọn B

Đặt $t = x^3 - 3x$. Ta có bảng biến thiên của $t(x)$ trên $[-2;2]$ như sau:

x	−2		−1		1		2
t'		+	0	−	0	+	
t		$\nearrow$	2	$\searrow$		$\nearrow$	2
	−2				−2		

Từ bảng biến thiên này, ta có:

Nếu $-2 < t < 2$, phương trình $x^3 - 3x = t$ có 3 nghiệm phân biệt thuộc $[-2;2]$.

Nếu $\left[\begin{array}{l} t=-2 \\ t=2 \end{array}\right.$, phương trình $x^3 - 3x = t$ có đúng 2 nghiệm thuộc $[-2;2]$.

Nếu $\left[\begin{array}{l} t>2 \\ t<-2 \end{array}\right.$, phương trình $x^3 - 3x = t$ không có nghiệm $x \in [-2;2]$.

Ta có: $f\left(\left|x^3 - 3x\right|\right) = m\ (i) \Leftrightarrow f(|t|) = m\ (ii)$. Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$, ta thấy phương trình (ii) có tối đa 6 nghiệm $t \in [-2;2]$, nên để (i) có số nghiệm trên $[-2;2]$ đạt lớn nhất thì (ii) có 6 nghiệm $t \in (-2;2)$, muốn vậy ta cần có $0 < m < 2$.

Vậy có đúng 1 giá trị nguyên của m thỏa mãn là $m = 1$.

Câu 8. Chọn D

Đặt $|x| = t,$ phương trình $f\left(|x|\right) = m+1 \ (i) \Leftrightarrow f\left(t\right) = m+1 \ \left(ii\right).$

Để (i) có 4 nghiệm phân biệt thì (ii) phải có đúng 2 nghiệm trên $\left(0;+\infty\right),$ ngoài ra không có nghiệm $t=0.$ Muốn vậy ta cần có $1 < m+1 < 2 \Leftrightarrow 0 < m < 1.$

Câu 9. Chọn B

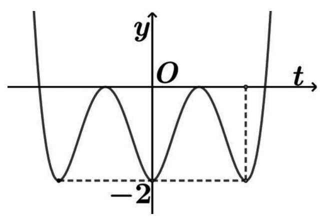
Đặt $t = 2\log_2 x,$ hàm số $t\left(x\right)$ đồng biến trên $\left[\frac{1}{2};2\right)$ có $t\left(\frac{1}{2}\right) = -2; t\left(2\right) = 2$, do đó ta cần tìm m để phương trình $f\left(t\right) = m$ có nghiệm duy nhất thuộc $\left[-2;2\right).$

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f\left(x\right),$ ta thấy điều kiện cần và đủ là $\left[\begin{array}{l} -2 \le m \le 2 \\ m = 6 \end{array}\right.$. Vậy có 6 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 10. Chọn B

Đặt $x+2m = t,$ phương trình đã cho tương đương với $f\left(|t|\right) = \frac{m}{3}.$ Để phương trình $3f\left(|x+2m|\right) = m$ có 6 nghiệm phân biệt thì phương trình $f\left(|t|\right) = \frac{m}{3}$ có 6 nghiệm t phân biệt.

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f\left(x\right),$ ta xét hệ trục tọa độ Oty và vẽ đồ thị hàm số $y = f\left(|t|\right)$ như hình vẽ



Từ đó, phương trình $f\left(|t|\right) = \frac{m}{3}$ có 6 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $-2 < \frac{m}{3} < 0 \Leftrightarrow -6 < m < 0.$

Mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \left\{-5;-4;-3;-2;-1\right\}.$ Vậy có 5 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

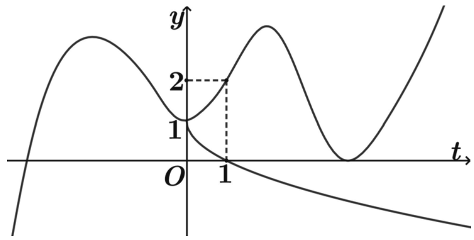
Câu 11. Chọn B

Hàm số $y = f\left(x^2\right) + |x|$ là hàm chẵn, vì thế nếu x_0 là 1 nghiệm của phương trình đã cho thì $-x_0$ cũng là 1 nghiệm của phương trình đó, vậy để phương trình này có đúng 1 nghiệm thì điều kiện cần là nghiệm đó là $x=0.$ Khi đó $f\left(0\right) + 0 = m \Leftrightarrow m = 1.$

Với $m=1,$ phương trình tương đương $f\left(x^2\right) + |x| = 1 \ (i).$

Đặt $x^2 = t \ \ \left(t \ge 0\right)$, ta có $|x| = \sqrt{x^2} = \sqrt{t}.$ Do đó $(i) \Leftrightarrow f\left(t\right) + \sqrt{t} = 1 \Leftrightarrow f\left(t\right) = 1 - \sqrt{t}.$

Trên hệ trục tọa độ $Oty,$ ta vẽ đồ thị hàm số $y = f\left(t\right)$ và đồ thị hàm số $y = 1-\sqrt{t}$, ta thấy chúng chỉ có 1 điểm chung duy nhất có hoành độ bằng 0 nên phương trình $f\left(t\right) = 1-\sqrt{t}$ có nghiệm duy nhất $t=0.$

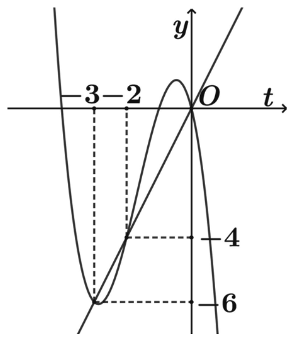


Vậy khi $m = 1$ thì phương trình $f\left(x^2\right) + |x| = m$ có nghiệm duy nhất $x = 0.$

Câu 12. Chọn A

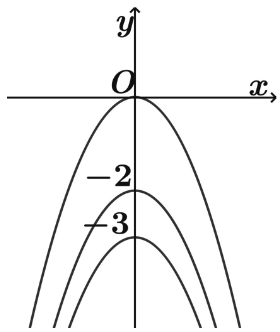
Đặt $x^2 + m = t,$ ta có: $f\left(x^2 + m\right) - 2x^2 = 2m \ (i) \Leftrightarrow f\left(x^2 + m\right) = 2\left(x^2 + m\right) \Leftrightarrow f(t) = 2t \ (ii).$

Trên hệ trục tọa độ $Oty,$ vẽ đồ thị hàm số $y = f(t)$ và đường thẳng $y = 2t$ (hình vẽ)



Từ đó, $(ii) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = -2 \\ t = -3 \end{array}\right. \Rightarrow (i) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 + m = 0 \\ x^2 + m = -2 \\ x^2 + m = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -x^2 \\ m = -2 - x^2 \\ m = -3 - x^2 \end{array}\right..$

Trên cùng hệ trục tọa độ $Oxy,$ vẽ các đồ thị $y = -x^2, y = -2 - x^2$ và $y = -3 - x^2$ (hình vẽ).

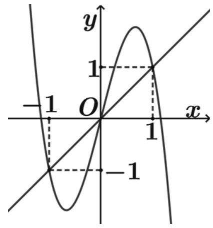


Để (i) có 4 nghiệm phân biệt thì đường thẳng $y = m$ cắt hệ đồ thị trên tại 4 điểm, điều này xảy ra khi và chỉ khi $-3 < m < -2.$

Câu 13. Chọn C

Xét hàm số $g(x) = f(\cos x + m) - \cos x - m.$ Vì $\cos x = \cos(-x) = \cos(2\pi - x)$ nên $g(x) = g(2\pi - x),$ do đó nếu x_0 là 1 nghiệm của phương trình $g(x) = 0$ thì $2\pi - x_0$ cũng là 1 nghiệm của phương trình này, vậy phương trình $g(x) = 0$ có số lẻ nghiệm thuộc $[0; 2\pi]$ khi và chỉ khi $x = \pi$ là 1 nghiệm của phương trình $g(x) = 0,$ hay $g(\pi) = 0 \Leftrightarrow f(m - 1) = m - 1.$

Từ đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$, dễ thấy phương trình $f\left(x\right)=x\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=-1\end{array}\right.$,



Do đó $f\left(m-1\right)=m-1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m-1=0\\m-1=1\\m-1=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=2.\\m=0\end{array}\right.$

Vậy tổng các phần tử của S bằng 3.

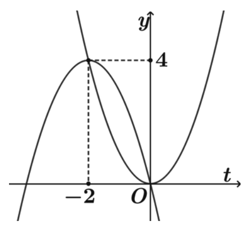
Câu 14. Chọn B

Phương trình đã cho tương đương với:

$$f\left(\cos x+m\right)=\cos^2 x+2m\cos x+m^2\Leftrightarrow f\left(\cos x+m\right)=\left(\cos x+m\right)^2.$$

Đặt $\cos x+m=t$, phương trình tương đương $f\left(t\right)=t^2$.

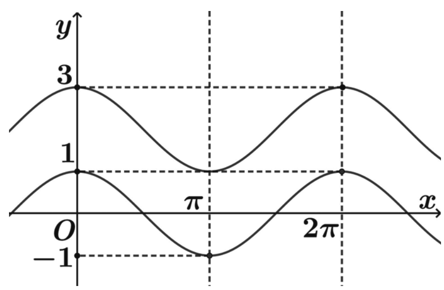
Trên cùng hệ trục tọa độ Oty, ta vẽ hai đồ thị $y=f\left(t\right)$ và $y=t^2$ (hình vẽ)



Rõ ràng chúng cắt nhau tại đúng 2 điểm có hoành độ 2 và 0, nên $f\left(t\right)=t^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\t=-2\end{array}\right.$.

Vậy phương trình đã cho tương đương $\left[\begin{array}{l}\cos x+m=0\\\cos x+m=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=-m\\\cos x+2=-m\end{array}\right.$.

Trên cùng hệ trục tọa độ Oxy, ta vẽ hai đồ thị $y=\cos x$ và $y=\cos x+2$ (hình vẽ).

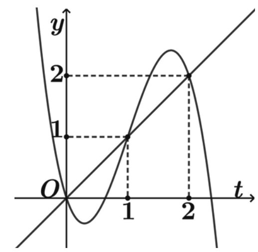


Từ đồ thị, ta thấy trên $\left[0;2\pi\right]$, đường thẳng $y=-m$ cắt hệ đồ thị tại đúng 2 điểm khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l}-1<-m<1\\1<-m\le 3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1<m<1\\-3\le m<-1\end{array}\right.$. Mà $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\left\{0;-3;-2\right\}$. Vậy có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 15. Chọn C

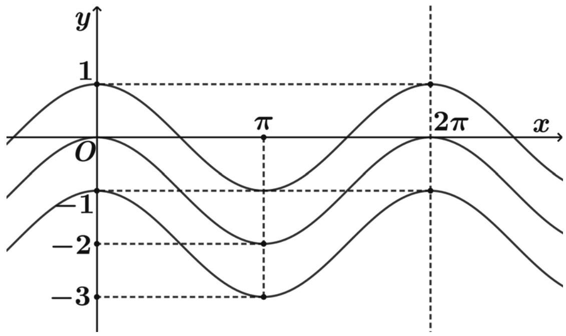
Đặt $\cos x + m = t$, phương trình tương đương $f\left(t\right) = t.$

Trên hệ trục tọa độ Oty, ta vẽ đồ thị hàm số $y = f\left(t\right)$ và đường thẳng $y = t$ (hình vẽ)



Từ đồ thị, ta có $f\left(t\right) = t \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = 1 \\ t = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x + m = 0 \\ \cos x + m = 1 \\ \cos x + m = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = -m \\ \cos x - 1 = -m \\ \cos x - 2 = -m \end{array}\right.$.

Trên cùng hệ trục tọa độ Oxy, ta vẽ đồ thị các hàm số $y = \cos x$, $y = \cos x - 1$ và $y = \cos x - 2$ như sau

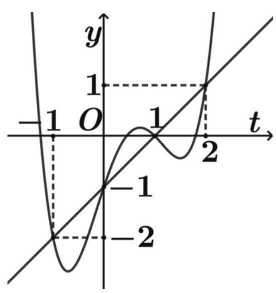


Để phương trình đã cho có đúng 4 nghiệm thì đường thẳng $y = -m$ phải cắt hệ đồ thị trên tại đúng 4 điểm trên $\left[0;2\pi\right]$, muốn vậy ta cần có $\left[\begin{array}{l} -2 < -m < -1 \\ -1 < -m \le 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \le m < 1 \\ 1 < m < 2 \end{array}\right.$. Vậy $S = \left[0;2\right) \setminus \left\{1\right\}$.

Câu 16. Chọn B

Đặt $\left|x\right| - m = t$, phương trình đã cho tương đương với $f\left(t\right) = t - 1$.

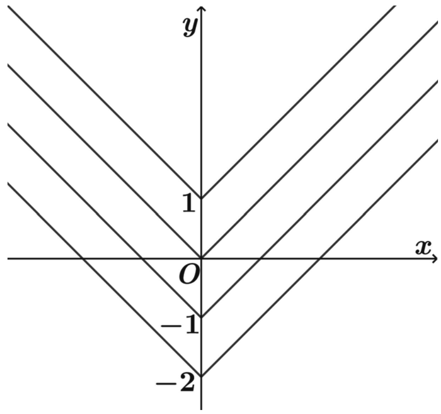
Trên cùng hệ trục tọa độ Oty, vẽ đồ thị hàm số $y = f\left(t\right)$ và đường thẳng $y = t - 1$ (hình vẽ)



Ta thấy chúng cắt nhau tại 4 điểm có hoành độ là $-1, 0, 1, 2$. Vì $f\left(t\right) - t + 1$ là hàm đa thức bậc bốn nên phương trình này cũng có tối đa 4 nghiệm, vậy ngoài 4 điểm cắt đó thì hai đồ thị không cắt nhau.

Do đó $f\left(t\right) = t - 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = 0 \\ t = 1 \\ t = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left|x\right| - m = -1 \\ \left|x\right| - m = 0 \\ \left|x\right| - m = 1 \\ \left|x\right| - m = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left|x\right| + 1 = m \\ \left|x\right| = m \\ \left|x\right| - 1 = m \\ \left|x\right| - 2 = m \end{array}\right.$.

Trên cùng hệ trục tọa độ Oxy, ta vẽ 4 đồ thị: $y = \left|x\right| + 1$; $y = \left|x\right|$; $y = \left|x\right| - 1$; $y = \left|x\right| - 2$ (hình vẽ)



Số nghiệm của phương trình đã cho bằng số giao điểm của đường thẳng $y = m$ và hệ đồ thị trên. Để số giao điểm này thuộc $\{1;2;3;4\}$ thì điều kiện cần và đủ là $-2 \le m < 0$.

Mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-2;-1\}$.

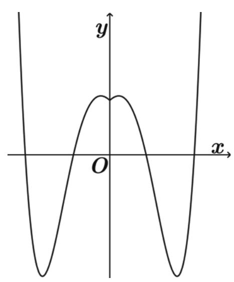
Câu 17. Chọn B

Đặt $x-2=t$, phương trình tương đương: $\left|f\left(|t|\right)+1\right| = m$ (1).

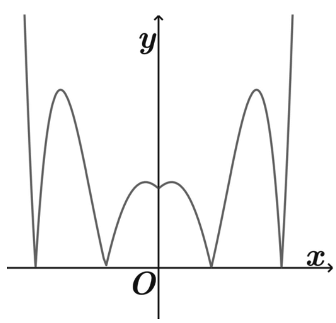
Phương trình có 8 nghiệm phân biệt thuộc $(-5;5)$ khi và chỉ khi (1) có 8 nghiệm phân biệt thuộc $(-7;3)$.

Ta thực hiện việc biến đổi ra đồ thị hàm số $y=\left|f\left(|x|\right)+1\right|$ từ đồ thị hàm số $y=f(x)$ như sau

Bước 1: Tạo ra đồ thị hàm số $y=f\left(|x|\right)+1$ bằng cách lấy đối xứng qua trục tung phần bên phải trục tung đồ thị hàm $y=f(x)$ rồi tịnh tiến lên trên 1 đơn vị:



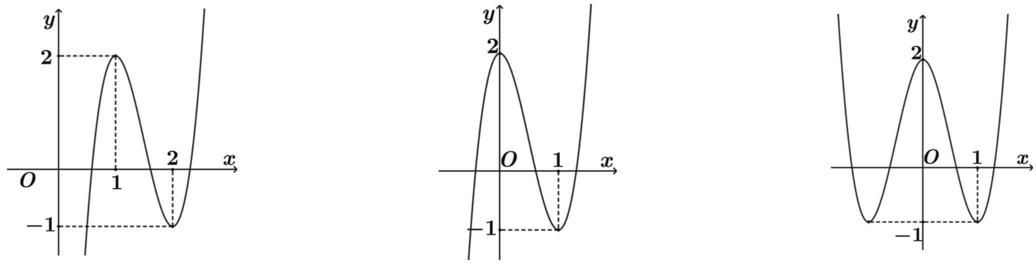
Bước 2: Tạo ra đồ thị hàm số $y=\left|f\left(|x|\right)+1\right|$ bằng cách lấy đối xứng phần dưới trục hoành đồ thị hàm số bên trên, qua trục hoành



Do đó đồ thị hàm số có 8 nghiệm thuộc $(-7;3)$ thì $m=1$.

Câu 18. Chọn A

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f(x)$ và các phép biến đổi đồ thị, ta suy ra đồ thị hàm số $y=f(|x|+1)$ như sau:



$y=f(x)$ $y=f(x+1)$ $y=f(|x|+1)$

Vậy phương trình $f(|x|+1)=m$ có đúng 4 nghiệm khi và chỉ khi $-1<m<2$.

Câu 19. Chọn B

Phương trình tương đương với $f\left((x+1)^2-1\right)=m\ (i)$,

Giả sử x_0 là 1 nghiệm của (i), hiển nhiên

$$f\left((x_0+1)^2-1\right)=m \Leftrightarrow f\left((-x_0-1)^2-1\right)=m \Leftrightarrow f\left((-2-x_0+1)^2-1\right)=m,$$

Do đó $-2-x_0$ cũng là 1 nghiệm của (i). Vậy điều kiện cần và đủ để phương trình (i) có số lẻ nghiệm là (i) có nghiệm $x_0=-1 \Leftrightarrow f(-1)=m \Leftrightarrow m=-2$.

Câu 20. Chọn D

Vì $m\in\mathbb{Z}^+$, ta chia m thành 2 trường hợp

TH1. m là số nguyên dương lẻ, khi đó $\log\left(f(x)\right)^m=1 \Leftrightarrow \left[f(x)\right]^m=10 \Leftrightarrow f(x)=\sqrt[m]{10}$. Dựa vào đồ thị hàm số $y=f(x)$, ta thấy phương trình này có tối đa 3 nghiệm (loại).

TH2. m là số nguyên dương chẵn, khi đó

$$\log\left[f(x)\right]^m=1 \Leftrightarrow m\log\left|f(x)\right|=1 \Leftrightarrow \left|f(x)\right|=10^{\frac{1}{m}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} f(x)=10^{\frac{1}{m}} & (i) \\ f(x)=-10^{\frac{1}{m}} & (ii) \end{array}\right..$$

Để phương trình đã cho có 6 nghiệm phân biệt thì mỗi phương trình (i) và (ii) đều có 3 nghiệm phân biệt, điều này xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} 10^{\frac{1}{m}}<9 \\ -10^{\frac{1}{m}}>-3 \end{cases} \Leftrightarrow 10^{\frac{1}{m}}<3 \Leftrightarrow \dfrac{1}{m}<\log 3 \Leftrightarrow m>\dfrac{1}{\log 3}$ (do $m>0$).

Mà $\begin{cases} m\in\mathbb{Z}^+ \\ m<100 \end{cases}$, ngoài ra m là số nguyên dương chẵn nên $m\in\{4;6;8;10;...;98\}$. Vậy có 48 giá trị của m thỏa mãn điều kiện đề bài.

Câu 21. Chọn A

Xét hàm số $g(x)=f\left(f(x+m)+m\right)$ có $g'(x)=f'(x+m).f'\left(f(x+m)+m\right)$.

Ta có: $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x+m)=0 \\ f'(f(x+m)+m)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+m=-2 \\ x+m=2 \\ f(x+m)+m=-2 \\ f(x+m)+m=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=-2-m & \\ x=2-m & \\ f(x+m)=-2-m & (i) \\ f(x+m)=2-m & (ii) \end{array}\right.$.

Nhận xét: $f(x)$ là hàm đa thức bậc ba nên $f(x+m)+m$ là hàm đa thức bậc ba, do đó $g(x)$ là hàm đa thức bậc 9 nên phương trình $g(x)=0$ có tối đa 9 nghiệm.

Vậy điều kiện cần để $g(x)=0$ đạt số nghiệm tối đa $g(x)$ có 8 điểm cực trị, nên $g'(x)=0$ có 8 nghiệm phân biệt, muốn vậy các phương trình (i) và (ii) đều đạt được số nghiệm tối đa là 3 nghiệm, điều này xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} -3<-2-m<3 \\ -3<2-m<3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5<m<1 \\ -1<m<5 \end{cases}$. Mà $m\in\mathbb{Z} \Rightarrow m=0$.

(Chú ý rằng $m=0$ mới chỉ là điều kiện cần, chưa chắc tại đó $g(x)=0$ đã có 9 nghiệm phân biệt).

Thử lại, với $m=0$ thì $g(x)=f(f(x))$, lúc này để đếm số nghiệm của phương trình $f(x)=0$, ta buộc phải khôi phục hàm số $f(x)$, từ giả thiết $f(x)$ là hàm đa thức bậc ba và đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị là $(-2;3)$ và $(2;-3)$ nên ta tìm được $f(x)=\frac{3}{16}x^3-\frac{9}{4}x$

Do đó $f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2\sqrt{3} \\ x=2\sqrt{3} \end{array}\right.$. Suy ra $f(f(x))=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=0 \\ f(x)=-2\sqrt{3} \\ f(x)=2\sqrt{3} \end{array}\right.$. Các phương trình $f(x)=2\sqrt{3}$ và $f(x)=-2\sqrt{3}$ đều có đúng 1 nghiệm, phương trình $f(x)=0$ có đúng 3 nghiệm nên phương trình $f(f(x))=0$ có đúng 5 nghiệm (loại).

Vậy $m=0$ không thỏa mãn nên không có số nguyên m nào thỏa mãn điều kiện bài toán.

Câu 22. Chọn B

Từ bảng xét dấu của hàm số $f(x)$, ta có bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như sau:

x	$-\infty$		a		b		c		$+\infty$
y		$\searrow$	$f(a)$	$\nearrow$	$f(b)$	$\searrow$	$f(c)$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ giả thiết, $f(d)-f(b)=f(b)-f(a)$, mà $f(b)>f(a) \Rightarrow f(d)>f(b)$.

Do đó xét sự tương giao của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=f(b)$, ta thấy phương trình $f(x)=f(b)$ có nghiệm $x=b; x=x_0\in(c;d)$, và có thể có thêm 1 nghiệm nữa là $x=x_1\in(-\infty;a)$ suy ra $x_1<0$.

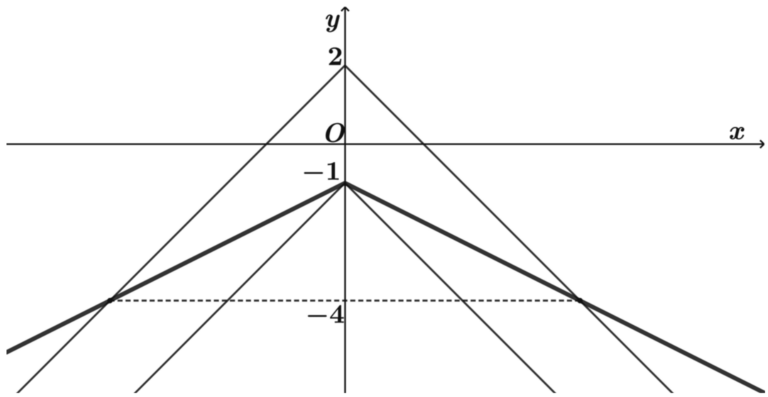
Do đó $f\left(\sqrt{x^2+m}\right)=f(b) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x^2+m}=b \\ \sqrt{x^2+m}=x_0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+m=b^2 \\ x^2+m=x_0^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^2=b^2-m & (i) \\ x^2=x_0^2-m & (ii) \end{array}\right.$. Các phương trình (i) và (ii) đều có tối đa 2 nghiệm, và khi $b^2-m>0$ thì (i) sẽ có 2 nghiệm, ngoài ra ta có $0<b<x_0$

nên $0 < b^2 - m < x_0^2 - m$ suy ra (ii) cũng có 2 nghiệm, do đó phương trình $f\left(\sqrt{x^2+m}\right) = f(b)$ có tối đa là 4 nghiệm.

Câu 23. Chọn A

Ta có: $f\left(|x|+m\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |x|+m=-1 \\ |x|+m=2 \\ |x|+m=-m-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1-|x| \\ m=2-|x| \\ m=-1-\dfrac{1}{2}|x| \end{array}\right.$.

Trên cùng hệ trục tọa độ Oxy, ta vẽ các đồ thị $y=-1-|x|$, $y=2-|x|$ và $y=-1-\dfrac{1}{2}|x|$ (hình vẽ, đường đậm hơn là đường $y=-1-\dfrac{1}{2}|x|$).



Nghiệm của phương trình $f\left(|x|+m\right)=0$ là số giao điểm của hệ 3 đồ thị trên và đường thẳng $y=m$. Từ đó:

- Khi $m<-4$, phương trình có 6 nghiệm.
- Khi $m=-4$, phương trình có 4 nghiệm.
- Khi $-4<m<-1$, phương trình có 6 nghiệm.
- Khi $m=-1$, phương trình có 3 nghiệm.
- Khi $-1<m<2$, phương trình có 2 nghiệm.
- Khi $m=2$, phương trình có đúng 1 nghiệm.
- Khi $m>2$, phương trình vô nghiệm.

Vậy chỉ có đúng 1 giá trị của m để phương trình có đúng 4 nghiệm là $m=-4$.

BÀI 8 – BÀI TẬP LUYỆN TẬP CÓ VIDEO QR CHỮA TỪNG CÂU

Mã QR Code giờ đã phổ biến, các em có thể quét mã QR code để xem thầy giảng từng câu trong phần này nha, đây sẽ là 1 cách tuyệt vời để các em có thể luyện tập

I. CÁCH QUÉT MÃ QR CODE TRÊN ĐIỆN THOẠI ĐỂ XEM VIDEO

Link video hướng dẫn: https://youtu.be/RKBRZI5Kj1Y
Các em có thể quét mã QR Code bên cạnh để mở Link

Tóm tắt:
- Các em dùng điện thoại (ví dụ iPhone), mở phần mềm Camera
- Các em đưa camera vào phía ảnh mã QR code bên cạnh (không chụp ảnh)

Vậy là được rồi, bình thường máy sẽ hiển thị link để các em mở sau đó một cách tự động. Nếu không hiển thị, các em vào safari gõ đường link bên trên sẽ xem video hướng dẫn do thầy hướng dẫn nhé.

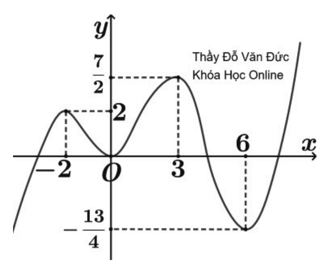
II. BÀI TẬP

BÀI TẬP CƠ BẢN

1. Cho hàm số $f(x)=x^3-3x+2$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $f\left(x^2+2x\right)+m=0$ có 4 nghiệm phân biệt

A. $-4<m<0$. **B.** $-4<m<-1$. **C.** $1<m<4$. **D.** $0<m<4$.

2. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f\left(2x^3-6x+2\right)=2m-1$ có 6 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1;2]$?



A. 2. **B.** 3.
C. 0. **D.** 1.

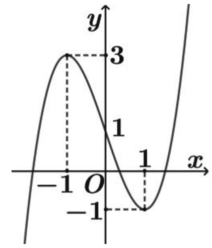
3. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↘	-2	↗	2	↘	-3	↗	$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $5f\left(x^2-4x\right)=m$ có ít nhất 3 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(0;+\infty)$

A. 24. **B.** 21. **C.** 25. **D.** 20.

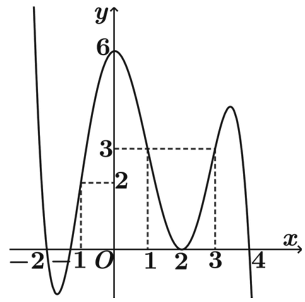
4. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(\sin x)=m$ có 4 nghiệm thuộc nửa khoảng $[0;3\pi)$ là



A. $(-1;3]$. **B.** $(-1;1]$.

C. $(-1;1)$. **D.** $(-1;3)$.

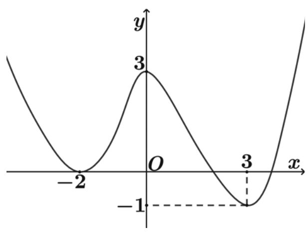
5. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên dưới:



Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(4\sin x-1)=m$ có đúng 2 nghiệm phân biệt thuộc $\left(\frac{\pi}{6};\pi\right)$ là

A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

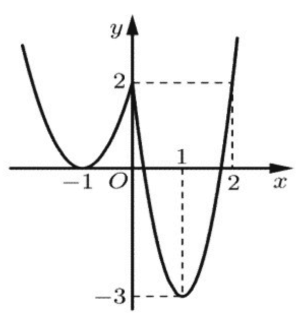
6. Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức và có đồ thị như hình vẽ.



Số điểm cực trị của hàm số $y=f(2|x|+1)$ là

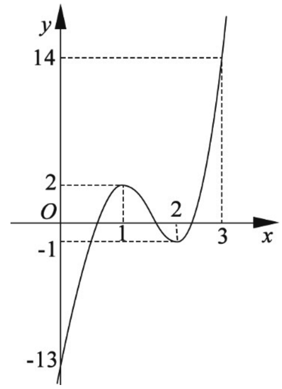
A. 1. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 5.

7. Cho hai hàm số $u(x)=\frac{x+3}{\sqrt{x^2+3}}$ và $f(x)$, trong đó đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ bên. Hỏi có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f(u(x))=m$ có đúng 3 nghiệm phân biệt?



A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

8. Cho hàm số $f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ



Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(f\left(x\right)+1\right)=m$ có ba nghiệm phân biệt bằng

A. 11. **B.** 14. **C.** 22. **D.** 27.

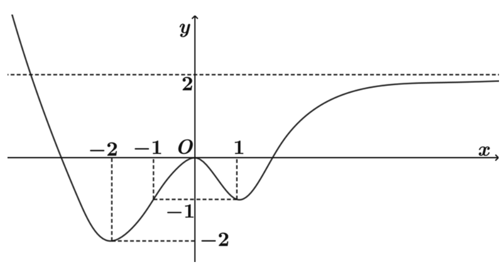
9. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, $f\left(-2\right)=7$ và có bảng biến thiên dưới đây

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\left|x^2-1\right|-2\right)=m$ có đúng 6 nghiệm thực phân biệt?

A. 9. **B.** 8. **C.** 7. **D.** 6.

10. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ (đường thẳng $y=2$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số).



Tìm m để phương trình $f\left(x^2+2x\right)=m$ có nhiều nghiệm nhất

A. $0<m<1$. **B.** $-1<m<0$. **C.** $1<m<2$. **D.** $2<m<3$.

CÁC BÀI TOÁN NÂNG CAO

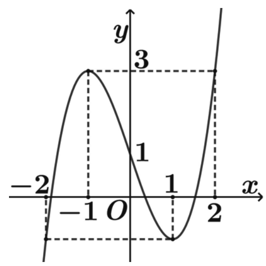
11. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	1	↗	5	↘	-1	↗	$+\infty$

Số điểm cực tiểu của hàm số $y=f\left(f\left(|x|\right)\right)$ là

A. 5. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 4.

12. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ



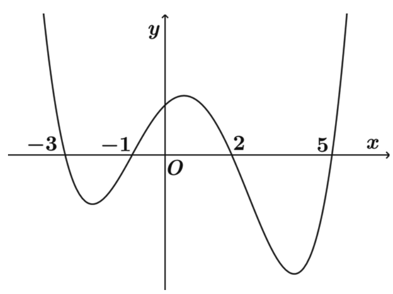
Số điểm cực tiểu của hàm số $y=f\left(x^3-3|x|\right)$ là

A. 3. **B.** 4. **C.** 7. **D.** 6.

13. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có $f'(x)=x^2-4$. Hỏi hàm số $f\left(\left|x^2-4\right|\right)$ có bao nhiêu điểm cực đại?

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 5.

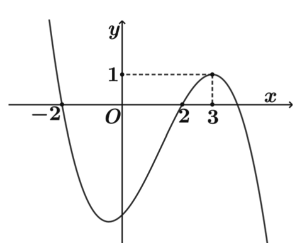
14. Cho hàm số $y=f(x)$, hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y=f\left(\left|x^2-4\right|-4\right)$ là

A. 7. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 10.

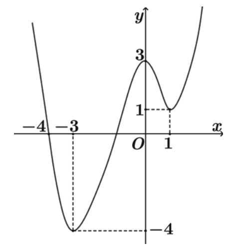
15. Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ



Tìm m để phương trình $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=m$ có đúng 4 nghiệm?

A. $\left[\begin{array}{l}m=0\\m=1\end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l}m>1\\m<0\end{array}\right.$. **C.** $-1<m<1$. **D.** $0\le m\le 1$.

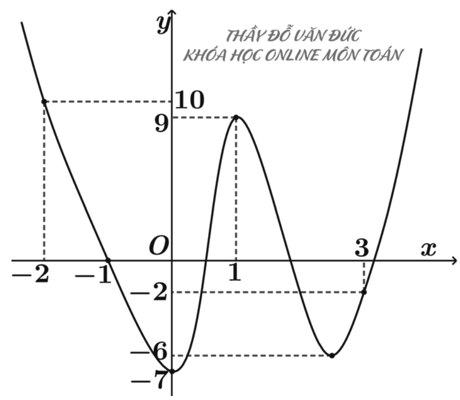
16. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(|x+3|(x-1)\right)=\log m$ có ít nhất năm nghiệm phân biệt?



A. 990. **B.** 991. **C.** 989. **D.** 913.

Nguồn: Đề thi thử Sở Hòa Bình năm 2020-2021

17. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau:



Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số m để phương trình $f\left(-1+\sqrt{12+4x-x^2}\right)=f(m)$ có đúng 2 nghiệm thực?

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 5.

Nguồn : Thi thử lần 2 – THPT Chuyên Hưng Yên – Năm 2020-2021

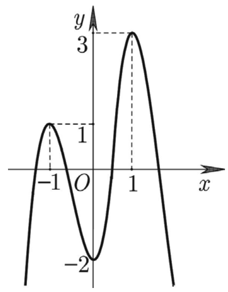
18. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Số giá trị nguyên của m để phương trình $f\left(|\sin x|\right)=3|\sin x|+m$ có nhiều hơn 1 nghiệm trên $\left(-\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$ là

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

19. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y=f(1-x)$ được cho trong hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $\left|f\left(\dfrac{1-x}{x+2}\right)+m\right|=1$ có đúng 3 nghiệm phân biệt thuộc $[-1;1]$?



A. 3.   **B.** 4.   **C.** 2.   **D.** 1.

Chọn A

Nguồn: Thi thử lần 2 – Chuyên Đại Học Vinh Nghệ An – Năm 2020-2021

20. Cho hàm số bậc bốn $y=f\left(x\right)$ thỏa mãn $f\left(0\right)=0$. Hàm số $y=f'\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'\left(x\right)$	$+\infty$	↘	-4	↗	-1	↘	$-\infty$

Hàm số $g\left(x\right)=\left|f\left(-x^2\right)-\dfrac{x^8}{2}+x^6-x^2\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 7.   **B.** 3.   **C.** 5.   **D.** 9.

III. ĐÁP ÁN VÀ VIDEO CHỮA

1A	**2D**	**3C**	**4C**	**5D**	**6C**	**7B**	**8C**	**9C**	**10B**
11B	**12B**	**13C**	**14B**	**15A**	**16B**	**17A**	**18C**	**19A**	**20C**

1. Cho hàm số $f(x)=x^3-3x+2$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số *m* sao cho phương trình $f\left(x^2+2x\right)+m=0$ có 4 nghiệm phân biệt

A. $-4<m<0$. **B.** $-4<m<-1$.

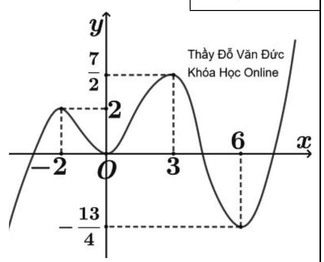
C. $1<m<4$. **D.** $0<m<4$.

Hướng dẫn: *Vẽ bảng biến thiên của hàm số $f\left(x^2+2x\right)$ theo phương pháp ghép trục.*

Chọn A

Scan QR-Code để xem video

2. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên. Có bao nhiêu số nguyên *m* để phương trình $f\left(2x^3-6x+2\right)=2m-1$ có 6 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1;2]$?



A. 2. **B.** 3.

C. 0. **D.** 1.

Hướng dẫn: *Sử dụng ghép trục, ta thấy m cần tìm thỏa mãn* $0<2m-1<2$

Chọn D

Scan QR-Code để xem video

3. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số *m* để phương trình $5f\left(x^2-4x\right)=m$ có ít nhất 3 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(0;+\infty)$

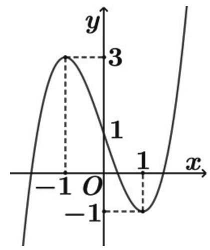
A. 24. **B.** 21. **C.** 25. **D.** 20.

Hướng dẫn: *Sử dụng phương pháp ghép trục vẽ bảng biến thiên của hàm số $y=f\left(x^2-4x\right)$.*

Chọn C

Scan QR-Code để xem video

4. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(\sin x) = m$ có 4 nghiệm thuộc nửa khoảng $[0;3\pi)$ là



A. $(-1;3]$. **B.** $(-1;1]$.

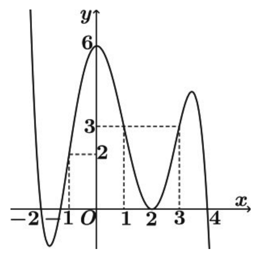
C. $(-1;1)$. **D.** $(-1;3)$.

Hướng dẫn: *Cách 1: Sử dụng biên luận nghiệm truyền thống, Cách 2: Sử dụng phương pháp ghép trục. Đáp án:* $-1 < m < 1$.

Chọn C

Scan QR-Code để xem video

5. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên dưới: Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(4\sin x - 1) = m$ có đúng 2 nghiệm phân biệt thuộc $\left(\frac{\pi}{6};\pi\right)$ là



A. 1. **B.** 4.

C. 2. **D.** 3.

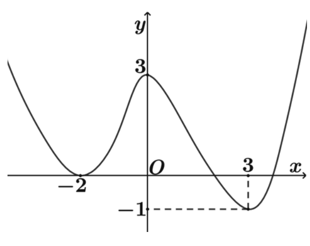
Hướng dẫn: *Sử dụng phương pháp ghép trục vẽ bảng biến thiên của hàm số* $y = f(4\sin x - 1)$.

Chọn D

Scan QR-Code để xem video

6. Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm đa thức và có đồ thị như hình vẽ.

Số điểm cực trị của hàm số $y = f(2|x| + 1)$ là



A. 1. **B.** 4.

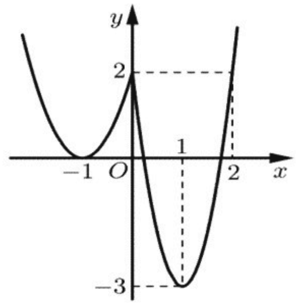
C. 3. **D.** 5.

Hướng dẫn: *Bài này có thể dùng phương pháp ghép trục hoặc dùng kĩ năng cực trị hàm trị tuyệt đối để giải*

Chọn C

Scan QR-Code để xem video

7. Cho hai hàm số $u(x)=\dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+3}}$ và $f(x)$, trong đó đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ bên. Hỏi có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f(u(x))=m$ có đúng 3 nghiệm phân biệt?



A. 4.　　　　**B.** 3.

C. 2.　　　　**D.** 1.

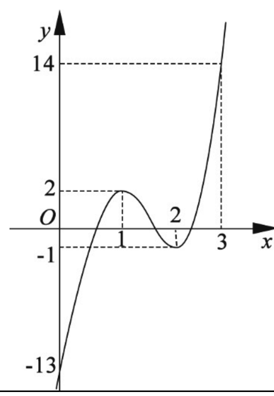
Hướng dẫn: *Sử dụng ghép trục để vẽ bảng biến thiên hàm số* $f(u(x))$

Chọn B

Scan QR-Code để xem video

8. Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ

Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(f(x)+1)=m$ có ba nghiệm phân biệt bằng



A. 11.　　　　**B.** 14.

C. 22.　　　　**D.** 27.

Hướng dẫn: *Vẽ bảng biến thiên của hàm số* $y=f(f(x)+1)$ *bằng phương pháp ghép trục.*

Chọn C

Scan QR-Code để xem video

9. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, $f(-2)=7$ và có bảng biến thiên dưới đây

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(|x^2-1|-2)=m$ có đúng 6 nghiệm thực phân biệt?

A. 9.　　　　**B.** 8.

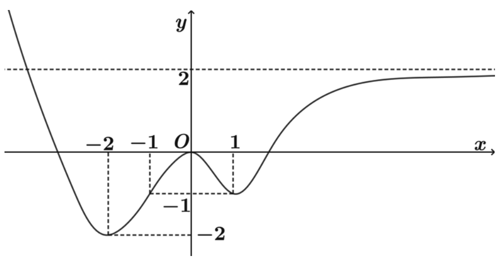
C. 7.　　　　**D.** 6.

Hướng dẫn: *Sử dụng ghép trục để vẽ bảng bảng biến thiên hàm số* $f(|x^2-1|-2)$.

Chọn C

Scan QR-Code để xem video

10. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ (đường thẳng $y = 2$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số).



Tìm m để phương trình $f\left(x^2+2x\right)=m$ có nhiều nghiệm nhất

A. $0 < m < 1$.   **B.** $-1 < m < 0$.

C. $1 < m < 2$.   **D.** $2 < m < 3$.

Hướng dẫn: *Dùng phương pháp ghép trục vẽ bảng biến thiên của hàm số* $f\left(x^2+2x\right)$.

Chọn B

Scan QR-Code để xem video

11. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	1	↗	5	↘	-1	↗	$+\infty$

Số điểm cực tiểu của hàm số $y = f\left(f\left(|x|\right)\right)$ là

A. 5.   **B.** 6.

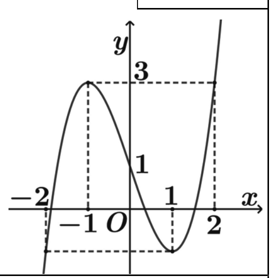
C. 3.   **D.** 4.

Hướng dẫn:*. Sử dụng phương pháp ghép trục theo quy tắc:* $x \to |x| \to f\left(|x|\right) \to f\left(f\left(|x|\right)\right)$

Chọn B

Scan QR-Code để xem video

12. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ. Số điểm cực tiểu của hàm số $y = f\left(x^3 - 3|x|\right)$ là



A. 3.   **B.** 4.

C. 7.   **D.** 6.

Hướng dẫn:*. Xét* $u(x) = x^3 - 3|x|$, *khảo sát hàm số* $y = u(x)$, *từ đó khảo sát hàm số* $y = f\left(u(x)\right)$ *bằng ghép trục.*

Chọn B

Scan QR-Code để xem video

13. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có $f'(x)=x^2-4$. Hỏi hàm số $f\left(\left|x^2-4\right|\right)$ có bao nhiêu điểm cực đại?

A. 2. **B.** 4.
C. 3. **D.** 5.

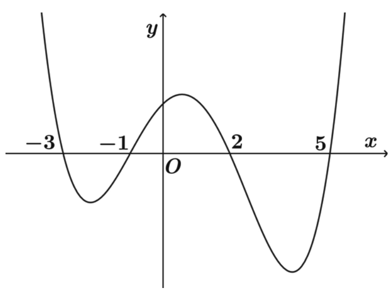
Hướng dẫn: *. Sử dụng phương pháp ghép trục:* $x \to u=\left|x^2-4\right|$ và $u \to f\left(u(x)\right)$.

Chọn A

Scan QR-Code để xem video

14. Cho hàm số $y=f(x)$, hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.

Số điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y=f\left(\left|x^2-4\right|-4\right)$ là



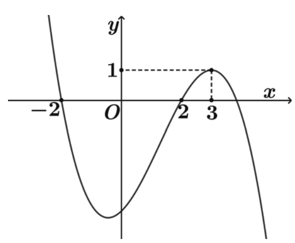
A. 7. **B.** 8.
C. 9. **D.** 10.

Hướng dẫn: *. Khảo sát hàm số* $u(x)=\left|x^2-4\right|-4$, từ đó tiếp tục khảo sát hàm số $y=f\left(u(x)\right)$ bằng phương pháp ghép trục.

Chọn B

Scan QR-Code để xem video

15. Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ



Tìm m để phương trình $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=m$ có đúng 4 nghiệm?

A. $\left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=1 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m>1 \\ m<0 \end{array}\right.$.

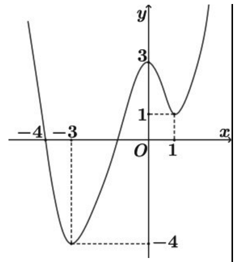
C. $-1<m<1$. **D.** $0 \le m \le 1$.

Hướng dẫn: *. Khảo sát hàm số* $y=f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$ *bằng phương pháp ghép trục.*

Chọn

Scan QR-Code để xem video

16. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(|x+3|(x-1)\right)=\log m$ có ít nhất năm nghiệm phân biệt?



A. 990. **B.** 991.

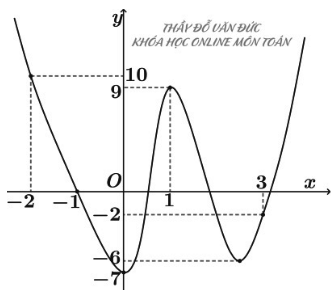
C. 989. **D.** 913.

Hướng dẫn: *Vẽ bảng biến thiên của hàm số* $u(x)=|x+3|(x-1)$, *từ đó vẽ bảng biến thiên hàm* $f(u(x))$.

Chọn B

Scan QR-Code để xem video

17. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau: Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số m để phương trình $f\left(-1+\sqrt{12+4x-x^2}\right)=f(m)$ có đúng 2 nghiệm thực?



A. 4. **B.** 3.

C. 2. **D.** 5.

Hướng dẫn: *Sử dụng ghép trục, ta tìm được* $f(m)=-7$ hoặc $f(m)=9$.

Chọn A

Scan QR-Code để xem video

18. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Số giá trị nguyên của m để phương trình $f\left(|\sin x|\right)=3|\sin x|+m$ có nhiều hơn 1 nghiệm trên $\left(-\frac{\pi}{2};\pi\right]$ là

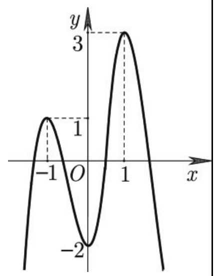
A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Hướng dẫn: *Xét hàm số* $g(t)=f(t)-3t$ *thì ta sử dụng ghép trục để vẽ BBT của hàm* $y=f\left(|\sin x|\right)-3|\sin x|$ qua sơ đồ: $x\to t=|\sin x|\to g(t)$.

Chọn C

Scan QR-Code để xem video

19. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y = f(1-x)$ được cho trong hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $\left|f\left(\dfrac{1-x}{x+2}\right)+m\right| = 1$ có đúng 3 nghiệm phân biệt thuộc $[-1;1]$?



A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Hướng dẫn: *Sử dụng truy ngược ta tìm được bảng biến thiên của hàm số $f(x)$, sau đó sử dụng ghép trục để giải bước còn lại.*

Chọn A

Scan QR-Code để xem video

20. Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ thỏa mãn $f(0) = 0$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số $g(x) = \left|f(-x^2) - \dfrac{x^8}{2} + x^6 - x^2\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 7. **B.** 3.

C. 5. **D.** 9.

Hướng dẫn: *Sử dụng phương pháp ghép trục, ta vẽ:* $x \to t = -x^2 \to h(t) = f(t) - \dfrac{t^4}{2} - t^3 + t$

Chọn C

Scan QR-Code để xem video

--- Hết ---

Thầy Đỗ Văn Đức
<with Love ♡>

Thầy Đỗ Văn Đức

Khóa học LIVE-VIP IMO môn Toán

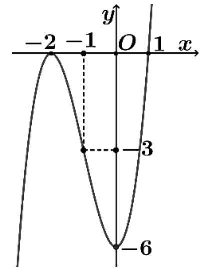
Page livestream và tài liệu: https://www.facebook.com/dovanduc2020

Group hỏi bài và tâm sự: https://www.facebook.com/groups/2004thayduc

THẦY ĐỖ VĂN ĐỨC | Facebook: fb.com/thayductoan

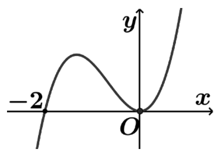
PHẦN ĐỀ BÀI

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm của phương trình $f(\sin x+\cos x)+5=0$ trong khoảng $[0;4\pi]$ là



A. 7. **B.** 8. **C.** 4. **D.** 6.

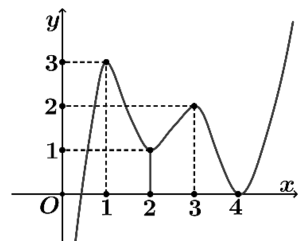
Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\left|\dfrac{\sin x-\cos x-1}{\sin x-2}\right|\right)=f\left(m^2+4m+4\right)$ có nghiệm?

A. 3. **B.** 0. **C.** 2. **D.** Vô số.

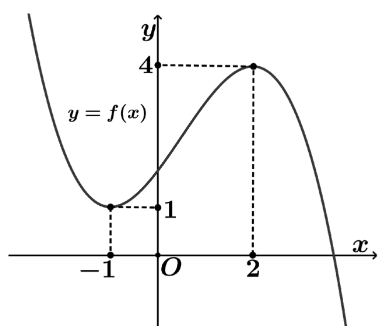
Câu 3. Cho số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số giá trị nguyên của m để phương trình $2\left[f(x)\right]^3-9\left[f(x)\right]^2=m$ có số nghiệm nhiều nhất



A. 11. **B.** 12.

C. 13. **D.** 14.

Câu 4. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.

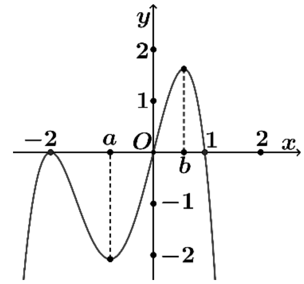


Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $\left|3f^2(2x)-12f(2x)-m\right|=1$ có ít nhất 7 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-\infty;1)$?

A. 3. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 2.

Nguồn: Đề thi thử Toán TN THPT 2023 lần 1 – Sở Sóc Trăng.

Câu 5. Cho hàm số bậc bốn $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $y=f\left(\left|x+2\right|\left(x-2\right)\right)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 4. B. 5.

C. 2. D. 3.

Câu 6. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-15	-12	1	3	4	$+\infty$
y	$-\infty$ ↗	3 ↘	0 ↗	5 ↘	-5 ↗	3 ↘	$-\infty$

Số các điểm cực đại của hàm số $g\left(x\right)=\left|f\left(\left|2x^2-6x-8\right|+x^2-13\right)\right|$ là:

A. 8. B. 10. C. 9. D. 7.

Nguồn: Đề kiểm tra định kì toán 12 – THPT Nguyễn Khuyến, Lê Thánh Tông, HCM.

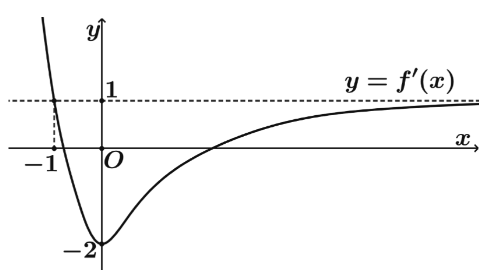
Câu 7. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'\left(x\right)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f\left(x\right)$	8	↘	-2	↗	0	↘	$-\infty$

Số giá trị nguyên của tham số $m\in\left[-10;10\right]$ để phương trình $\left[f\left(x\right)\right]^2=m\left[f\left(x\right)+1\right]$ có đúng 4 nghiệm là

A. 16. B. 15. C. 14. D. 13.

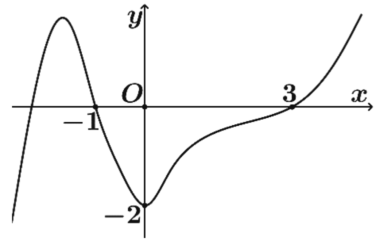
Câu 8. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ (đường $y=1$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị).



Số điểm cực trị của hàm số $g\left(x\right)=f\left(x^2-2x\right)-\frac{2}{3}x^3$ là

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

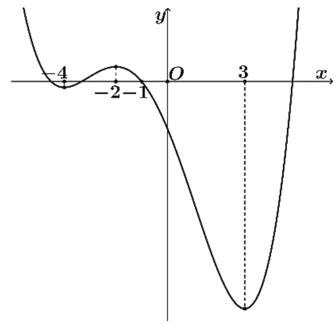
Câu 9. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$, hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số $g\left(x\right)=f\left(x^2-2x\right)-2\ln\left(x+1\right)$ là



A. 1. B. 2.

C. 3. D. 4.

Câu 10. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ là hàm đa thức bậc 5, có đồ thị $f'\left(x\right)$ như hình vẽ ($f'\left(x\right)$ có 3 điểm cực trị là $-4;-2$ và 3). Hỏi hàm số $g\left(x\right)=f\left(x^2+2x\right)-x^2$ có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 1. B. 3.

C. 4. D. 2.

Nguồn: Đề thi HK1 THPT Thị Xã Quảng Trị - năm 2022-2023

PHẦN ĐÁP ÁN CHI TIẾT

Câu 1 - Chọn B

Ta có: $f\left(\sin x+\cos x\right)+5=0\Leftrightarrow f\left(\sin x+\cos x\right)=-5.$ Đặt $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

Suy ra:

$$t'\left(x\right)=\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow t'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0\Leftrightarrow x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi.$$

Xét trên đoạn $x\in\left[0;4\pi\right]$, ta có $t'\left(x\right)=0\Leftrightarrow x\in\left\{\dfrac{\pi}{4};\dfrac{5\pi}{4};\dfrac{9\pi}{4};\dfrac{13\pi}{4}\right\}$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $t\left(x\right)$ trên đoạn $\left[0;4\pi\right]$ như sau:

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{4}$		$\frac{9\pi}{4}$		$\frac{13\pi}{4}$		4π
$t'\left(x\right)$		+	0	−	0	+	0	−	0	+	
$t\left(x\right)$	1	↗	$\sqrt{2}$	↘	$-\sqrt{2}$	↗	$\sqrt{2}$	↘	$-\sqrt{2}$	↗	1

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$, ta thấy: $f\left(\sqrt{2}\right)=a,\ f\left(-\sqrt{2}\right)=b\ \left(a>0,-3<b<0\right)$

Từ đó ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f\left(\sin x+\cos x\right)$ trên đoạn $\left[0;4\pi\right]$ theo phương pháp ghép trục: $x\to t\to f\left(t\right)$ như sau:

x	0	$\pi/4$		$5\pi/4$		$9\pi/4$		$13\pi/4$		4π
t	1	$\sqrt{2}$	0	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	0	$-\sqrt{2}$	0	1
$f(t)$	0	a	-6	b	-6	b	-6	b	-6	0

$y=-5$

Từ bảng trên ra thấy phương trình $f\left(\sin x+\cos x\right)=-5$ có 8 nghiệm trên đoạn $\left[0;4\pi\right]$.

Câu 2 - Chọn A

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$, ta thấy $f\left(x\right)$ đồng biến trên $\left[0;+\infty\right)$, mà $\left|\dfrac{\sin-\cos x-1}{\sin x-2}\right|\ge 0\ \forall x\in\mathbb{R}$ và $m^2+4m+4=\left(m+2\right)^2\ge 0\ \forall m\in\mathbb{R}$, nên phương trình đã cho tương đương với:

$$\left|\frac{\sin x-\cos x-1}{\sin x-2}\right|=m^2+4m+4\ \left(i\right).$$

Đặt $t=\dfrac{\sin x-\cos x-1}{\sin x-2}\Leftrightarrow t\left(\sin x-2\right)=\sin x-\cos x-1\Leftrightarrow \cos x+\left(t-1\right)\sin x=2t-1\ \left(ii\right)$.

Chú ý rằng phương trình $a.\cos x+b.\sin x=c$ có nghiệm khi và chỉ khi $a^2+b^2\ge c^2$.

Áp dụng vào bài, để phương trình $\left(ii\right)$ có nghiệm ta có:

$$1^2+\left(t-1\right)^2\ge\left(2t-1\right)^2\Leftrightarrow 3t^2-2t-1\le 0\Leftrightarrow -\frac{1}{3}\le t\le 1\Rightarrow\left|t\right|\in\left[0;1\right].$$

Do đó tập giá trị của hàm số $y=\left|\dfrac{\sin x-\cos x-1}{\sin x-2}\right|$ là $\left[0;1\right]$ khi $x\in\mathbb{R}$, nên $\left(i\right)$ có nghiệm khi và chỉ khi $0\le m^2+4m+4\le 1\Leftrightarrow m^2+4m+3\le 0\Leftrightarrow -3\le m\le -1$. Vậy có 3 số nguyên m thỏa mãn.

Câu 3 - Chọn C

Đặt $t=f\left(x\right)$, xét hàm số $g\left(t\right)=2t^3-9t^2$. Ta có $g\left(f\left(x\right)\right)=2\left[f\left(x\right)\right]^3-9\left[f\left(x\right)\right]^2$

Ta vẽ bảng biến thiên của hàm số $g\left(f\left(x\right)\right)$ theo phương pháp ghép trục: $x\to t\to g\left(t\right)$.

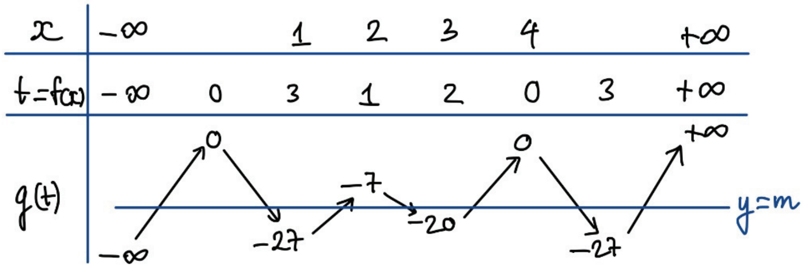
Hàng đầu tiên, $x\to t$ đã có đầy đủ thông tin qua đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$.

Xét hàm số $g\left(t\right)$, ta có $g'\left(t\right)=6t^2-18t=6t\left(t-3\right)$ nên $g'\left(t\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\t=3\end{array}\right.$.

Từ đó ta có bảng biến thiên của hàm số $g\left(t\right)$ như sau:

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$g'\left(t\right)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g\left(t\right)$	$-\infty$	↗	0	↘	-27	↗	$+\infty$

Từ đó ta có bảng biến thiên của hàm số $g\left(f\left(x\right)\right)$ theo phương pháp ghép trục: $x \to t \to g\left(t\right)$.



Phương trình đã cho có nhiều nghiệm nhất khi và chỉ khi $-20 < m < -7$. Từ đó có 12 số nguyên m thỏa mãn điều kiện đề bài.

Câu 4 – Chọn C

Ta có: $\left|3f^2\left(2x\right)-12f\left(2x\right)-m\right|=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3f^2\left(2x\right)-12f\left(2x\right)-m=1\\3f^2\left(2x\right)-12f\left(2x\right)-m=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3f^2\left(2x\right)-12f\left(2x\right)-1=m\\3f^2\left(2x\right)-12f\left(2x\right)+1=m\end{array}\right.$

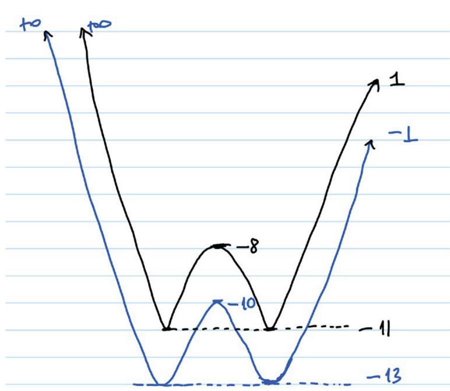
Xét hàm số $g\left(t\right)=3t^2-12t-1$, ta có $g\left(f\left(2x\right)\right)=3f^2\left(2x\right)-12f\left(2x\right)-1$, ta vẽ bảng biến thiên của hàm số $g\left(f\left(2x\right)\right)$ bằng phương pháp ghép trục:

$$x \to u=2x \to t=f\left(u\right) \to g\left(t\right)=g\left(f\left(u\right)\right)=g\left(f\left(2x\right)\right)$$

Ta có: $g'\left(t\right)=6t-12=6\left(t-2\right)$. Từ đó ta có bảng biến thiên trên khoảng $\left(-\infty;1\right)$ như sau:

x	$-\infty$				1
$2x$	$-\infty$		-1		2
$f\left(2x\right)$	$+\infty$	2	1	2	4
$g\left(t\right)$	$+\infty$	-13	-10	-13	-1

Ta cần tìm m để hệ $\left[\begin{array}{l}g\left(f\left(2x\right)\right)=m\\g\left(f\left(2x\right)\right)+2=m\end{array}\right.$ có ít nhất 7 nghiệm, dựa vào bảng biến thiên, ta phác họa 2 đồ thị hàm số $g\left(f\left(2x\right)\right)$ và $g\left(f\left(2x\right)\right)+2$ trên cùng hệ trục tọa độ:



Ta cần tìm m sao cho đường $y=m$ cắt hệ đồ thị trên tại ít nhất 7 điểm, muốn vậy, ta cần có $-11 < m \le -10$. Mà $m \in \mathbb{Z} \to m \in \left\{-10\right\}$.

Câu 5 - Chọn A

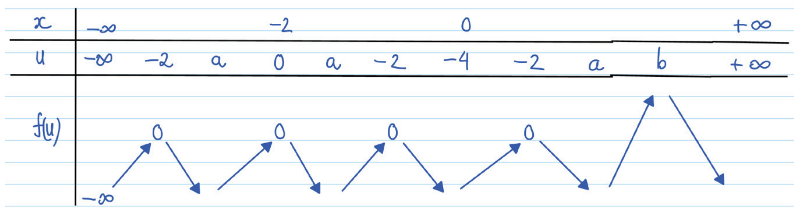
Đặt $u = |x+2|(x-2) = \sqrt{(x+2)^2}.(x-2)$

Ta có: $u' = \dfrac{x+2}{\sqrt{(x+2)^2}}.(x-2) + \sqrt{(x+2)^2} = \dfrac{2x(x+2)}{\sqrt{(x+2)^2}}\ \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-2\}$

Khi đó ta có bảng biến thiên của hàm số $y = u(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
u'		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
u	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Dùng phương pháp ghép trục ta được bảng biến thiên của hàm số $y = f(u)$:



Vậy hàm số đã cho có 4 điểm cực tiểu.

Câu 6 - Chọn A

Xét $u(x) = |2x^2-6x-8| + x^2 - 13 = \begin{cases} 2x^2-6x-8+x^2-13 \text{ khi } x \in (-\infty;-1)\cup(4;+\infty) \\ -2x^2+6x+8+x^2-13 \text{ khi } x \in (-1;4) \end{cases}$

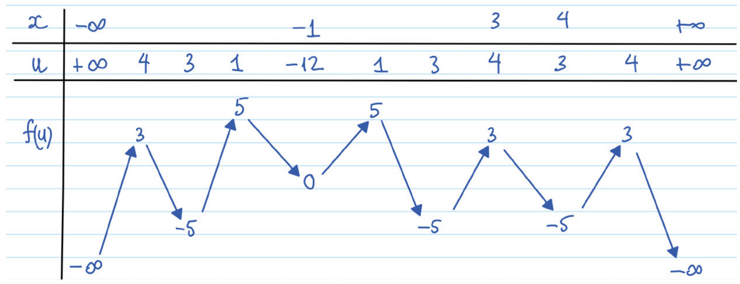
$$\Leftrightarrow u(x) = \begin{cases} x^2-6x-21 \text{ khi } x \in (-\infty;-1)\cup(4;+\infty) \\ -x^2+6x-5 \text{ khi } x \in (-1;4) \end{cases}.$$

Khi đó: $u'(x) = \begin{cases} 6x-1 \text{ khi } x \in (-\infty;-1)\cup(4;+\infty) \\ -2x+6 \text{ khi } x \in (-1;4) \end{cases}$

Bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$:

x	$-\infty$		-1		3		4		$+\infty$
$u'(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	
$u(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-12	$\nearrow$	4	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

Dùng phương pháp ghép trục ta được bảng biến thiên của hàm số $y = f(u(x))$:



Phương trình $f\left(u\left(x\right)\right)=0$ có 8 nghiệm đơn (bội lẻ), đồng thời hàm $f\left(u\left(x\right)\right)$ có 9 điểm cực trị nên hàm số $\left|f\left(u\left(x\right)\right)\right|$ có 17 điểm cực trị. Đương nhiên điểm đầu và điểm cuối là các điểm cực tiểu, nên số điểm cực tiểu nhiều hơn số điểm cực đại 1 đơn vị. Vậy hàm số có 9 điểm cực tiểu và 8 điểm cực đại.

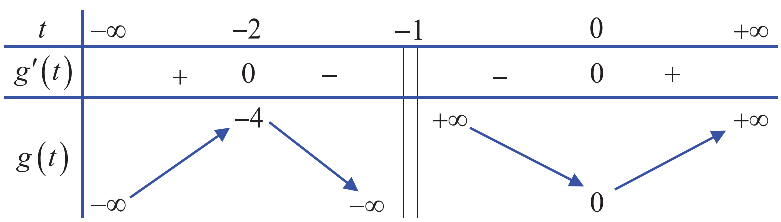
Câu 7 - Chọn D

Phương trình đã cho tương đương với: $\dfrac{f^2\left(x\right)}{f\left(x\right)+1}=m,$ đặt $f\left(x\right)=t,$ xét hàm $g\left(t\right)=\dfrac{t^2}{t+1}$ thì phương trình đương đương $g\left(f\left(x\right)\right)=m.$

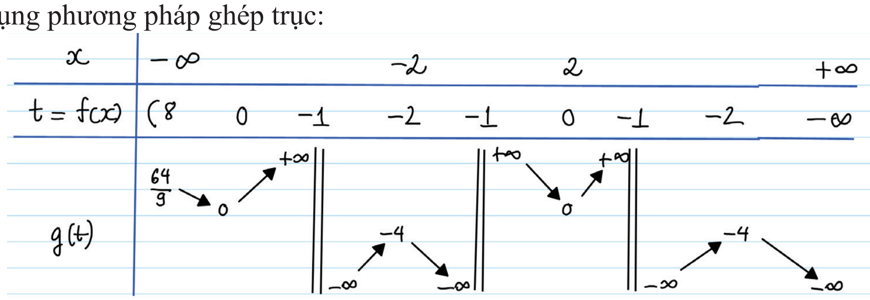
Ta sử dụng phương pháp ghép trục để vẽ bảng biến thiên hàm $g\left(f\left(x\right)\right)$:

$$x\to t=f\left(x\right)\to g\left(t\right)=g\left(f\left(x\right)\right).$$

Bước 1: Khảo sát $g\left(t\right)$: ta có $g'\left(t\right)=\dfrac{2t\left(t+1\right)-t^2}{\left(t+1\right)^2}=\dfrac{t\left(t+2\right)}{\left(t+1\right)^2}$, từ đó ta có bảng biến thiên:



Bước 2: Sử dụng phương pháp ghép trục:



Từ đó, phương trình đã cho có đúng 4 nghiệm khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l}m<-4\\0<m<\dfrac{64}{9}\end{array}\right.$, mà $\begin{cases}m\in\mathbb{Z}\\m\in\left[-10;10\right]\end{cases}$ nên $m\in\left\{-10;-9;...;-5\right\}\cup\left\{1;2;...;7\right\}.$

Câu 8 - Chọn B

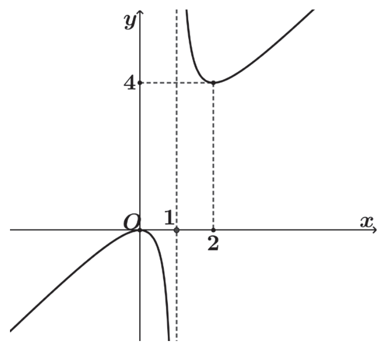
Xét $g'\left(x\right)=\left(2x-2\right)f'\left(x^2-2x\right)-\dfrac{2}{3}.3x^2=2\left[\left(x-1\right)f'\left(x^2-2x\right)-x^2\right].$

Ta có $g'(x)=0 \Leftrightarrow (x-1)f'(x^2-2x)=x^2 \Leftrightarrow f'(x^2-2x)=\dfrac{x^2}{x-1}$.

Từ đồ thị hàm số $y=f'(x)$, ta vẽ bảng biến thiên của hàm số $y=f'(x^2-2x)$ bằng phương pháp ghép trục như sau:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$u=x^2-2x$	$+\infty$		0		-1		0		$+\infty$
$f'(u)$	1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	1

Chú ý rằng đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2}{x-1}$ như hình vẽ,



Do đó phương trình $f'(x^2-2x)=\dfrac{x^2}{x-1}$ có đúng 2 nghiệm (đơn, bội lẻ), nên hàm số $g(x)$ có đúng 2 điểm cực trị.

Câu 9 - Chọn C

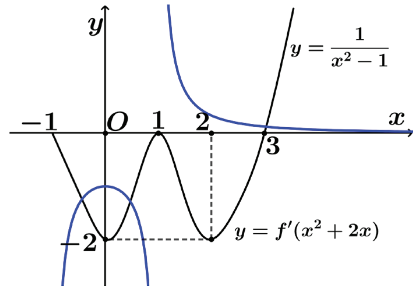
Xét hàm số $g(x)$, TXĐ: $(-1;+\infty)$.

Ta có: $g'(x)=(2x-2)f'(x^2-2x)-\dfrac{2}{x+1} \Rightarrow g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x^2-2x)=\dfrac{1}{x^2-1}$.

Từ bảng biến thiên của hàm số $y=f'(x)$, ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f'(x^2-2x)$ trên $(-1;+\infty)$ theo phương pháp ghép trục như sau:

x	$(-1$		0		1		2		$+\infty$
u	$(3$		0		-1		0		$+\infty$
$f'(u)$	$(0$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Xét hàm số $h(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$, ta phác họa cả hai đồ thị hàm số $y=h(x)$ và $y=f'(x^2-2x)$ trên cùng hệ trục tọa độ trên $(-1;+\infty)$ như sau:



Từ đó, phương trình $g'(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt, nên hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực trị.

Sai lầm thường gặp

- Vẽ cả đồ thị hàm số $y=f'(x^2-2x)$ và $y=\frac{1}{x^2-1}$ trên $\mathbb{R}$ và thấy rằng chúng giao nhau tại 4 điểm nên chọn 4 điểm cực trị, không để ý rằng điều kiện xác định là $x>-1$.

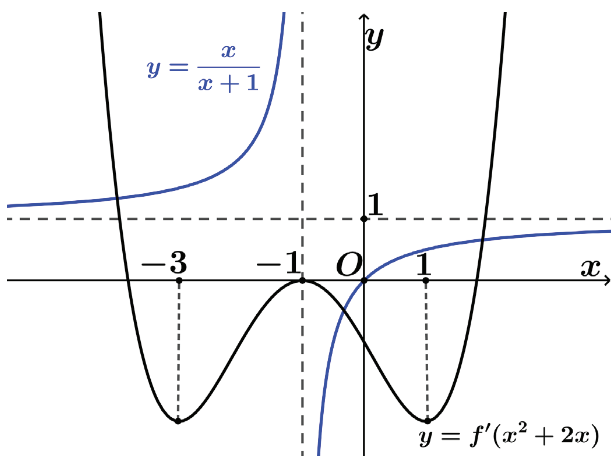
Câu 10 - Chọn B

Xét $g'(x)=(2x+2)f'(x^2+2x)-2x \Rightarrow g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x^2+2x)=\frac{x}{x+1}$.

Đặt $u=x^2+2x$, dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y=f'(x)$, ta vẽ bảng biến thiên của hàm số $y=f'(x^2+2x)$ theo phương pháp ghép trục như sau:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$u=x^2+2x$	$+\infty$	3	-1	3	$+\infty$
$f'(u)$	$+\infty$ ↘	↗	0	↘ ↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên trên, trên cùng hệ trục tọa độ Oxy, ta phác họa hai đồ thị $y=f'(x^2+2x)$ và $y=\frac{x}{x+1}$ như sau:



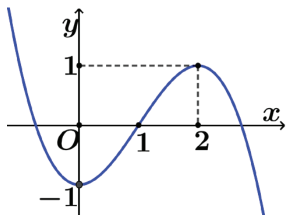
Từ đó, phương trình $g'(x)=0$ có đúng 3 nghiệm (đơn hoặc nghiệm bội lẻ), nên hàm số $g(x)$ có đúng 3 điểm cực trị.

10 BÀI TOÁN HAY ĐẶC SẮC ROUND 02

THẦY ĐỖ VĂN ĐỨC | Facebook: fb.com/thayductoan

PHẦN ĐỀ BÀI

Câu 1. Cho hàm số $f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ.



Xét hàm số $g\left(x\right)=\dfrac{b}{4}x^4+\left(a+b\right)x^3+\left(a+d\right)x^2$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $100f\left(\sin x-1\right)+100g\left(\sin x-1\right)=m$ có đúng 6 nghiệm trên đoạn $\left[0;3\pi\right]$?

A. 12. **B.** 13. **C.** 14. **D.** 15.

Câu 2. Cho hàm số đa thức bậc ba $y=f\left(x\right)$, hàm số $y=f\left(1-2x\right)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f\left(1-2x\right)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số $y=f\left(e^{f(x)}+m\right)$ có tối đa bao nhiêu điểm cực trị?

A. 5. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 8.

Câu 3. Cho hàm số $f\left(x\right)=\left(x^2-4\right)\left(x^2-4x\right)$. Có bao nhiêu số nguyên $m\in\left[-20;20\right]$ để phương trình $f\left(x^2+100x\right)=m$ có đúng 4 nghiệm?

A. 9. **B.** 10. **C.** 11. **D.** 12.

Câu 4. Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-5	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Có bao nhiêu giá trị của tham số m để phương trình $\dfrac{1}{f\left(x\right)-4}+\dfrac{1}{f\left(x\right)+6}=m$ có 3 nghiệm thực phân biệt

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 5. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in [-20;20]$ để phương trình $f(x)+\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{m}{3}$ có 4 nghiệm thực phân biệt?

A. 21. **B.** 25. **C.** 22. **D.** 24.

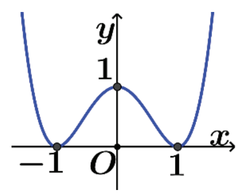
Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	-3	$\nearrow$	1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	3

Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $4^{f^2(x)-m}+3^{f^2(x)-m}-5f^2(x)+5m-2=0$ có nhiều hơn 6 nghiệm là

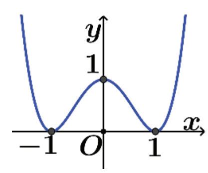
A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 7. Cho hàm số đa thức bậc năm $f(x)$ thỏa mãn $f(0)=0$. Hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g(x)=\left|f(\cos x)+\dfrac{1}{3}\cos^3 x+\sin^2 x\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị trên khoảng $\left(0;\dfrac{5\pi}{2}\right)$?



A. 7. **B.** 10. **C.** 13. **D.** 9.

Câu 8. Cho hàm số đa thức bậc năm $f(x)$ thỏa mãn $f(0)=0$. Hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g(x)=\left|f(\cos x)-\dfrac{1}{3}\cos^3 x-\dfrac{1}{2}\cos^2 x\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị trên khoảng $(0;3\pi)$?



A. 12. **B.** 15. **C.** 13. **D.** 11.

Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $g(x)=f(x^3-3x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$ là

A. 1. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 10. Cho phương trình $3^{x^2-2x+2}-36=(m-18).3^{2x-x^2}$. Có bao nhiêu số nguyên $m\in[-20;20]$ để phương trình đã cho có đúng 2 nghiệm?

A. 13. **B.** 14. **C.** 15. **D.** 16.

PHẦN ĐÁP ÁN CHI TIẾT

Câu 1 - Chọn A

Dễ thấy $f(x)=-\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2-1$. Do đó $a=-\frac{1}{2}; b=\frac{3}{2}; c=0; d=-1$.

Vậy $g(x)=\frac{3}{8}x^4+x^3-\frac{3}{2}x^2$. Xét hàm số $h(x)=f(x)+g(x)=\frac{3}{8}x^4+\frac{1}{2}x^3-1$.

Ta có $h'(x)=\frac{3}{8}.4x^3+\frac{1}{2}.3x^2=\frac{3}{2}x^2(x+1)$, do đó $h'(x)$ chỉ đổi dấu qua $x=-1$.

Từ đó ta có bảng biến thiên của hàm số $y=h(\sin x-1)$ theo phương pháp ghép trục như sau:

x	0	$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{2}$	3π
$u=\sin x-1$	-1	0	-1	-2	-1	0	-1
$h(u)$	$-\frac{9}{8}$	-1	$-\frac{9}{8}$	1	$-\frac{9}{8}$	-1	$-\frac{9}{8}$

Từ đó, phương trình $100h(\sin x-1)=m$ có đúng 6 nghiệm khi và chỉ khi $-\frac{9}{8}<\frac{m}{100}<-1$

$\Leftrightarrow -112,5<m<-100$. Mà $m\in\mathbb{Z}$, nên có đúng 12 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 2 - Chọn B

Bước 1: Truy ngược hàm $f(x)$: Ta có bảng biến thiên $f(1-2x)$ theo phương pháp ghép trục:

x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$u=1-2x$	$+\infty$	3	0	$-\infty$
$f(u)$	$+\infty$	-1	1	$-\infty$

Từ bảng biến thiên trên, dựa vào mối quan hệ u và $f(u)$, ta có bảng biến thiên của hàm $f(x)$:

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$
$f(u)$	$-\infty$	1	-1	$+\infty$

Bước 2: Ta có bảng biến thiên của hàm số $f\left(e^{f(x)}+m\right)$ theo phương pháp ghép trục:

$$x \to f(x) \to e^{f(x)} \to e^{f(x)} + m \to f\left(e^{f(x)} + m\right)$$

x	$-\infty$		0		3			$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$		1		-1			$+\infty$
$e^{f(x)}$	$(0$		e		e^{-1}			$+\infty$
$e^{f(x)}+m$	$(m$	0	$m+e$	0	$m+\frac{1}{e}$	0	3	$+\infty$
$f\left(e^{f(x)}+m\right)$				Tối đa 6 điểm cực trị				

Chú ý rằng trong khoảng $(m;m+e)$, chỉ có thể chưa điểm 0 hoặc 3, và trong khoảng $\left(m+\frac{1}{e};m+e\right)$ cũng vậy, nên hàm số đã cho chỉ có thể có tối đa 6 điểm cực trị.

Câu 3 - Chọn D

Ta có: $f(x) = (x-2)(x+2)x(x-4) = (x^2-2x)(x^2-2x-8) = (x^2-2x)^2 - 8(x^2-2x)$

Đặt $u = x^2 - 2x$, ta xét hàm $g(u) = u^2 - 8u$ thì $f(x) = g(x^2-2x)$. Ta vẽ bảng biến thiên của hàm $f(x)$ theo phương pháp ghép trục:

$$x \to u = x^2 - 2x \to g(u)$$

Xét $x^2 - 2x = 4 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{5}.$

x	$-\infty$	$1-\sqrt{5}$	1	$1+\sqrt{5}$	$+\infty$
u	$+\infty$	4	-1	4	$+\infty$
$f(u)$	$+\infty$ ↘	-16 ↗	9 ↘	-16 ↗	$+\infty$

Xét hàm số $h(x) = f(x^2 + 100x)$, đặt $v(x) = x^2 + 100x$, ta có bảng biến thiên hàm $h(x)$ theo phương pháp ghép trục như sau:

x	$-\infty$				-50				$+\infty$
v	$+\infty$	$1+\sqrt{5}$	1	$1-\sqrt{5}$	-2500	$1-\sqrt{5}$	1	$1+\sqrt{5}$	$+\infty$
$h(x) = f(v)$	$+\infty$ ↘	-16 ↗	9 ↘	-16 ↗	Rất to ↘	-16 ↗	9 ↘	-16 ↗	$+\infty$

Điều kiện: $y = m$ cắt đồ thị tại 4 điểm phân biệt, khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l} m = -16 \\ 9 < m < f(-2500) \end{array}\right.$

Mà $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in [-20;20] \end{cases}$ nên $m \in \{-16\} \cup \{10;11;12;...;20\}$.

Câu 4 - Chọn C

Xét hàm số $g(t)=\dfrac{1}{t-4}+\dfrac{1}{t+6}$. Phương trình đã cho tương đương với $g\left(f(x)\right)=m.$

Hàm số $g(t)$ có tập xác định: $\mathbb{R}\setminus\{-6;4\}$, có v $g'(t)=-\dfrac{1}{(t-4)^2}-\dfrac{1}{(t+6)^2}<0\ \forall t\in D.$

Từ đó ta có bảng biến thiên của hàm số $g(t)$ như sau:

t	$-\infty$		-6		4		$+\infty$
$g'(t)$		$-$	||	$-$	||	$-$	
$g(t)$	0	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	0

Từ đó ta có bảng biến thiên của hàm số $g\left(f(x)\right)$ theo phương pháp ghép trục như sau:

x	$-\infty$		-2	1		$+\infty$
$t=f(x)$	$+\infty$	4	-5	3	-6	$-\infty$
$g(t)$	0 $\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$ $\nearrow$	$8/9$ $\searrow$	$-8/9$ $\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$ $\nearrow$	0

Từ đó, phương trình đã cho có 3 nghiệm khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l} m=-\dfrac{8}{9} \\ m=0 \\ m=\dfrac{8}{9} \end{array}\right.$.

Câu 5 – Chọn D

Xét hàm số $g(t)=t+\dfrac{1}{t}$, phương trình đã cho tương đương với $g\left(f(x)\right)=\dfrac{m}{3}.$

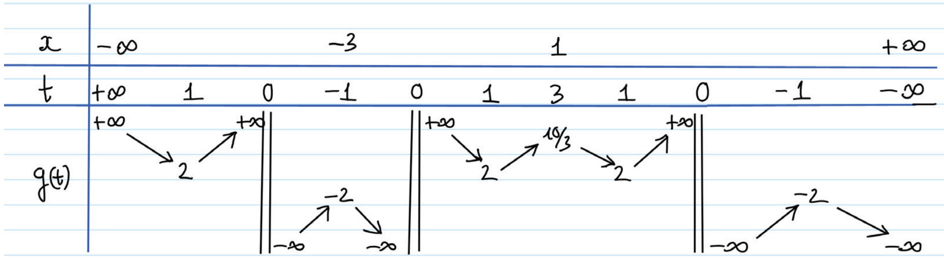
Ta có bảng biến thiên của hàm số $g\left(f(x)\right)$ theo phương pháp ghép trục: $x\to f(x)\to g\left(f(x)\right)$

Xét $g(t)$ có tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}.$

Ta có: $g'(t)=1-\dfrac{1}{t^2}=\dfrac{(t-1)(t+1)}{t^2}$. Từ đó ta có bảng biến thiên của hàm số $g(t)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$g'(t)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
$g(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Thực hiện phương pháp ghép trục, ta có:



Từ đó, phương trình đã cho có 4 nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l}\dfrac{m}{3}<-2\\ \dfrac{m}{3}>\dfrac{10}{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<-6\\ m>10\end{array}\right.$.

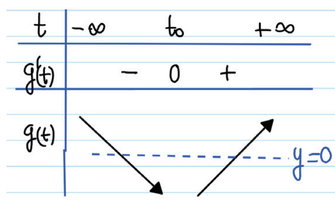
Mà $m\in\mathbb{Z}, m\in[-20;20]$ nên $m\in\{-20;-19;...;-7\}\cup\{11;12;...;20\}$.

Câu 6 - Chọn C

Đặt $t=f^2(x)-m,$ phương trình đã cho tương đương với: $4^t+3^t-5t-2=0\ (i)$.

Xét hàm số $g(t)=4^t+3^t-5t-2,$ ta có $(i)\Leftrightarrow g\left(f^2(x)-m\right)=0.$

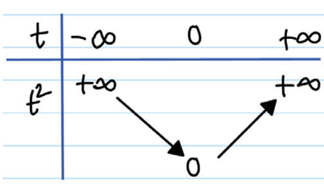
Nhận xét: $g(0)=g(1)=0.$ Ta có $g'(t)=4^t\ln 4+3^t\ln 3-5\to g'(t)=0$ có tối đa 1 nghiệm, nên $g(t)=0$ có tối đa 2 nghiệm, do đó $g(t)=0$ có đúng 2 nghiệm là $t=0$ và $t=1$.

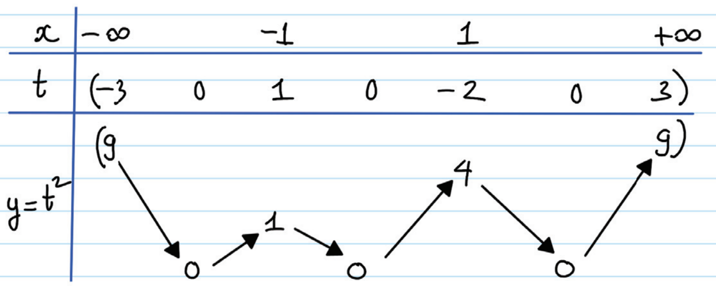


Phương trình đã cho tương đương với: $\left[\begin{array}{l}f^2(x)-m=0\\ f^2(x)-m=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f^2(x)=m\\ f^2(x)-1=m\end{array}\right.$.

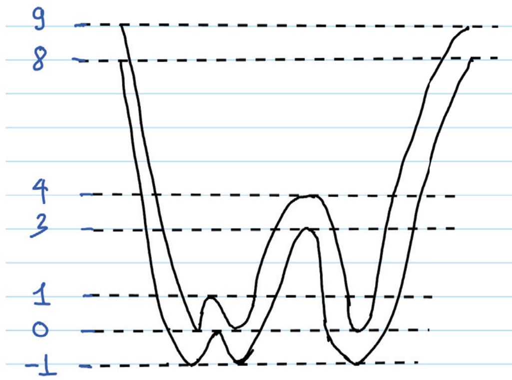
Ta sử dụng phương pháp ghép trục vẽ bảng biến thiên của hàm số $y=f^2(x)$ như sau:

$$x\to t=f(x)\to y=t^2=f^2(x).$$





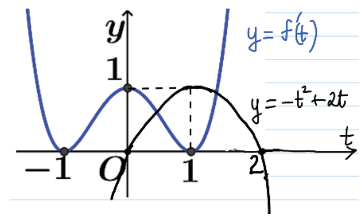
Từ đó ta cùng vẽ hai đồ thị hàm số $y=f^2(x)$ và $y=f^2(x)-1$ trên cùng hệ trục tọa độ, minh họa như sau:



Từ đó, điều kiện cần và đủ để phương trình đã cho có nhiều hơn 6 nghiệm là $0 \le m \le 3$, mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{0;1;2;3\}$.

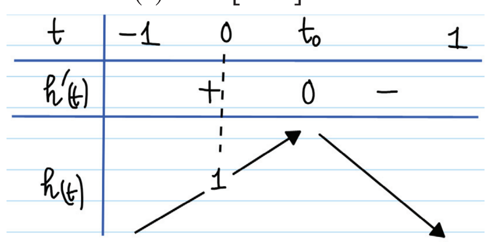
Câu 7 - Chọn A

Đặt $t = \cos x$, xét hàm số $h(t) = f(t) + \frac{1}{3}t^3 - t^2 + t$. Ta có $g(x) = |h(\cos x)|$.

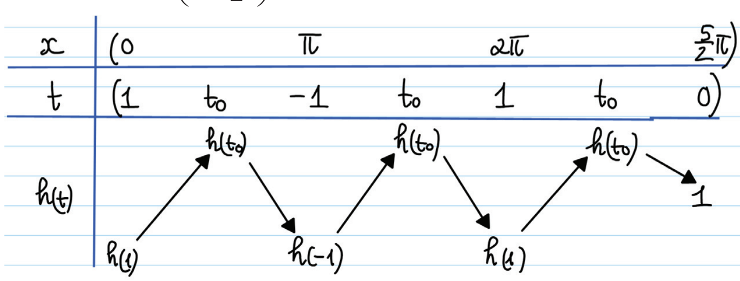


Xét $h'(t) = f'(t) + t^2 - 2t$, ta có $h'(t) = 0 \Leftrightarrow f'(t) = -t^2 + 2t$. Trên cùng hệ trục tọa độ Oty, ta vẽ hai đồ thị hàm số $y = f'(t)$ và $y = -t^2 + 2t$ (hình vẽ).

Từ đó ta có bảng biến thiên của hàm số $h(t)$ trên $[-1;1]$ như sau:



Ta khảo sát hàm số $h(\cos x)$ trên $\left(0;\frac{5\pi}{2}\right)$ bằng phương pháp ghép trục như sau:



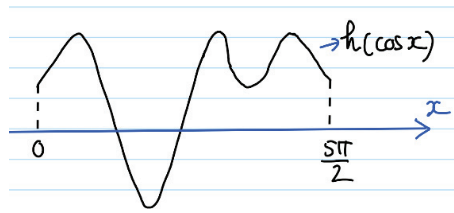
Ta cần xác định dấu của $h(1)$ và $h(-1)$, ta có: $h(1) = f(1) + \frac{1}{3}; h(-1) = f(-1) - \frac{1}{3}$.

Xét $f'(x) = a(x+1)^2(x-1)^2$ và $f(0) = 1$, nên $f'(x) = (x+1)^2(x-1)^2 = (x^2-1)^2 = x^4 - 2x^2 + 1$.

Vậy $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + x + C$, mà $f(0) = 0 \Rightarrow C = 0$.

Do đó $h(1)=f(1)+\frac{1}{3}=\frac{8}{15}+\frac{1}{3}>0;\ h(-1)=-\frac{8}{15}-\frac{1}{3}<0.$

Do đó ta phác họa hình ảnh đồ thị $y=h(\cos x)$ như sau:



Từ đó, số điểm cực trị của hàm số $g(x)=\left|h(\cos x)\right|$ là 7 điểm.

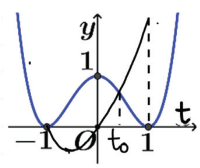
Câu 8 - Chọn D

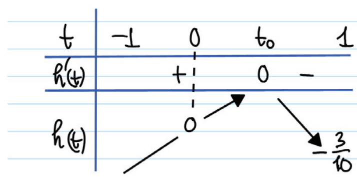
Xét hàm số $h(t)=f(t)-\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2$, có $h'(t)=f'(t)-t^2-t$. Ta có $h'(t)=0\Leftrightarrow f'(t)=t^2+t$.

Ta có: $f'(x)=x^4-2x^2+1\Rightarrow f(1)-f(0)=\int\limits_0^1 f'(x)\mathrm{d}x=\frac{8}{15}$, mà $f(0)=0$ nên

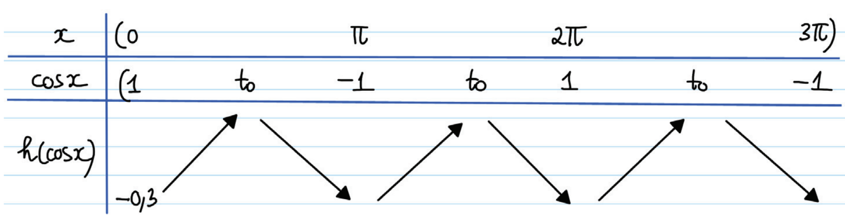
$$f(1)=\frac{8}{15}\to h(1)=-\frac{3}{10}<0.$$

Ta vẽ đồ thị hàm số $y=f'(t)$ và $y=t^2+t$ trên cùng hệ trục tọa độ, từ đó ta vẽ được bảng biến thiên của hàm số $h(t)$ như hình sau:





Từ đó, ta vẽ bảng biến thiên của hàm số $h(\cos x)$ trên $(0;3\pi)$ bằng phương pháp ghép trục:



Từ đó, số điểm cực trị của hàm số $y=\left|h(\cos x)\right|$ là $5+6=11$.

Câu 9 - Chọn A

Ta sử dụng phương pháp ghép trục để vẽ bảng biến thiên hàm số $f(x^3-3x)$ bằng sơ đồ sau:

$$x\to u=x^3-3x\to f(u)=f(x^3-3x).$$

Ta có: $u'=3x^2-3\Rightarrow u'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\end{array}\right.$.

Từ đó ta có:

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
u	$-\infty$		0		2		0		-2		0		$+\infty$
$f(u)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Dựa vào mối quan hệ từ $u \to f(u)$, ta xác định được bảng biến thiên của $u \to f(u)$ như sau:

u	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(u)$		$\searrow$	CT	$\swarrow$	

Do đó hàm số $f(x)$ có đúng 1 điểm cực trị.

Câu 10 - Chọn B

Đặt $t = 3^{x^2-2x}$, phương trình tương đương: $9t - 36 = (m-18).\dfrac{1}{t} \Leftrightarrow 9t^2 - 36t = m - 18 \Leftrightarrow t^2 - 4t = \dfrac{m}{9} - 2.$

Xét hàm số $g(t) = t^2 - 4t$, phương trình đã cho tương đương với: $g\left(3^{x^2-2x}\right) = \dfrac{m}{9} - 2$, nên ta sử dụng phương pháp ghép trục để vẽ bảng biến thiên của hàm số $g\left(3^{x^2-2x}\right)$ bằng sơ đồ:

$$x \to t = 3^{x^2-2x} \to g(t).$$

Ta xét: $t' = 3^{x^2-2x}.\ln 3.(2x-2)$, ta có bảng biến thiên hàm $t(x)$ khi $x \in \mathbb{R}$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
t'		$-$	0	$+$	
t	$+\infty$	$\searrow$	$\dfrac{1}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

Ta có: $g'(t) = 2t - 4$, nên ta có bảng biến thiên của hàm số $g(t)$ khi $t \in \mathbb{R}$ như sau:

t	$-\infty$	$\dfrac{1}{3}$		2		$+\infty$
$g'(t)$			$-$	0	$+$	
$g(t)$	$+\infty$		$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Từ đó, ta có bảng biến thiên hàm số $g\left(3^{x^2-2x}\right)$ khi $x \in \mathbb{R}$ bằng ghép trục:

x	$-\infty$				1				$+\infty$
t	$+\infty$		2		$\dfrac{1}{3}$		2		$+\infty$
$g(t)$	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$-\dfrac{11}{9}$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Điều kiện: $\left[\begin{array}{l} \dfrac{m}{9} - 2 = -4 \\ \dfrac{m}{9} - 2 > -\dfrac{11}{9} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{m}{9} = -2 \\ m - 18 > -11 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -18 \\ m > 7 \end{array}\right.$.

Vậy $m \in \{-18;8;9;10;...;20\}$ nên có 14 giá trị nguyên của m thỏa mãn.