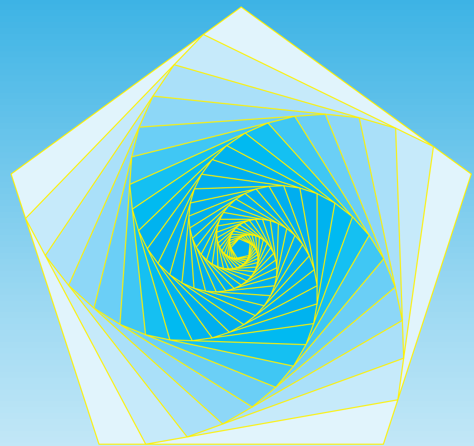
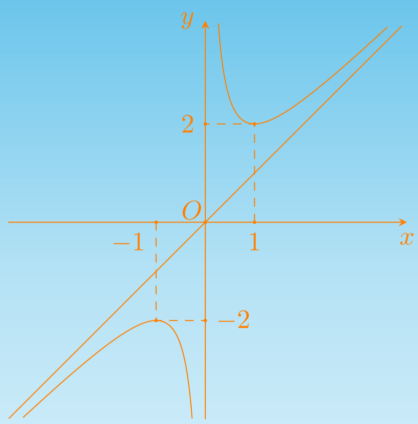
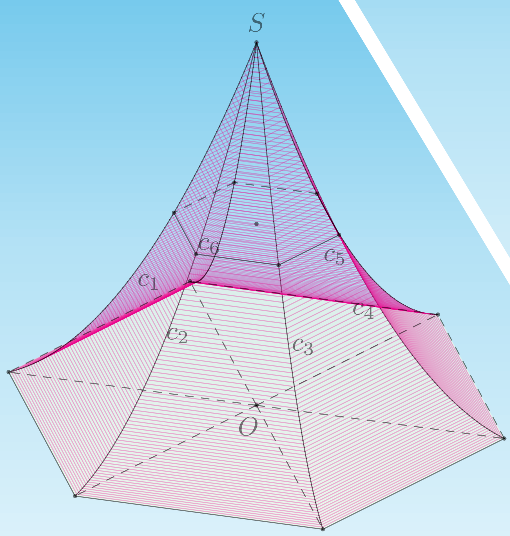
VIET NAM MATHS & LATEX







LaTeX hoá sách

ÔN THI TỐT NGHIỆP TRUNG HỌC PHỔ THÔNG

Môn Toán

THEO CHƯƠNG TRÌNH GIÁO DỤC PHỔ THÔNG 2018

Mục lục

I ÔN TẬP THEO CHỦ ĐỀ **1**

1 PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH . . . 3
A KIẾN THỨC CẦN NHỚ . . . 3
B MỘT SỐ VÍ DỤ . . . 5
C BÀI TẬP TỰ LUYỆN . . . 10
2 CẤP SỐ CỘNG CẤP SỐ NHÂN . . . 28
A KIẾN THỨC CẦN NHỚ . . . 28
B MỘT SỐ VÍ DỤ . . . 29
C BÀI TẬP TỰ LUYỆN . . . 32
3 ĐẠO HÀM VÀ KHẢO SÁT HÀM SỐ . . . 44
A KIẾN THỨC CẦN NHỚ . . . 44
B MỘT SỐ VÍ DỤ . . . 48
C BÀI TẬP TỰ LUYỆN . . . 51
4 NGUYÊN HÀM VÀ TÍCH PHÂN . . . 67
A KIẾN THỨC CẦN NHỚ . . . 67
B MỘT SỐ VÍ DỤ . . . 69
C BÀI TẬP TỰ LUYỆN . . . 74
5 HÌNH HỌC KHÔNG GIAN . . . 87
A KIẾN THỨC CẦN NHỚ . . . 87
B MỘT SỐ VÍ DỤ . . . 90
C BÀI TẬP TỰ LUYỆN . . . 93
6 VECTƠ VÀ PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN . . . 105
A KIẾN THỨC CẦN NHỚ . . . 105
B MỘT SỐ VÍ DỤ . . . 109
C BÀI TẬP TỰ LUYỆN . . . 112
7 MỘT SỐ YẾU TỐ THỐNG KÊ . . . 127
A KIẾN THỨC CẦN NHỚ . . . 127
B MỘT SỐ VÍ DỤ . . . 130
C BÀI TẬP TỰ LUYỆN . . . 135
8 MỘT SỐ YẾU TỐ XÁC SUẤT . . . 142

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ . . . 142
B MỘT SỐ VÍ DỤ . . . 144
C BÀI TẬP TỰ LUYỆN . . . 152

II MỘT SỐ ĐỀ MINH HỌA 169

Đề số 001 . . . 171
Đề số 002 . . . 183
Đề số 003 . . . 195
Đề số 004 . . . 206
Đề số 005 . . . 217
Đề số 006 . . . 228

Phần I

ÔN TẬP THEO CHỦ ĐỀ

CHỦ ĐỀ 1. PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. PHƯƠNG TRÌNH LƯƠNG GIÁC

1. Phương trình lượng giác cơ bản

a) *Phương trình* $\sin x = m \quad (1)$

- Với $|m| > 1$, phương trình (1) vô nghiệm.
- Với $|m| \leq 1$, gọi α là số thực thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ sao cho $\sin x = m$.

Khi đó, ta có $\sin x = m \Leftrightarrow \sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Chú ý:

- Ta có một số trường hợp đặc biệt của phương trình $\sin x = m$ sau:
  - $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \; (k \in \mathbb{Z})$;
  - $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \; (k \in \mathbb{Z})$;
  - $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi (k \in \mathbb{Z})$.
- Nếu x là góc lượng giác có đơn vị đo là độ thì ta có thể tìm góc lượng giác x sao cho $\sin x = \sin a^\circ$ như sau

$$\sin x = \sin a^\circ \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a^\circ + k360^\circ \\ x = 180^\circ - a^\circ + k360^\circ \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

b) *Phương trình* $\cos x = m \quad (2)$

- Với $|m| > 1$, phương trình (2) vô nghiệm.
- Với $|m| \leq 1$, gọi α là số thực thuộc đoạn $[0; \pi]$ sao cho $\cos \alpha = m$.

Khi đó, ta có $\cos x = m \Leftrightarrow \cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Chú ý:

- Ta có một số trường hợp đặc biệt của phương trình $\cos x = m$ sau:
  - $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi \; (k \in \mathbb{Z})$;
  - $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi \; (k \in \mathbb{Z})$;
  - $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \; (k \in \mathbb{Z})$.

- Nếu x là góc lượng giác có đơn vị đo là độ thì ta có thể tìm góc lượng giác x sao cho $\cos x = \cos a^\circ$ như sau

$$\cos x = \cos a^\circ \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a^\circ + k360^\circ \\ x = -a^\circ + k360^\circ \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$$

c) *Phương trình* $\tan x = m$

Gọi α là số thực thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ sao cho $\tan \alpha = m$. Khi đó, ta có

$$\tan x = m \Leftrightarrow \tan x = \tan \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi \, (k \in \mathbb{Z}).$$

Chú ý: Nếu x là góc lượng giác có đơn vị đo là độ thì ta có thể tìm góc lượng giác x sao cho $\tan x = \tan a^\circ$ như sau

$$\tan x = \tan a^\circ \Leftrightarrow x = a^\circ + k180^\circ \, (k \in \mathbb{Z}).$$

d) *Phương trình* $\cot x = m$

Gọi α là số thực thuộc khoảng $(0; \pi)$ sao cho $\cot \alpha = m$. Khi đó, ta có

$$\cot x = m \Leftrightarrow \cot x = \cot \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi \, (k \in \mathbb{Z}).$$

Chú ý: Nếu x là góc lượng giác có đơn vị đo là độ thì ta có thể tìm góc lượng giác x sao cho $\cot x = \cot a^\circ$ như sau

$$\cot x = \cot a^\circ \Leftrightarrow x = a^\circ + k180^\circ \, (k \in \mathbb{Z}).$$

2. Phương trình lượng giác đưa về dạng cơ bản

- $\sin f(x) = \sin g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) + k2\pi \\ f(x) = \pi - g(x) + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$
- $\cos f(x) = \cos g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) + k2\pi \\ f(x) = -g(x) + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$
- Với phương trình $\sin^2 u(x) = \sin^2 v(x)$, $\cos^2 u(x) = \cos^2 v(x)$, $\sin^2 u(x) = \cos^2 v(x)$, ta có thể dùng công thức hạ bậc để đưa về phương trình dạng $\cos f(x) = \cos g(x)$.
- Với một phương trình lượng giác, ta có thể dùng các công thức lượng giác và các biến đổi để đưa về phương trình dạng tích $A(x) \cdot B(x) = 0$.

II. PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LÔGARIT

1. Phương trình mũ

Với $a > 0$, $a \neq 1$ thì

- $a^{f(x)} = b \Leftrightarrow f(x) = \log_a b$ với $b > 0$.
- $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$.

2. Phương trình lôgarit

Với $a > 0$, $a \neq 1$ thì

- $\log_a f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = a^b$.
- $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \text{ hoặc } g(x) > 0. \end{cases}$

3. Bất phương trình mũ

Với $a > 0$, $a \neq 1$ thì

a) *Xét bất phương trình* $a^{f(x)} > b$.

- Nếu $b \leq 0$, tập nghiệm của bất phương trình là tập xác định của $f(x)$.
- Nếu $b > 0$, $a > 1$ thì bất phương trình đưa về $f(x) > \log_a b$.
- Nếu $b > 0$, $0 < a < 1$ thì bất phương trình đưa về $f(x) < \log_a b$.

b) *Xét bất phương trình* $a^{f(x)} > a^{g(x)}$.

- Nếu $a > 1$ thì bất phương trình đưa về $f(x) > g(x)$.
- Nếu $0 < a < 1$ thì bất phương trình đưa về $f(x) < g(x)$.

Các bất phương trình mũ khác cùng loại được giải tương tự.

4. Bất phương trình lôgarit

Với $a > 0$, $a \neq 1$ thì

a) *Xét bất phương trình* $\log_a f(x) > b$.

- Nếu $a > 1$ thì bất phương trình đưa về $f(x) > a^b$.
- Nếu $0 < a < 1$ thì bất phương trình đưa về $0 < f(x) < a^b$.

b) *Xét bất phương trình* $\log_a f(x) > \log_a g(x)$.

- Nếu $a > 1$ thì bất phương trình đưa về $f(x) > g(x) > 0$.
- Nếu $0 < a < 1$ thì bất phương trình đưa về $0 < f(x) < g(x)$.

Các bất phương trình lôgarit khác cùng loại được giải tương tự.

B. MỘT SỐ VÍ DỤ

Dạng I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ lựa chọn một phương án.

Ví dụ 1. Nghiệm của phương trình $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ là

A. $x=-\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi$ và $x=\pi+k2\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$.

B. $x=-\dfrac{\pi}{3}+k2\pi$ và $x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$.

C. $x=k2\pi$ và $x=\pi+k2\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$.

D. $x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi$ và $x=\dfrac{5\pi}{3}+k2\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
&\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}\\
\Leftrightarrow\ &\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l} x+\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\\ x+\dfrac{\pi}{3}=\pi-\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+k2\pi\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi\\ x=\pi+k2\pi\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

Chọn đáp án A .... □

Ví dụ 2. Tổng các nghiệm của phương trình $3^{x^2-2x}=81$ là

A. 4. **B.** -4. **C.** -2. **D.** 2.

Lời giải.

Ta có $3^{x^2-2x}=81\Leftrightarrow 3^{x^2-2x}=3^4\Leftrightarrow x^2-2x-4=0$.

Phương trình $x^2-2x-4=0$ có hệ số a, c trái dấu nên phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Theo định lí Viète, suy ra tổng hai nghiệm bằng 2.

Chọn đáp án D .... □

Ví dụ 3. Nghiệm của phương trình $\log_{16}(x+5)=\dfrac{1}{2}$ là

A. 3. **B.** -1. **C.** -3. **D.** 27.

Lời giải.

Ta có $x+5=16^{\frac{1}{2}}\Leftrightarrow x+5=4\Leftrightarrow x=-1$.

Chọn đáp án B .... □

Ví dụ 4. Số nghiệm của phương trình $\log_2(x-4)=\log_2(x^2-5x+4)$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải.

Điều kiện xác định của phương trình $\begin{cases} x-4>0\\ x^2-5x+4>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x>4\\ \left[\begin{array}{l} x<1\\ x>4\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x>4.$

Ta có

$$\log_2(x-4)=\log_2(x^2-5x+4)\Leftrightarrow x-4=x^2-5x+4\Leftrightarrow x^2-6x+8=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=2\\ x=4.\end{array}\right.$$

So sánh với điều kiện ta thấy không có nghiệm nào thỏa mãn.

Suy ra phương trình vô nghiệm.

Vậy số nghiệm của phương trình là 0.

Chọn đáp án C .... □

Dạng II. Câu trắc nghiệm đúng sai

Trong mỗi ý **a)**, **b)**, **c)**, **d)** *ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.*

Ví dụ 5. Cho phương trình $\sin^2\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos^2\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$.

a) Hạ bậc hai vế ta được phương trình $\dfrac{1+\cos\left(4x+\dfrac{\pi}{2}\right)}{2}=\dfrac{1-\cos\left(2x+\pi\right)}{2}$.

$\boxed{\text{b}}$ Ta có $\cos\left(2x+\pi\right)=-\cos 2x$.

$\boxed{\text{c}}$ Phương trình đã cho đưa về dạng $\cos\left(4x+\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos 2x$.

d) Nghiệm của phương trình đã cho là $x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi$ và $x=\dfrac{\pi}{12}+k\dfrac{\pi}{3}$ $(k\in\mathbb{Z})$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
&\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\\
\Leftrightarrow\ &\frac{1-\cos\left(4x+\frac{\pi}{2}\right)}{2}=\frac{1+\cos\left(2x+\pi\right)}{2}\\
\Leftrightarrow\ &-\cos\left(4x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(2x+\pi\right)\\
\Leftrightarrow\ &-\cos\left(4x+\frac{\pi}{2}\right)=-\cos 2x\\
\Leftrightarrow\ &\cos\left(4x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos 2x\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{aligned}&4x+\frac{\pi}{2}=2x+k2\pi\\&4x+\frac{\pi}{2}=-2x+k2\pi\end{aligned}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{aligned}&x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\\&x=-\frac{\pi}{12}+k\frac{\pi}{3}\end{aligned}\right.\quad(k\in\mathbb{Z})\,.
\end{aligned}$$

a) **Sai**.

Hạ bậc phương trình, ta được

$$\frac{1-\cos\left(4x+\frac{\pi}{2}\right)}{2}=\frac{1+\cos\left(2x+\pi\right)}{2}.$$

b) **Đúng**.

Ta có $\cos(2x+\pi)=-\cos(-2x)=-\cos 2x$.

c) **Đúng**.

Sau khi hạ bậc và rút gọn, phương trình đã cho đưa về dạng $\cos\left(4x+\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos 2x$.

d) **Sai**.

Nghiệm của phương trình đã cho là $x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi$ và $x=-\dfrac{\pi}{12}+k\dfrac{\pi}{3}$ $(k\in\mathbb{Z})$.

Chọn đáp án | a sai | b đúng | c đúng | d sai | .... □

Ví dụ 6. Cho bất phương trình $(3-2\sqrt{2})^{x^2-4x} > (3+2\sqrt{2})^{5-2x}$.

a Ta có $3+2\sqrt{2} = (3-2\sqrt{2})^{-1}$.

b) Bất phương trình đã cho tương đương với bất phương trình $x^2-4x > 2x-5$.

c) Số nghiệm nguyên của bất phương trình là 5.

d Tổng các nghiệm nguyên của bất phương trình là 9.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & \left(3-2\sqrt{2}\right)^{x^2-4x} > \left(3+2\sqrt{2}\right)^{5-2x} \\ \Leftrightarrow\ & \left(3+2\sqrt{2}\right)^{-\left(x^2-4x\right)} > \left(3+2\sqrt{2}\right)^{5-2x} \\ \Leftrightarrow\ & -\left(x^2-4x\right) > 5-2x \\ \Leftrightarrow\ & x^2-4x < 2x-5 \\ \Leftrightarrow\ & x^2-6x+5<0 \Leftrightarrow 1<x<5. \end{aligned}$$

Các nghiệm nguyên của bất phương trình là $\{2;3;4\}$.

Tổng các nghiệm nguyên là $2+3+4=9$.

a) **Đúng**.

Vì $\left(3+2\sqrt{2}\right)\cdot\left(3+2\sqrt{2}\right) = 3^2-\left(2\sqrt{2}\right)^2 = 1$ nên $3+2\sqrt{2} = \left(3-2\sqrt{2}\right)^{-1}$.

b) **Sai**.

Bất phương trình đã cho tương đương với bất phương trình $x^2-4x<2x-5$.

c) **Sai**.

Phương trình đã cho có tập nghiệm $S=(1;5)$ nên số nghiệm nguyên là 3.

d) **Đúng**.

Tổng các nghiệm nguyên của phương trình là $2+3+4=9$.

Chọn đáp án | a đúng | b sai | c sai | d đúng | .... □

Ví dụ 7. Cho bất phương trình $\log_{\sqrt{2}-1}\left(2x^2-2\right) \geq \log_{\sqrt{2}-1}(5x+5)$.

a Ta có $0<\sqrt{2}-1<1$.

b) Bất phương trình đã cho tương đương với bất phương trình $\begin{cases} 2x^2-2 \leq 5x+5 \\ 5x+5>0. \end{cases}$

c Số nghiệm nguyên của bất phương trình là 2.

d) Nghiệm nguyên nhỏ nhất của bất phương trình là 0.

Lời giải.

Ta có

$$\log_{\sqrt{2}-1}\left(2x^2-2\right) \geq \log_{\sqrt{2}-1}(5x+5)$$

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 2 \le 5x + 5 \\ 2x^2 - 2 > 0 \end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 5x - 7 \le 0 \\ 2x^2 - 2 > 0 \end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le x \le \dfrac{7}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x < -1 \\ x > 1 \end{array}\right. \end{cases}\\
&\Leftrightarrow\ 1 < x \le \dfrac{7}{2}.
\end{aligned}
$$

Suy ra tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(1; \dfrac{7}{2}\right]$.

a) **Đúng**.

Vì $1 < \sqrt{2} < 2$ nên $0 < \sqrt{2} - 1 < 1$.

b) **Sai**.

Ta có $\begin{cases} 2x^2 - 2 \le 5x + 5 \\ 5x + 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 5x - 7 \le 0 \\ x + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x \le \dfrac{7}{2}$.

c) **Đúng**.

Phương trình có đúng 2 nghiệm nguyên là $x = 2$ và $x = 3$.

d) **Sai**.

Nghiệm nguyên nhỏ nhất của bất phương trình là $x = 2$.

Chọn đáp án | a đúng | b sai | c đúng | d sai | .... □

Dạng III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Ví dụ 8. Hằng ngày mực nước tại một cảng biển lên xuống theo thuỷ triều. Độ sâu h (m) của mực nước theo thời gian t (giờ) trong một ngày được cho bởi công thức $h = 16 + 7\sin\left(\dfrac{\pi}{12}t\right)$ với $0 \le t \le 24$. Tìm thời điểm mà mực nước tại cảng là cao nhất. Đáp án: 6

Lời giải.

Ta có

$$
\begin{aligned}
&-1 \le \sin\left(\frac{\pi}{12}t\right) \le 1\\
\Leftrightarrow\ & 16 - 7 \le 16 + 7\sin\left(\frac{\pi}{12}t\right) \le 16 + 7\\
\Leftrightarrow\ & 9 \le h \le 23.
\end{aligned}
$$

Vậy mực nước tại cảng cao nhất bằng 23 m khi

$$
\begin{aligned}
&\sin\left(\frac{\pi}{12}t\right) = 1\\
\Leftrightarrow\ & \frac{\pi}{12}t = \frac{\pi}{2} + 2k\pi
\end{aligned}
$$

$$\Leftrightarrow \quad t = 6 + 24k \;\; (k \in \mathbb{Z}).$$

Vì $0 \le t \le 24$ nên $t = 6$.

Vậy thời điểm mà mực nước tại cảng cao nhất là lúc 6 (giờ).

Ví dụ 9. Công thức Định luật làm mát của Newton được cho như sau: $kt = \ln \dfrac{T-S}{T_0 - S}$ trong đó t là số giờ trôi qua, T_0 là nhiệt độ lúc đầu, T là nhiệt độ sau t giờ, S là nhiệt độ môi trường (T_0, T, S theo cùng một đơn vị đo), k là một hằng số. Một cốc trà có nhiệt độ 96°C, sau 2 phút nhiệt độ giảm còn 90°C. Biết nhiệt độ phòng là 24°C. Tính nhiệt độ của cốc trà sau 10 phút (làm tròn kết quả đến hàng phần mười). Đáp án: 70,6

Lời giải.

Thay $t = 2\ \text{(phút)} = \dfrac{1}{30}\ \text{(giờ)}$, $T = 90$, $T_0 = 96$, $S = 24$ ta có $\dfrac{1}{30}k = \ln \dfrac{90-24}{96-24}$.

Do đó $k = 30 \ln \dfrac{11}{12}$.

Sau $t = 10\ \text{(phút)} = \dfrac{1}{6}\ \text{(giờ)}$.

Ta có $\dfrac{1}{6} \cdot 30 \ln \dfrac{11}{12} = \ln \dfrac{T-24}{96-24} \Leftrightarrow 5 \ln \dfrac{11}{12} = \ln \dfrac{T-24}{72}$.

Suy ra $\dfrac{T-24}{72} = \left(\dfrac{11}{12}\right)^5 \Leftrightarrow T = 72\left(\dfrac{11}{12}\right)^5 + 24 \approx 70{,}6$.

Vậy nhiệt độ của cốc trà sau 10 phút là khoảng 70,6°C.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Dạng I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ lựa chọn một phương án.

Câu 1. Các nghiệm của phương trình $\sin\left(\dfrac{\pi}{5} - x\right) = 0$ là

A. $x = -\dfrac{\pi}{5} + k\pi \;\; (k \in \mathbb{Z})$.
B. $x = \dfrac{2\pi}{5} + k\pi \;\; (k \in \mathbb{Z})$.
C. $x = -\dfrac{\pi}{5} + k2\pi \;\; (k \in \mathbb{Z})$.
D. $x = \dfrac{\pi}{5} + k\pi \;\; (k \in \mathbb{Z})$.

Lời giải.

Ta có $\sin\left(\dfrac{\pi}{5} - x\right) = 0 \Leftrightarrow \sin\left(x - \dfrac{\pi}{5}\right) = 0 \Leftrightarrow x - \dfrac{\pi}{5} = k\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{5} + k\pi,\ (k \in \mathbb{Z})$.

Chọn đáp án D .... □

Câu 2. Các nghiệm của phương trình $2\sin 3x + \sqrt{2} = 0$ là

A. $x = \dfrac{\pi}{12} + k\dfrac{2\pi}{3}$ và $x = \dfrac{3\pi}{12} + k\dfrac{2\pi}{3}\ (k \in \mathbb{Z})$.
B. $x = -\dfrac{\pi}{12} + k\dfrac{2\pi}{3}$ và $x = \dfrac{5\pi}{12} + k\dfrac{2\pi}{3}\ (k \in \mathbb{Z})$.
C. $x = \dfrac{\pi}{12} + k\dfrac{2\pi}{3}$ và $x = -\dfrac{\pi}{12} + k\dfrac{2\pi}{3}\ (k \in \mathbb{Z})$.
D. $x = -\dfrac{\pi}{12} + k\dfrac{2\pi}{3}$ và $x = \dfrac{3\pi}{12} + k\dfrac{2\pi}{3}\ (k \in \mathbb{Z})$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
& 2\sin 3x + \sqrt{2} = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \sin 3x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\
\Leftrightarrow\ & \sin 3x = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{aligned} & 3x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \\ & 3x = \pi + \frac{\pi}{4} + k2\pi \end{aligned}\right.
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{12}+k\dfrac{2\pi}{3} \\ x=\dfrac{5\pi}{12}+k\dfrac{2\pi}{3} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$$

Chọn đáp án B .... □

Câu 3. Các nghiệm của phương trình $\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}$ là

A. $x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi$ và $x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.
B. $x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi$ và $x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.
C. $x=k2\pi$ và $x=-\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.
D. $x=\dfrac{\pi}{6}+k\pi$ và $x=-\dfrac{\pi}{2}+k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & \cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2} \\ \Leftrightarrow\ & \cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=\cos\dfrac{\pi}{3} \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi \\ x+\dfrac{\pi}{6}=-\dfrac{\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi \\ x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Chọn đáp án A .... □

Câu 4. Các nghiệm của phương trình $\sin^2 2x=1$ là

A. $x=\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2}\ (k \in \mathbb{Z})$.
B. $x=k\dfrac{\pi}{2}\ (k \in \mathbb{Z})$.
C. $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.
D. $x=\dfrac{\pi}{8}+k\dfrac{\pi}{2}\ (k \in \mathbb{Z})$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & \sin^2 2x=1 \\ \Leftrightarrow\ & \cos^2 2x=0 \\ \Leftrightarrow\ & \cos 2x=0 \\ \Leftrightarrow\ & 2x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi \\ \Leftrightarrow\ & x=\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2}\ (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Chọn đáp án A .... □

Câu 5. Các nghiệm của phương trình $\tan\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$ là

A. $x=\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.
B. $x=k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.
C. $x=\dfrac{2\pi}{3}+k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.
D. $x=-\dfrac{2\pi}{3}+k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & \tan\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3} \\ \Leftrightarrow\ & \tan\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\tan\frac{\pi}{3} \\ \Leftrightarrow\ & x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}+k\pi \\ \Leftrightarrow\ & x=\frac{2\pi}{3}+k\pi\,(k\in\mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Chọn đáp án C .... □

Câu 6. Các nghiệm của phương trình $\cot\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=-1$ là

A. $x=\frac{\pi}{6}+k\pi\,(k\in\mathbb{Z})$.
B. $x=-\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{3}\,(k\in\mathbb{Z})$.
C. $x=-\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{6}\,(k\in\mathbb{Z})$.
D. $x=\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{2}\,(k\in\mathbb{Z})$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & \cot\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=-1 \\ \Leftrightarrow\ & \cot\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=\cot\left(-\frac{\pi}{4}\right) \\ \Leftrightarrow\ & 3x+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}+k\pi \\ \Leftrightarrow\ & x=-\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{3}\,(k\in\mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Chọn đáp án B .... □

Câu 7. Các nghiệm của phương trình $\sin x+\sqrt{3}\cos x=0$ là

A. $x=-\frac{\pi}{6}+k\pi\,(k\in\mathbb{Z})$.
B. $x=\frac{\pi}{3}+k\pi\,(k\in\mathbb{Z})$.
C. $x=\frac{\pi}{6}+k\pi\,(k\in\mathbb{Z})$.
D. $x=-\frac{\pi}{3}+k\pi\,(k\in\mathbb{Z})$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & \sin x+\sqrt{3}\cos x=0 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=0 \\ \Leftrightarrow\ & \sin x\cos\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{3}\cos x=0 \\ \Leftrightarrow\ & \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=0 \\ \Leftrightarrow\ & x+\frac{\pi}{3}=k\pi \\ \Leftrightarrow\ & x=-\frac{\pi}{3}+k\pi\,(k\in\mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Chọn đáp án D .... □

Câu 8. Các góc lượng giác x sao cho $\cos(x-15^\circ)=-\frac{1}{2}$ là

A. $x=165^\circ+k360^\circ$ và $x=-135^\circ+k360^\circ\,(k\in\mathbb{Z})$.

B. $x=165^\circ+k180^\circ$ và $x=-135^\circ+k180^\circ\,(k\in\mathbb{Z})$.

C. $x = 135^\circ + k360^\circ$ và $x = -105^\circ + k360^\circ$ $(k \in \mathbb{Z})$.

D. $x = 135^\circ + k180^\circ$ và $x = -105^\circ + k180^\circ$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & \cos(x - 15^\circ) = -\frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow\ & \cos(x - 15^\circ) = \cos 120^\circ \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{aligned} & x - 15^\circ = 120^\circ + k360^\circ \\ & x - 15^\circ = -120^\circ + k360^\circ \end{aligned}\right. \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{aligned} & x = 135^\circ + k360^\circ \\ & x = -105^\circ + k360^\circ \end{aligned}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Chọn đáp án C .... □

Câu 9. Các góc lượng giác x sao cho $\tan(2x + 27^\circ) = \tan 35^\circ$ là

A. $x = 4^\circ + k180^\circ$ $(k \in \mathbb{Z})$.

B. $x = -4^\circ + k180^\circ$ $(k \in \mathbb{Z})$.

C. $x = -4^\circ + k90^\circ$ $(k \in \mathbb{Z})$.

D. $x = 4^\circ + k90^\circ$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Lời giải.

Ta có $\tan(2x + 27^\circ) = \tan 35^\circ \Leftrightarrow 2x + 27^\circ = 35^\circ + k180^\circ \Leftrightarrow x = 4^\circ + k90^\circ$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Chọn đáp án D .... □

Câu 10. Các góc lượng giác x sao cho $\sin 2x = \sin(36^\circ - x)$ là

A. $x = 12^\circ + k120^\circ$ và $x = 144^\circ + k360^\circ$ $(k \in \mathbb{Z})$.

B. $x = 12^\circ + k120^\circ$ và $x = 48^\circ + k120^\circ$ $(k \in \mathbb{Z})$.

C. $x = 12^\circ + k360^\circ$ và $x = 144^\circ + k120^\circ$ $(k \in \mathbb{Z})$.

D. $x = 36^\circ + k360^\circ$ và $x = 144^\circ + k360^\circ$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} & \sin 2x = \sin(36^\circ - x) \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{aligned} & 2x = 36^\circ - x + k360^\circ \\ & 2x = 180^\circ - (36^\circ - x) + k360^\circ \end{aligned}\right. \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{aligned} & 3x = 36^\circ + k360^\circ \\ & 2x = 180^\circ - 36^\circ + x + k360^\circ \end{aligned}\right. \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{aligned} & x = 12^\circ + k120^\circ \\ & x = 144^\circ + k360^\circ \end{aligned}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Chọn đáp án A .... □

Câu 11. Số nghiệm của phương trình $\cos x = 1$ $(*)$ trên khoảng $\left(-\dfrac{3\pi}{4}; \dfrac{9\pi}{2}\right)$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải.

Ta có $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Vì $x \in \left(-\dfrac{3\pi}{4}; \dfrac{9\pi}{2}\right)$ nên

$$\begin{aligned}
& -\frac{3\pi}{4} < x < \frac{9\pi}{2} \\
\Leftrightarrow\ & -\frac{3\pi}{4} < k2\pi < \frac{9\pi}{2} \\
\Leftrightarrow\ & -\frac{3}{8} < k < \frac{9}{4} \, (k \in \mathbb{Z}) \\
\Rightarrow\ & k \in \{0; 1; 2\}.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình $(*)$ có 3 nghiệm trên khoảng $\left(-\dfrac{3\pi}{4}; \dfrac{9\pi}{2}\right)$.

Chọn đáp án D .... □

Câu 12. Số nghiệm của phương trình $\sin x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ $(*)$ trên khoảng $\left(-\dfrac{5\pi}{2}; \dfrac{5\pi}{2}\right)$ là

A. 2. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải.

Gọi α là góc mà $\sin \alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, khi đó $\alpha \approx 0{,}62$.

Ta có $\sin x = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

Vì $x \in \left(-\dfrac{5\pi}{2}; \dfrac{5\pi}{2}\right)$ nên

- Với $x = \alpha + k2\pi$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\ & -\frac{5\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{2} \\
\Leftrightarrow\ & -\frac{5\pi}{2} < \alpha + k2\pi < \frac{5\pi}{2} \\
\Leftrightarrow\ & -\frac{5}{4} - \frac{\alpha}{2\pi} < k < \frac{5}{4} - \frac{\alpha}{2\pi} \, (k \in \mathbb{Z}) \\
\Rightarrow\ & k \in \{-1; 0; 1\}.
\end{aligned}$$

Suy ra phương trình $(*)$ có 3 nghiệm trên khoảng $\left(-\dfrac{5\pi}{2}; \dfrac{5\pi}{2}\right)$.

- Với $x = \pi - \alpha + k2\pi$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\ & -\frac{5\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{2} \\
\Leftrightarrow\ & -\frac{5\pi}{2} < \pi - \alpha + k2\pi < \frac{5\pi}{2} \\
\Leftrightarrow\ & -\frac{3}{4} - \frac{\alpha}{2\pi} < k < \frac{7}{4} - \frac{\alpha}{2\pi} \, (k \in \mathbb{Z}) \\
\Rightarrow\ & k \in \{0; 1\}.
\end{aligned}$$

Suy ra phương trình $(*)$ có 2 nghiệm trên khoảng $\left(-\dfrac{5\pi}{2}; \dfrac{5\pi}{2}\right)$.

Vậy phương trình $(*)$ có 5 nghiệm trên khoảng $\left(-\dfrac{5\pi}{2}; \dfrac{5\pi}{2}\right)$.

Chọn đáp án (B) .... □

Câu 13. Các nghiệm của phương trình $\cos^2 x - \sin^2 x = 0$ là

A. $x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}\,(k \in \mathbb{Z})$. **B.** $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi\,(k \in \mathbb{Z})$.

C. $x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi\,(k \in \mathbb{Z})$. **D.** $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi\,(k \in \mathbb{Z})$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & \cos^2 x - \sin^2 x = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \cos 2x = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \Leftrightarrow\ & x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Chọn đáp án (A) .... □

Câu 14. Số nghiệm của phương trình $\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos 6x$ là

A. $x = -\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi$ và $x = \pi + k2\pi\,(k \in \mathbb{Z})$. **B.** $x = -\dfrac{\pi}{3} + k2\pi$ và $x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi\,(k \in \mathbb{Z})$.

C. $x = k2\pi$ và $x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi\,(k \in \mathbb{Z})$. **D.** $x = -\dfrac{\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{2}$ và $x = \dfrac{\pi}{16} + k\dfrac{\pi}{4}\,(k \in \mathbb{Z})$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & \cos 6x = \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} 6x = 2x - \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ 6x = -2x + \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} 4x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ 8x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{2} \\ x = \dfrac{\pi}{16} + k\dfrac{\pi}{4} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}) \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{2} \\ x = \dfrac{\pi}{16} + k\dfrac{\pi}{4} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Chọn đáp án (D) .... □

Câu 15. Nghiệm của phương trình $\left(\dfrac{3}{2}\right)^x = \dfrac{4}{9}$ là

A. $x = -2$. **B.** $x = -\sqrt{2}$. **C.** $x = \sqrt{2}$. **D.** $x = 2$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}&\left(\frac{3}{2}\right)^x=\frac{4}{9}\\ \Leftrightarrow\ &\left(\frac{3}{2}\right)^x=\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}\\ \Leftrightarrow\ &x=-2.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (A) .... □

Câu 16. Nghiệm của phương trình $2^{x^2-x}=4$ là

A. $x=-1$ và $x=2$. **B.** $x=0$ và $x=1$. **C.** $x=1$ và $x=-2$. **D.** $x=0$ và $x=2$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}&2^{x^2-x}=4\\ \Leftrightarrow\ &2^{x^2-x}=2^2\\ \Leftrightarrow\ &x^2-x-2=0\\ \Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=2.\end{array}\right.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (A) .... □

Câu 17. Tổng các nghiệm của phương trình $5^{x^2-3x}=10$ là

A. -3. **B.** $\log_5 10$. **C.** 3. **D.** $-\log_5 10$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}&5^{x^2-3x}=10\\ \Leftrightarrow\ &x^2-3x=\log_5 10\\ \Leftrightarrow\ &x^2-3x-\log_5 10=0.\end{aligned}$$

Vì phương trình có $a\cdot c=1\cdot(-\log_5 10)<0$ nên có 2 nghiệm x_1, x_2 thoả mãn $x_1+x_2=\frac{3}{1}=3$.

Chọn đáp án (C) .... □

Câu 18. Nghiệm của phương trình $\left(\frac{1}{25}\right)^{3-2x}=5^{x+3}$ là

A. $x=-3$. **B.** $x=5$. **C.** $x=-5$. **D.** $x=3$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{25}\right)^{3-2x}=5^{x+3}\\ \Leftrightarrow\ &5^{4x-6}=5^{x+3}\\ \Leftrightarrow\ &4x-6=x+3\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 3.$$

Chọn đáp án (D) .... □

Câu 19. Nghiệm của phương trình $\log_{27}\left(x^2 - 1\right) = \dfrac{1}{3}$ là

A. $x = \pm 2$. **B.** $x = \pm\sqrt{10}$. **C.** $x = 2$. **D.** $x = \sqrt{10}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
& \log_{27}\left(x^2 - 1\right) = \frac{1}{3} \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ x^2 - 1 = 27^{\frac{1}{3}} \end{cases} \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x < -1 \\ x > 1 \end{array}\right. \\ x^2 = 4 \end{cases} \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x < -1 \\ x > 1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{ll} x = -2 & \text{(nhận)} \\ x = 2 & \text{(nhận)} \end{array}\right. \end{cases} \\
\Leftrightarrow \quad & x = \pm 2.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án (A) .... □

Câu 20. Tích các nghiệm của phương trình $\log_2\left(x^2 - 2x\right) = 3$ là

A. 8. **B.** 6. **C.** -8. **D.** -6.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
& \log_2\left(x^2 - 2x\right) = 3 \\
\Leftrightarrow \quad & x^2 - 2x = 2^3 \\
\Leftrightarrow \quad & x^2 - 2x - 8 = 0.
\end{aligned}$$

Vì $a \cdot c = 1 \cdot (-8) < 0$ nên phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 thoả mãn $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{-8}{1} = -8$.

Chọn đáp án (C) .... □

Câu 21. Số nghiệm của phương trình $\log_7\left(x^2 - 2x\right) = \log_7(3x - 6)$ là

A. 2. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x^2 - 2x > 0 \\ 3x - 6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2.$

Phương trình đã cho trở thành

$$x^2-2x=3x-6 \Leftrightarrow x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \text{ (loại)} \\ x=3 \text{ (nhận)}. \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có 1 nghiệm $x=3$.

Chọn đáp án (D) .... □

Câu 22. Nghiệm của bất phương trình $(0{,}5)^x > 3$ là

A. $x > \log_{0,5} 3$. **B.** $x < \log_{0,5} 3$. **C.** $x < \log_3 0{,}5$. **D.** $x > \log_3 0{,}5$.

Lời giải.

Ta có $(0{,}5)^x > 3 \Leftrightarrow x < \log_{0,5} 3$.

Chọn đáp án (B) .... □

Câu 23. Tập nghiệm của bất phương trình $(0{,}2)^{x^2} > 1$ là

A. $\varnothing$. **B.** $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Ta có $(0{,}2)^{x^2} > 1 \Leftrightarrow x^2 < \log_{0,2} 1 \Leftrightarrow x^2 < 0$ (vô nghiệm).

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $\varnothing$.

Chọn đáp án (A) .... □

Câu 24. Tập nghiệm của bất phương trình $\left(2-\sqrt{3}\right)^{2x-1} > \left(2+\sqrt{3}\right)^{x-5}$ là

A. $(2;+\infty)$. **B.** $(-4;+\infty)$. **C.** $(-\infty;2)$. **D.** $(-\infty;-4)$.

Lời giải.

Vì $\left(2-\sqrt{3}\right)\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)=1$ nên bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \left(2-\sqrt{3}\right)^{2x-1} > \left(\frac{1}{2-\sqrt{3}}\right)^{x-5} \\ \Leftrightarrow\ & \left(2-\sqrt{3}\right)^{2x-1} > \left(2-\sqrt{3}\right)^{-x+5} \\ \Leftrightarrow\ & 2x-1 < -x+5 \\ \Leftrightarrow\ & 3x < 6 \Leftrightarrow x < 2. \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $(-\infty;2)$.

Chọn đáp án (C) .... □

Câu 25. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(2x-6) < -2$ là

A. $(3;5)$. **B.** $(-\infty;5)$. **C.** $(3;+\infty)$. **D.** $(5;+\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện $2x-6>0 \Leftrightarrow x>3$.

Bất phương trình đã cho trở thành $2x-6 > \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2} \Leftrightarrow 2x-6>4 \Leftrightarrow x>5$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $(5;+\infty)$.

Chọn đáp án (D) .... □

Câu 26. Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_5(2x-3) < \log_{25} x^2$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** vô số.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} 2x-3>0 \\ x^2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \dfrac{3}{2} \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > \dfrac{3}{2}$.

Bất phương trình đã cho trở thành $\log_5(2x-3) < \log_5 x \Leftrightarrow 2x-3 < x \Leftrightarrow x < 3$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $\left(\dfrac{3}{2}; 3\right)$.

Do đó nghiệm nguyên thỏa mãn đề bài là $x = 2$.

Vậy số nghiệm nguyên của bất phương trình là 1.

Chọn đáp án (A) .... □

Dạng II. Câu trắc nghiệm đúng sai

Trong mỗi ý **a)**, **b)**, **c)**, **d)** *ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.*

Câu 27. Cho phương trình $\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin^2\left(3x + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

a) Hạ bậc hai vế, ta được phương trình $\dfrac{1+\cos(\pi-2x)}{2} = \dfrac{1-\cos\left(6x+\dfrac{\pi}{2}\right)}{2}$.

b) Ta có $\cos(\pi - 2x) = \cos 2x$.

c) Phương trình đã cho đưa về dạng $\cos 2x = \cos 6x$.

d) Nghiệm của phương trình đã cho là $x = k\dfrac{\pi}{4}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
& \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin^2\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) \\
\Leftrightarrow\ & \frac{1+\cos(\pi-2x)}{2} = \frac{1-\cos\left(6x+\frac{\pi}{2}\right)}{2} \\
\Leftrightarrow\ & \cos(\pi-2x) = -\cos\left(6x+\frac{\pi}{2}\right) \\
\Leftrightarrow\ & \cos(\pi-2x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-6x\right) \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \pi - 2x = \frac{\pi}{2} - 6x + k2\pi \\ \pi - 2x = -\frac{\pi}{2} + 6x + k2\pi \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{3\pi}{16} - k\frac{\pi}{4} \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

a) **Đúng**.

b) **Sai**. Vì $\cos(\pi - 2x) = -\cos 2x$.

c) **Sai**. Vì $\cos(\pi-2x) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - 6x\right) \Leftrightarrow -\cos 2x = \sin 6x$.

d) **Sai**.

Chọn đáp án | a đúng | b sai | c sai | d sai | .... □

Câu 28. Cho phương trình $\cos 2x = \sin\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right)$ với $x \in [0; \pi]$.

a) Ta có $\cos 2x = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - 2x\right)$.

b) Phương trình đã cho có các nghiệm là $x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi$ và $x = \dfrac{5\pi}{4} + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.

c) Phương trình đã cho có hai nghiệm thuộc đoạn $[0; \pi]$.

d) Tổng các nghiệm của phương trình đã cho trên đoạn $[0; \pi]$ là $\dfrac{5\pi}{6}$.

Lời giải.

Do $\cos 2x = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - 2x\right)$ nên

$$\begin{aligned}
& \cos 2x = \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \\
\Leftrightarrow\ & \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{aligned} & \frac{\pi}{2} - 2x = \frac{\pi}{4} - x + k2\pi \\ & \frac{\pi}{2} - 2x = \pi - (\frac{\pi}{4} - x) + k2\pi \end{aligned}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{aligned} & x = \frac{\pi}{4} - k2\pi \\ & x = -\frac{\pi}{12} - k\frac{2\pi}{3} \end{aligned}\right. (k \in \mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

a) **Đúng**.

b) **Sai**.

c) **Đúng**. Vì trên đoạn $[0; \pi]$, phương trình có hai nghiệm $x = \dfrac{\pi}{4}$ và $x = \dfrac{7\pi}{12}$.

d) **Đúng**. Vì tổng các nghiệm của phương trình đã cho trên đoạn $[0; \pi]$ là $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{7\pi}{12} = \dfrac{5\pi}{6}$.

Chọn đáp án | a đúng | b sai | c đúng | d đúng | .... □

Câu 29. Cho phương trình $\sin 4x + \sin 2x = \cos 4x + \cos 2x$.

a) Dùng công thức biến đổi tổng thành tích, vế trái của phương trình đưa về dạng $\sin 3x \cos x$.

b) Dùng công thức biến đổi tổng thành tích, vế phải của phương trình đưa về dạng $\cos 3x \cos x$.

c) Nghiệm của phương trình đã cho là nghiệm của phương trình $\cos x = 0$ và phương trình $\sin 3x = \cos 3x$.

d) Nghiệm của phương trình đã cho là $x = k2\pi$ và $x = \dfrac{\pi}{12} + k\dfrac{\pi}{3}\ (k \in \mathbb{Z})$.

Lời giải.

Dùng công thức biến đổi tổng thành tích, phương trình đưa về dạng

$$\begin{aligned}
& 2\sin 3x \cos x = 2\cos 3x \cos x \\
\Leftrightarrow\ & \cos x(\sin 3x - \cos 3x) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{aligned} & \cos x = 0 \\ & \sin 3x - \cos 3x = 0 \end{aligned}\right.
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi \\ \sin 3x=\cos 3x \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi \\ \tan 3x=1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi \\ x=\dfrac{\pi}{12}+k\dfrac{\pi}{3} \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z}).$$

a) **Sai**. Vì $\sin 4x+\sin 2x=2\sin 3x\cos x$.

b) **Sai**. Vì $\cos 4x+\cos 2x=2\cos 3x\cos x$.

c) **Đúng**.

d) **Sai**.

Chọn đáp án | a sai | b sai | c đúng | d sai | .... □

Câu 30. Hàng ngày mực nước tại một cảng biển lên xuống theo thủy triều. Chiều cao h (m) của mực nước theo thời gian t (giờ) trong một ngày được cho bởi công thức $h=14+8\sin\left(\dfrac{\pi}{12}t\right)$ với $0\le t\le 24$.

a Lúc 6 giờ sáng thì chiều cao của mực nước tại bến cảng là cao nhất.

b) Chiều cao của mực nước tại bến cảng thấp nhất vào lúc 12 giờ.

c Mực nước tại bến cảng cao 18 (m) vào lúc 2 giờ và 10 giờ.

d) Biết tàu chỉ vào được cảng khi mực nước trong cảng không thấp hơn 18 (m). Vậy thời gian tàu vào được cảng là từ 10 sáng hôm trước đến 2 giờ sáng hôm sau.

Lời giải.

Do $-1\le\sin\left(\dfrac{\pi}{12}t\right)\le 1$ nên $14-8\le 14+8\sin\left(\dfrac{\pi}{12}t\right)\le 14+8$ hay $6\le h\le 22$.

a) **Đúng**. Vì chiều cao của mực nước tại bến cảng cao nhất bằng 22 (m) khi

$$\sin\left(\dfrac{\pi}{12}t\right)=1\Leftrightarrow \dfrac{\pi}{12}t=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\Leftrightarrow t=6+24\,(k\in\mathbb{Z}).$$

Mà $0\le t\le 24$ nên $t=6$.

Do đó lúc 6 giờ sáng thì chiều cao của mực nước tại bến cảng là cao nhất.

b) **Sai**. Vì chiều cao của mực nước tại bến cảng thấp nhất bằng 6 m khi

$$\sin\left(\dfrac{\pi}{12}t\right)=-1\Leftrightarrow \dfrac{\pi}{12}t=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\Leftrightarrow t=-6+24k\,(k\in\mathbb{Z}).$$

Mà $0\le t\le 24$ nên $t=18$.

Do đó lúc 18 giờ thì chiều cao của mực nước tại bến cảng là thấp nhất.

c) **Đúng**. Vì phương trình

$$\begin{aligned}
& 14+8\sin\left(\frac{\pi}{12}t\right)=18\\
\Leftrightarrow\ & \sin\left(\frac{\pi}{12}t\right)=\frac{1}{2}\\
\Leftrightarrow\ & \sin\left(\frac{\pi}{12}t\right)=\sin\frac{\pi}{6}\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l}\frac{\pi}{12}t=\frac{\pi}{6}+k2\pi\\ \frac{\pi}{12}t=\frac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l}t=2+24k\\ t=10+24k\end{array}\right.\quad (k\in\mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

Mà $0\le t\le 24$ nên $t\in\{2;10\}$.

d) **Sai**.

Bảng biến thiên hàm số $h(t)=14+8\sin\left(\frac{\pi}{12}t\right)$ trên đoạn $[0;24]$.

t	0	6	12	18	24
$h(t)$	14 ↗	22	↘ 14 ↘	6	↗ 14

Từ bảng biến thiên và $h(2)=h(10)=18$, suy ra trong khoảng thời gian từ 2 giờ đến 10 giờ, mực nước tại bến cảng lớn hơn hoặc bằng 18 (m).

Vậy thời gian tàu vào được cảng là từ 2 giờ đến 10 giờ trong cùng ngày.

Chọn đáp án | a đúng | b sai | c đúng | d sai | .... □

Câu 31. Cho bất phương trình $4^{x^2+5}\ge\left(\frac{1}{8}\right)^{x-x^2}$.

a Ta có $4=2^2$ và $\frac{1}{8}=2^{-3}$.

b Bất phương trình đã cho tương đương với bất phương trình $2\left(x^2+5\right)\ge -3\left(x-x^2\right)$.

c) Số nghiệm nguyên của bất phương trình là 6.

d) Tích nghiệm nguyên lớn nhất và nghiệm nguyên nhỏ nhất của bất phương trình là -4.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
& 4^{x^2+5}\ge\left(\frac{1}{8}\right)^{x-x^2}\\
\Leftrightarrow\ & 2^{2\left(x^2+5\right)}\ge 2^{-3\left(x-x^2\right)}\\
\Leftrightarrow\ & 2\left(x^2+5\right)\ge -3\left(x-x^2\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow\ x^2-3x-10\le 0\\&\Leftrightarrow\ -2\le x\le 5.\end{aligned}$$

a) **Đúng**.

b) **Đúng**.

c) **Sai**. Vì phương trình có 8 nghiệm nguyên.

d) **Sai**. Vì tích nghiệm nguyên lớn nhất và nghiệm nguyên nhỏ nhất của bất phương trình là -10.

Chọn đáp án | a đúng | b đúng | c sai | d sai | .... □

Câu 32. Cho bất phương trình $\log_{\frac{1}{3\sqrt{2}}}(-x^2+7x+18)\ge -2$.

a Ta có $0<\dfrac{1}{3\sqrt{2}}<1$.

b Nghiệm của bất phương trình đã cho là nghiệm của bất phương trình $-x^2+7x+18\le\left(\dfrac{1}{3\sqrt{2}}\right)^{-2}$.

c) Số nghiệm nguyên của bất phương trình là 2.

d Tổng các nghiệm nguyên của bất phương trình là 14.

Lời giải.

Ta có $\log_{\frac{1}{3\sqrt{2}}}(-x^2+7x+18)\ge -2\Leftrightarrow\begin{cases}-x^2+7x+18\le 18\\-x^2+7x+18>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\le 0\\x\ge 7\end{array}\right.\\-2<x<9.\end{cases}$

Vậy bất phương trình có nghiệm là $-2<x\le 0$ hoặc $7\le x<9$.

a) **Đúng**.

b) **Đúng**.

c) **Sai**. Vì bất phương trình có 4 nghiệm nguyên là $-1;0;7;8$.

d) **Đúng**. Vì tổng các nghiệm nguyên của bất phương trình là 14.

Chọn đáp án | a đúng | b đúng | c sai | d đúng | .... □

Câu 33. Mức cường độ âm L (đơn vị dB) được tính bởi công thức $L=10\log\dfrac{I}{10^{-12}}$, trong đó I (đơn vị $\mathrm{W/m^2}$) là cường độ của âm (*Nguồn R. Larson and B. Edwards, Calculus 10e Cengage*). Một người đứng giữa hai loa A và B. Khi loa A bật thì người đó nghe được âm có mức cường độ 80 dB. Khi loa B bật thì nghe được âm có mức cường độ 90 dB. Nếu bật cả hai loa thì cường độ âm tác động vào tai người bằng tổng cường độ âm của hai loa đó.

a) Cường độ âm của loa A là $10^{80}\cdot 10^{-12}\,(\mathrm{W}/m^2)$.

b) Cường độ âm của loa B là $10^{90}\cdot 10^{-12}\,(\mathrm{W}/m^2)$.

c) Cường độ âm tác động vào tai người khi bật cả hai loa là $10^{170}\cdot 10^{-12}\,(\mathrm{W}/m^2)$.

d Nếu bật cả hai loa thì người đó nghe được âm có mức cường độ là 90,4 (dB).

Lời giải.

Đặt $L_1 = 80$ (dB), $L_2 = 90$ (dB) và I_1, I_2 lần lượt là cường độ âm của loa A, loa B.
Ta có $L_1 = 10\log\dfrac{I_1}{10^{-12}} \Rightarrow I_1 = 10^{\frac{L_1}{10}} \cdot 10^{-12} = 10^8 \cdot 10^{-12}\,(\mathrm{W}/m^2)$.
$L_2 = 10\log\dfrac{I_2}{10^{-12}} \Rightarrow I_2 = 10^{\frac{L_2}{10}} \cdot 10^{-12} = 10^9 \cdot 10^{-12}\,(\mathrm{W}/m^2)$.
Do đó, $I_1 + I_2 = (10^8 + 10^9) \cdot 10^{-12}\,(\mathrm{W}/m^2)$.
Vậy $L = 10\log\dfrac{I_1 + I_2}{10^{-12}} = 10 \cdot \log(10^8 + 10^9) \approx 90,4$ (dB).

a) **Sai**. Vì cường độ âm của loa A là $10^8 \cdot 10^{-12}\,(\mathrm{W}/m^2)$.

b) **Sai**. Vì cường độ âm của loa B là $10^9 \cdot 10^{-12}\,(\mathrm{W}/m^2)$.

c) **Sai**. Vì cường độ âm tác động vào tai người khi bật cả hai loa là

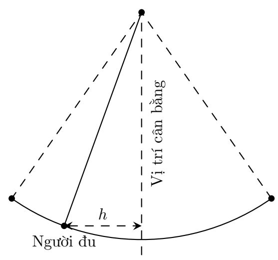
$$I_1 + I_2 = \left(10^8 + 10^9\right) \cdot 10^{-12}\left(\mathrm{W}/m^2\right).$$

d) **Đúng**.

Chọn đáp án | a sai | b sai | c sai | d đúng | .... □

Dạng III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 34. Hội Lim (tỉnh Bắc Ninh) vào mùa xuân thường có trò chơi đánh đu. Khi người chơi đu nhún đều, cây đu sẽ đưa người chơi đu dao động qua lại vị trí cân bằng (*tham khảo hình vẽ bên*). Nghiên cứu trò chơi này, người ta thấy khoảng cách h (m) từ người chơi đu đến vị trí cân bằng được biểu diễn qua thời gian t (s) (với $t \geq 0$) bởi hệ thức $h = |d|$ với $d = 3\cos\left[\dfrac{\pi}{3}(2t-1)\right]$, trong đó quy ước $d > 0$ khi vị trí cân bằng ở phía sau lưng người chơi đu và $d < 0$ trong trường hợp ngược lại (*Nguồn: R.Larson and B.Edwards, Calculus 10e Cengage*). Tìm thời điểm đầu tiên mà khoảng cách h lớn nhất. (Viết kết quả dưới dạng số thập phân).



Đáp án: 0,5

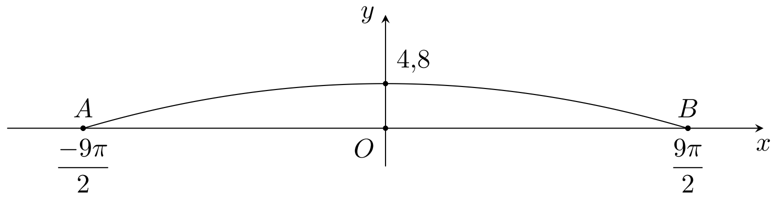
Lời giải.

Do $-1 \leq \cos\left[\dfrac{\pi}{3}(2t-1)\right] \leq 1$ nên $-3 \leq 3\cos\left[\dfrac{\pi}{3}(2t-1)\right] \leq 3$ hay $-3 \leq d \leq 3$.
Do đó, $0 \leq |d| \leq 3$.
Vậy h lớn nhất bằng 3 khi $|d| = 3$ hay

$$\begin{aligned}
& \cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right] = \pm 1 \\
\Leftrightarrow\ & \sin\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right] = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{\pi}{3}(2t-1) = k\pi \\
\Leftrightarrow\ & t = \frac{1+3k}{2} \text{ với } k \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Thời điểm đầu tiên mà khoảng cách h lớn nhất là $t = 0{,}5$ s (ứng với $k = 0$).

Câu 35. Một cây cầu có dạng cung AB của đồ thị hàm số $y = 4{,}8 \cdot \cos \dfrac{x}{9}$ và được mô tả trong hệ trục toạ độ với đơn vị trục là mét như ở hình sau.



Một sà lan chở khối hàng hoá được xếp thành hình hộp chữ nhật với độ cao 3,6 m so với mực nước sông. Hỏi chiều rộng của khối hàng hóa đó lớn nhất là bao nhiêu mét để sà lan có thể đi qua được gầm cầu (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)? Đáp án: 13

Lời giải.

Với mỗi điểm $M(x;y)$ nằm trên mặt cầu, khoảng cách từ điểm M đến mặt nước tương ứng với giá trị tung độ y của điểm M. Xét phương trình

$$4{,}8 \cdot \cos \frac{x}{9} = 3{,}6 \Leftrightarrow \cos \frac{x}{9} = \frac{3}{4}.$$

Do $x \in \left[-\dfrac{9\pi}{2}; \dfrac{9\pi}{2}\right]$ nên $\dfrac{x}{9} \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Từ phương trình $\cos \dfrac{x}{9} = \dfrac{3}{4}$ với $\dfrac{x}{9} \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$, ta có $\dfrac{x}{9} \approx \pm 0{,}7227$.

Khi đó $2|x| \approx 13{,}0086$.

Vậy chiều rộng của khối hàng hoá đó lớn nhất là 13 m để sà lan có thể đi qua được gầm cầu.

Câu 36. Trong một thí nghiệm, một quả cầu được gắn vào một đầu dây đàn hồi, đầu kia của sợi dây được gắn cố định vào một thanh treo nằm ngang. Sau khi quả cầu được kéo xuống và thả ra, nó bắt đầu di chuyển lên xuống. Khi đó, chiều cao h (cm) của quả cầu so với mặt đất theo thời gian t (s) được cho bởi công thức $h = 100 - 30\cos 20t$. Tính thời điểm đầu tiên mà quả cầu đạt chiều cao cao nhất kể từ khi quả cầu được thả ra (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm). Đáp án: 0,16

Lời giải.

Do $-1 \leq \cos 20t \leq 1$ nên $70 \leq 100 - 30\cos 20t \leq 130 \Leftrightarrow 70 \leq h \leq 130$.

Vậy chiều cao cao nhất $h = 130$ (cm) khi

$$\cos 20t = -1 \Leftrightarrow 20t = \pi + k2\pi \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{20} + k\frac{\pi}{10} \text{ với } k \in \mathbb{N}.$$

Vậy thời điểm đầu tiên mà quả cầu đạt chiều cao cao nhất kể từ khi quả cầu được thả ra là $t = \dfrac{\pi}{20} \approx 0{,}16$ (s).

Câu 37. Trung bình sau mỗi năm sử dụng, giá trị còn lại của một chiếc ô tô giảm đi 6% so với năm trước đó. Giả sử một chiếc ô tô lúc mới mua là 800 triệu đồng. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm sử dụng thì giá trị còn lại của chiếc ô tô đó nhỏ hơn 600 triệu đồng (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)? Đáp án: 4,65

Lời giải.

Gọi S là giá trị còn lại của một chiếc ô tô sau t năm sử dụng và được tính bởi công thức

$$S = S_0 \cdot (0,94)^t,$$

trong đó S_0 là giá trị ban đầu của ô tô.
Xét bất phương trình

$$800 \cdot (0{,}94)^t < 600 \Leftrightarrow (0{,}94)^t < 0{,}75 \Leftrightarrow t > \log_{0{,}94} 0{,}75,$$

vì $\log_{0{,}94} 0{,}75 \approx 4{,}65$ nên $t > 4{,}65$.
Vậy sau khoảng 5 năm sử dụng thì giá trị còn lại của một chiếc ô tô đó nhỏ hơn 600 triệu đồng.

Câu 38. Các nhà khoa học xác định được chu kì bán rã của ${}^{14}_{6}\mathrm{C}$ là 5 730 năm, tức là sau 5 730 năm thì số nguyên tử ${}^{14}_{6}\mathrm{C}$ giảm đi một nửa. Một cây còn sống có lượng ${}^{14}_{6}\mathrm{C}$ trong cây được duy trì không đổi. Nhưng nếu cây chết thì lượng ${}^{14}_{6}\mathrm{C}$ trong cây phân rã theo chu kì bán rã của nó. Các nhà khảo cổ đã tìm thấy một mẫu gỗ cổ và đo được tỉ lệ phần trăm lượng ${}^{14}_{6}\mathrm{C}$ còn lại trong mẫu gỗ cổ đó so với lúc còn sinh trưởng là 75%. Hỏi mẫu gỗ cổ đó của cây đã chết cách đây bao nhiêu năm (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)? Đáp án: 2 378

Lời giải.

Gọi m_0 là khối lượng của ${}^{14}_{6}\mathrm{C}$ trong cây tại thời điểm cây còn sống ($t = 0$).
Khi đó, khối lượng $m(t)$ của ${}^{14}_{6}\mathrm{C}$ trong cây sau khi chết t (năm) được tính bởi công thức

$$m(t) = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5\,730}}.$$

Theo giả thiết, ta có $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5\,730}} = \dfrac{m(t)}{m_0} = 0{,}75$. Do đó, $\dfrac{t}{5\,730} = \log_{\frac{1}{2}} 0{,}75$.
Vậy $t \approx 2\,378$ (năm).

Câu 39. Cô Liên gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng theo hình thức lãi kép có kì hạn là 12 tháng với lãi suất 6%/ năm. Giả sử qua các năm thì lãi suất không thay đổi và cô Liên không gửi thêm tiền vào mỗi năm. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm thì số tiền cô Liên có được cả gốc và lãi nhiều hơn 150 triệu đồng (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)? Đáp án: 7

Lời giải.

Số tiền sau t năm mà cô Liên có là $S = 100 \cdot (1{,}06)^t$.
Xét bất phương trình $100 \cdot (1{,}06)^t > 150 \Leftrightarrow (1{,}06)^t > \dfrac{150}{100} \Leftrightarrow t > \log_{1{,}06}(1{,}5)$.
Vì $\log_{1{,}06}(1{,}5) \approx 6{,}96$ nên $t > 6{,}96$.
Vậy sau ít nhất 7 năm thì số tiền cô Liên có được cả gốc và lãi nhiều hơn 150 triệu đồng.

BẢNG ĐÁP ÁN

PHẦN I.

Câu 1. D	Câu 2. B	Câu 3. A	Câu 4. A	Câu 5. C	Câu 6. B
Câu 7. D	Câu 8. C	Câu 9. D	Câu 10. A	Câu 11. D	Câu 12. B
Câu 13. A	Câu 14. D	Câu 15. A	Câu 16. A	Câu 17. C	Câu 18. D
Câu 19. A	Câu 20. C	Câu 21. D	Câu 22. B	Câu 23. A	Câu 24. C
Câu 25. D	Câu 26. A				

PHẦN II.

Câu 27. a Đ b S c S d S	Câu 28. a Đ b S c Đ d Đ
Câu 29. a S b S c Đ d S	Câu 30. a Đ b S c Đ d S
Câu 31. a Đ b Đ c S d S	Câu 32. a Đ b Đ c S d Đ
Câu 33. a S b S c S d Đ	

PHẦN III.

Câu 34. 0,5	Câu 35. 13	Câu 36. 0,16	Câu 37. 4,65	Câu 38. 2 378	Câu 39. 7

CHỦ ĐỀ 2. CẤP SỐ CỘNG CẤP SỐ NHÂN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. CẤP SỐ CỘNG

1. Định nghĩa

- Dãy số (u_n) là cấp số cộng nếu $u_n = u_{n-1} + d$ với $n \geq 2$, d là số không đổi.
- Số d gọi là công sai của cấp số cộng, $d = u_n - u_{n-1}$ với $n \geq 2$.
- Nếu $d = 0$ thì cấp số cộng là một dãy số không đổi.

2. Số hạng tổng quát

Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu u_1 và công sai d, ta có

$$u_n = u_1 + (n-1)d, \forall n \geq 2.$$

3. Tổng n số hạng đầu

Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu u_1 và công sai d.

Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$, ta có

$$S_n = \frac{(u_1 + u_n)n}{2} \text{ hoặc } S_n = \frac{[2u_1 + (n-1)d]n}{2}.$$

II. CẤP SỐ NHÂN

1. Định nghĩa

- Dãy số (u_n) là cấp số nhân nếu $u_n = u_{n-1} \cdot q$ với $n \geq 2$, q là số không đổi.
- Số q gọi là công bội của cấp số nhân. Nếu $u_n \neq 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ thì $q = \dfrac{u_n}{u_{n-1}}$ với $n \geq 2$.
- Nếu $q = 1$ thì cấp số nhân là một dãy số không đổi.

2. Số hạng tổng quát

Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu u_1 và công bội q, ta có

$$u_n = u_1 \cdot q^{n-1}, \forall n \geq 2.$$

3. Tổng n số hạng đầu

Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu u_1 và công bội $q\,(q \neq 1)$.

Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$, ta có

$$S_n = \frac{u_1(1-q^n)}{1-q}.$$

B. MỘT SỐ VÍ DỤ

Dạng I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ lựa chọn một phương án.

Ví dụ 1. Trong các dãy số (u_n) với số hạng tổng quát sau, dãy số nào là cấp số cộng?

A. $u_n = 5^n$. **B.** $u_n = 2 - 5n$. **C.** $u_n = 5^n - 2$. **D.** $u_n = 5 + n^2$.

Lời giải.

Xét $u_n = 2 - 5n \Rightarrow u_{n+1} = 2 - 5(n+1) = -3 - 5n$.

Ta có $u_{n+1} - u_n = -3 - 5n - (2 - 5n) = -5$ (hằng số) với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Vậy dãy số (u_n) với $u_n = 2 - 5n$ là một cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = -3$ và công sai $d = -5$.

Chọn đáp án B .... □

Ví dụ 2. Cho cấp số cộng (u_n) biết $u_5 + u_7 = 19$. Giá trị của $u_2 + u_{10}$ là

A. 38. **B.** 29. **C.** 12. **D.** 19.

Lời giải.

Ta có $u_5 + u_7 = 19 \Leftrightarrow 2u_1 + 10d = 19$.

Suy ra, $u_2 + u_{10} = u_1 + d + u_1 + 9d = 2u_1 + 10d = 19$.

Chọn đáp án D .... □

Ví dụ 3. Cho cấp số nhân (u_n) có công bội $q > 1$ với $u_2 = -3$ và $u_1 + u_2 + u_3 = -13$. Số hạng đầu u_1 và công bội q của cấp số nhân đó là

A. $u_1 = 1,\ q = 3$. **B.** $u_1 = -1,\ q = -3$. **C.** $u_1 = -1,\ q = 3$. **D.** $u_1 = 1,\ q = -3$.

Lời giải.

Ta có $u_1 + u_2 + u_3 = -13 \Leftrightarrow u_1 + u_1 q + u_1 q^2 = -13$ mà ta có $u_2 = -3 \Leftrightarrow u_1 q = -3$.

Suy ra, $u_1 = \dfrac{-3}{q}$ thay vào $u_1 + u_1 q + u_1 q^2 = -13$ ta được

$$\begin{aligned}
\frac{-3}{q} + \frac{-3}{q} \cdot q + \frac{-3}{q} \cdot q^2 = -13 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{-3}{q} - 3 - 3q = -13 \text{ (điều kiện } q > 1)\\
&\Leftrightarrow \quad -3 - 3q - 3q^2 = -13q\\
&\Leftrightarrow \quad -3q^2 + 10q - 3 = 0\\
&\Leftrightarrow \quad q = 3 \text{ hoặc } q = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Vì $q > 1$ nên ta nhận $q = 3$ và $u_1 = -1$.

Chọn đáp án C .... □

Dạng II. Câu trắc nghiệm đúng sai

Trong mỗi ý **a), b), c), d)** *ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.*

Ví dụ 4. Cho dãy số (u_n) có tổng n số hạng đầu được tính bởi công thức $S_n = 2n^2 - 4n$.

a Số hạng đầu $u_1 = -2$, số hạng thứ hai $u_2 = 2$.

b Với $n \geq 2$ thì $S_n - S_{n-1} = 4n - 6$.

c) Dãy số (u_n) là một cấp số cộng có công sai là -6.

d) Tổng $u_2 + u_4 + u_6 + \ldots + u_{100}$ là $5\,000$.

Lời giải.

a) **Đúng**.

Theo giả thiết, ta có $S_n = 2n^2 - 4n$ nên $\begin{cases} u_1 = S_1 = -2 \\ u_1 + u_2 = S_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow u_2 = S_2 - S_1 = 2.$

b) **Đúng**.

Vì $S_n = 2n^2 - 4n \Rightarrow S_{n-1} = 2(n-1)^2 - 4(n-1) = 2n^2 - 8n + 6$.

Suy ra $u_n = S_n - S_{n-1} = 2n^2 - 4n - (2n^2 - 8n + 6) = 4n - 6$.

c) **Sai**.

Ta có $u_n = 4n - 6$, suy ra $u_{n+1} = 4(n+1) - 6 = 4n - 2$.

Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có $u_{n+1} - u_n = 4n - 2 - 4n + 6 = 4$.

Do đó, (u_n) là cấp số cộng với công sai $d = 4$.

d) **Sai**.

Các số $u_2; u_4; \ldots; u_{100}$ lập thành một cấp số cộng với số hạng đầu $u_2 = 2$; công sai $d' = 2d = 8$; $u_{100} = u_1 + 99d = -2 + 99 \cdot 4 = 394$.

Ta có $u_2 + u_4 + u_6 + \ldots + u_{100}$ là tổng của 50 số hạng.

Vậy $u_2 + u_4 + u_6 + \ldots + u_{100} = \dfrac{(u_2 + u_{100}) \cdot 50}{2} = 9\,900$.

Chọn đáp án | a đúng | b đúng | c sai | d sai | .... □

Ví dụ 5. Cho dãy số (u_n), biết $u_1 = 8$, $u_{n+1} = 4u_n - 9$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Đặt $v_n = u_n - 3$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

a) $v_1 = 5$.

b) Dãy số (v_n) là một cấp số nhân có công bội $q = -3$.

c) Công thức của số hạng tổng quát v_n là $v_n = 5 \cdot (-3)^{n-1}$.

d) Công thức của số hạng tổng quát u_n là $u_n = 3 + 5 \cdot (-3)^{n-1}$.

Lời giải.

Với $n \in \mathbb{N}^*$, ta có $v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = 4u_n - 12 = 4(u_n - 3) = 4v_n$.

a) **Đúng**.

Vì $v_1 = u_1 - 3 = 8 - 3 = 5$.

b) **Sai**.

Vì $v_{n+1} = 4v_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ nên (v_n) là cấp số nhân với công bội $q = 4$.

c) **Sai**.

Vì $v_n = v_1 \cdot q^{n-1} = 5 \cdot 4^{n-1}$.

d) **Sai**.

Vì $u_n = v_n + 3 = 5 \cdot 4^{n-1} + 3$.

Chọn đáp án | a đúng | b sai | c sai | d sai | .... □

Dạng III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Ví dụ 6. Khi kí kết hợp đồng với người lao động, một doanh nghiệp đề xuất hai phương án trả lương như sau:

Phương án 1: Năm thứ nhất, tiền lương là 120 triệu đồng. Kể từ năm thứ hai trở đi, mỗi năm tiền lương được tăng 18 triệu đồng.

Phương án 2: Quý thứ nhất, tiền lương là 24 triệu đồng. Kể từ quý thứ hai trở đi, mỗi quý tiền lương được tăng 1,8 triệu đồng.

Tìm n (với $n \in \mathbb{N}^*$) để từ năm thứ n trở đi thì tổng số tiền lương nhận được trong n năm đi làm ở phương án thứ hai nhiều hơn ở phương án thứ nhất. Đáp án: 4

Lời giải.

- *Phương án 1*: Số tiền lương mỗi năm người lao động nhận được lập thành cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 120$ và công sai $d = 18$, đơn vị: triệu đồng.
  Gọi S_n là tổng tiền lương sau n năm.
  Khi đó,
  $$S_n = \frac{[2u_1 + (n-1)d]n}{2} = \frac{[240 + 18(n-1)]n}{2} = 9n^2 + 111n.$$
- *Phương án 2*: 1 quý = 3 tháng.
  Số tiền lương mỗi quý người lao động nhận được lập thành cấp số cộng có số hạng đầu $v_1 = 24$ và công sai $d' = 1{,}8$, đơn vị: triệu đồng.
  Gọi Q_n là tổng tiền lương sau n năm. Do 1 năm có 4 quý nên tổng số tiền lương nhận được ở phương án 2 là tổng của $4n$ số hạng đầu của cấp số cộng
  $$Q_n = \frac{[48 + 1{,}8(4n-1)]4n}{2} = \frac{72}{5}n^2 + \frac{462}{5}n.$$

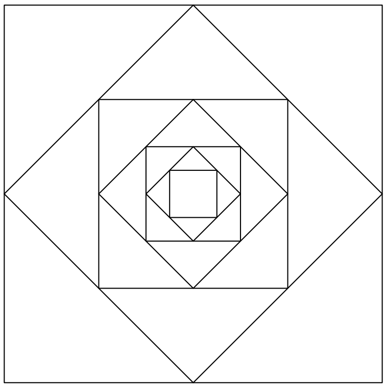
Xét bất phương trình

$$\begin{aligned} Q_n > S_n &\Leftrightarrow \frac{72}{5}n^2 + \frac{462}{5}n > 9n^2 + 111n \\ &\Leftrightarrow \frac{27}{5}n^2 - \frac{93}{5}n > 0 \\ &\Leftrightarrow n < 0 \text{ hoặc } n > \frac{31}{9}. \end{aligned}$$

Vì $n > 0$ nên $n > \dfrac{31}{9}$. Vậy từ năm thứ 4 trở đi $Q_n > S_n$.

Ví dụ 7. Cho hình vuông C_1 có cạnh bằng 1. Gọi C_2 là hình vuông có các đỉnh là trung điểm các cạnh của hình vuông C_1; C_3 là hình vuông có các đỉnh là trung điểm của các cạnh của hình vuông C_2; ... Cứ tiếp tục quá trình như trên, ta được dãy các hình vuông $C_1; C_2; C_3; \ldots; C_n; \ldots$ Diện tích của hình vuông C_{2025} có dạng $\dfrac{1}{2^a}$. Tìm a. Đáp án: 2024

Lời giải.



Gọi S_i là diện tích của hình vuông C_i với $i \in \{1; \ldots; n\}$. Ta có

- $S_1 = 1^2 = 1$.
- $S_2 = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}S_1$.
- $S_3 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2}S_2$.
  $\ldots$
- Suy ra $S_n = \dfrac{1}{2}S_{n-1}$.

Suy ra (S_n) là một cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu là $S_1 = 1$ và công bội $q = \dfrac{1}{2}$.

Khi đó $S_{2025} = S_1 \cdot q^{2024} = 1 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2024} = \dfrac{1}{2^{2024}}$. Vậy $a = 2024$.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Dạng I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ lựa chọn một phương án.

Câu 1. Trong các dãy số sau, dãy số nào **không** là cấp số cộng?

A. $2;\ 0;\ -2;\ -4;\ -5$. **B.** $\dfrac{1}{2};\ -\dfrac{1}{2};\ -\dfrac{3}{2};\ -\dfrac{5}{2};\ -\dfrac{7}{2}$.

C. $\sqrt{2};\ \sqrt{2};\ \sqrt{2};\ \sqrt{2};\ \sqrt{2}$. **D.** $-7;\ -4;\ -1;\ 2;\ 5$.

Lời giải.

- Dãy số $\dfrac{1}{2};\ -\dfrac{1}{2};\ -\dfrac{3}{2};\ -\dfrac{5}{2};\ -\dfrac{7}{2}$ là cấp số cộng với công sai $d = -1$.
- Dãy số $\sqrt{2};\ \sqrt{2};\ \sqrt{2};\ \sqrt{2};\ \sqrt{2}$ là cấp số cộng với công sai $d = 0$.
- Dãy số $-7;\ -4;\ -1;\ 2;\ 5$ là cấp số cộng với công sai $d = 3$.
- Dãy số $2;\ 0;\ -2;\ -4;\ -5$ có $-4 - (-2) = -2 \neq -1 = -5 - (-4)$ nên không phải là cấp số cộng.

Chọn đáp án A .... □

Câu 2. Trong các dãy số (u_n) với số hạng tổng quát sau, dãy số nào là cấp số cộng?

A. $u_n = 3 \cdot 2^n$. **B.** $u_n = 3 - 2n$. **C.** $u_n = 2^n + 3$. **D.** $u_n = 2 + n^3$.

Lời giải.

Xét dãy số (u_n) với $u_n = 3 - 2n$, suy ra $u_{n+1} = 3 - 2(n+1) = 1 - 2n$.

Ta có $u_{n+1} - u_n = 1 - 2n - (3 - 2n) = -2, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Vậy dãy số (u_n) với $u_n = 3 - 2n$ là cấp số cộng với số hạng đầu $u_1 = 3 - 2 \cdot 1 = 1$ và công sai $d = -2$.

Chọn đáp án B .... □

Câu 3. Cho cấp số cộng (u_n) biết $u_3 = -2$; $u_7 = 18$. Số hạng u_{11} bằng

A. 38. **B.** 20. **C.** 43. **D.** 33.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases} u_3 = -2 \\ u_7 = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 2d = -2 \\ u_1 + 6d = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -12 \\ d = 5. \end{cases}$$

Vậy $u_{11} = u_1 + 10d = -12 + 10 \cdot 5 = 38$.

Chọn đáp án A .... □

Câu 4. Cho (u_n) là cấp số cộng có $u_4 + u_{16} = 48$. Số hạng u_{10} bằng

A. 28. **B.** 24. **C.** 96. **D.** 72.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & u_4 + u_{16} = 48 \\ \Leftrightarrow\ & u_1 + 3d + u_1 + 15d = 48 \\ \Leftrightarrow\ & 2u_1 + 18d = 48 \\ \Leftrightarrow\ & u_1 + 9d = 24 \\ \Leftrightarrow\ & u_{10} = 24. \end{aligned}$$

Vậy số hạng $u_{10} = 24$.

Chọn đáp án B .... □

Câu 5. Cho (u_n) là cấp số cộng có $u_9 = 5u_2$ và $u_{13} = 2u_6 + 5$. Số hạng đầu u_1 và công sai d của cấp số cộng đó là

A. $u_1 = -3$, $d = 4$. **B.** $u_1 = 3$, $d = 4$. **C.** $u_1 = 4$, $d = 3$. **D.** $u_1 = -4$, $d = 3$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & \begin{cases} u_9 = 5u_2 \\ u_{13} = 2u_6 + 5 \end{cases} \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} u_1 + 8d = 5(u_1 + d) \\ u_1 + 12d = 2(u_1 + 5d) + 5 \end{cases} \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} u_1 + 8d = 5u_1 + 5d \\ u_1 + 12d = 2u_1 + 10d + 5 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4u_1 + 3d = 0 \\ -u_1 + 2d = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 \\ d = 4. \end{cases}$$

Chọn đáp án B .... □

Câu 6. Một cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = \dfrac{1}{3}$, công sai $d = -1$. Tổng n số hạng đầu của cấp số cộng đó bằng -425. Giá trị của n bằng

A. 30. **B.** 60. **C.** 45. **D.** 15.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} S_n = -425 &\Leftrightarrow \frac{2u_1 + (n-1)d}{2} \cdot n = -425 \\ &\Leftrightarrow \left[\frac{2}{3} - (n-1)\right] \cdot n = -850 \\ &\Leftrightarrow n^2 - \frac{5}{3}n - 850 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = -\dfrac{85}{3} \\ n = 30. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vì $n \in \mathbb{N}^*$ nên ta nhận $n = 30$.

Chọn đáp án A .... □

Câu 7. Cho (u_n) là cấp số cộng có $u_2 + u_9 = 15$. Tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó bằng

A. 150. **B.** 75. **C.** 120. **D.** 90.

Lời giải.

Ta có $u_2 + u_9 = 15 \Leftrightarrow u_1 + d + u_1 + 8d = 15 \Leftrightarrow 2u_1 + 9d = 15$.

Suy ra, $S_{10} = \dfrac{2u_1 + 9d}{2} \cdot 10 = \dfrac{15}{2} \cdot 10 = 75$.

Chọn đáp án B .... □

Câu 8. Cho (u_n) là cấp số cộng. Gọi S_n là tổng n số hạng đầu của cấp số đó. Biết $S_{10} = 365$, $S_{15} = 435$. Công thức của số hạng tổng quát u_n là

A. $u_n = 50 - 3n$. **B.** $u_n = 53 + 3n$. **C.** $u_n = 50 + 3n$. **D.** $u_n = 53 - 3n$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} S_{10} = 365 \\ S_{15} = 435 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{10(2u_1 + 9d)}{2} = 365 \\ \dfrac{15(2u_1 + 14d)}{2} = 435 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 9d = 73 \\ 2u_1 + 14d = 58 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 50 \\ d = -3. \end{cases}$

Vậy $u_n = u_1 + (n-1)d = 50 + (n-1) \cdot (-3) = 53 - 3n$.

Chọn đáp án D .... □

Câu 9. Cho dãy số (u_n) với $u_n = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. (u_n) không phải là cấp số nhân.

B. (u_n) là cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 3$ và công bội $q = \frac{1}{2}$.

C. (u_n) là cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = \frac{3}{4}$ và công bội $q = \frac{1}{2}$.

D. (u_n) là cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = \frac{3}{2}$ và công bội $q = \frac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $u_{n+1} = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$ và $u_n > 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Suy ra $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}}{3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}} = \frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Vậy (u_n) là cấp số nhân với số hạng đầu $u_1 = \frac{3}{4}$ và công bội $q = \frac{1}{2}$.

Chọn đáp án C .... □

Câu 10. Trong các dãy số (u_n) với số hạng tổng quát sau, dãy số nào là cấp số nhân?

A. $u_n = \frac{1}{5^n} - 1$. **B.** $u_n = \frac{1}{5}n - 1$. **C.** $u_n = \frac{1}{5^{n-1}}$. **D.** $u_n = \frac{1}{5n-1}$.

Lời giải.

Xét dãy số (u_n) với $u_n = \frac{1}{5^{n-1}}$ có $u_{n+1} = \frac{1}{5^n}$.

Suy ra $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{1}{5^n}}{\frac{1}{5^{n-1}}} = \frac{1}{5}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Vậy dãy số (u_n) với $u_n = \frac{1}{5^{n-1}}$ là cấp số nhân với số hạng đầu $u_1 = 1$ và công bội $q = \frac{1}{5}$.

Chọn đáp án C .... □

Câu 11. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = -1$, công bội $q = -\frac{1}{10}$. Số $-\frac{1}{10^{2\,024}}$ là số hạng thứ mấy của cấp số nhân?

A. Số hạng thứ 2 024. **B.** Số hạng thứ 2 025. **C.** Số hạng thứ 2 023. **D.** Số hạng thứ 2 026.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} u_n = u_1 \cdot q^{n-1} &\Leftrightarrow -1 \cdot \left(-\frac{1}{10}\right)^{n-1} = -\frac{1}{10^{2\,024}} \\ &\Leftrightarrow \left(-\frac{1}{10}\right)^{n-1} = \left(-\frac{1}{10}\right)^{2\,024} \\ &\Leftrightarrow n - 1 = 2\,024 \\ &\Leftrightarrow n = 2\,025. \end{aligned}$$

Vậy $-\frac{1}{10^{2\,024}}$ là số hạng thứ 2 025 của cấp số nhân.

Chọn đáp án B .... □

Câu 12. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = \frac{1}{3}$; $u_4 = -9$. Công bội q của cấp số nhân là

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $-\dfrac{1}{3}$. **C.** -3. **D.** 3.

Lời giải.

Ta có $u_4 = u_1 \cdot q^3 \Leftrightarrow -9 = \dfrac{1}{3} \cdot q^3 \Leftrightarrow q^3 = -27 \Leftrightarrow q = -3$.

Vậy cấp số nhân có công bội là $q = -3$.

Chọn đáp án C .... □

Câu 13. Cho dãy số (u_n) biết $u_1 = 2$ và $u_n = \dfrac{1}{2} \cdot u_{n-1}$ với $n \geq 2$. Số hạng tổng quát của dãy số là

A. $u_n = \dfrac{1}{2^{n-2}}$. **B.** $u_n = \dfrac{1}{2^{n-1}}$. **C.** $u_n = \dfrac{1}{2^n}$. **D.** $u_n = \dfrac{1}{2^{n+1}}$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{u_n}{u_{n-1}} = \dfrac{1}{2}, \forall n \geq 2$.

Suy ra (u_n) là cấp số nhân với số hạng đầu $u_1 = 2$ và công bội $q = \dfrac{1}{2}$.

Vậy số hạng tổng quát của dãy số là $u_n = u_1 \cdot q^{n-1} = 2 \cdot \dfrac{1}{2^{n-1}} = \dfrac{1}{2^{n-2}}$.

Chọn đáp án A .... □

Câu 14. Cho cấp số nhân (u_n) biết $u_2 \cdot u_5 = -243$. Tích $u_3 \cdot u_4$ bằng

A. -243. **B.** 81. **C.** 243. **D.** -81.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} u_2 = u_1 \cdot q \\ u_5 = u_1 \cdot q^4 \end{cases} \Rightarrow u_2 \cdot u_5 = u_1^2 \cdot q^5$.

Suy ra, $u_3 \cdot u_4 = u_1^2 \cdot q^5 = u_2 \cdot u_5 = -243$.

Chọn đáp án A .... □

Câu 15. Cho (u_n) là cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = -3$ công bội $q = -2$. Tổng 10 số hạng đầu của cấp số nhân đó là

A. $1\,023$. **B.** $-1\,025$. **C.** $1\,025$. **D.** $-1\,023$.

Lời giải.

Ta có công thức $S_n = \dfrac{u_1(1-q^n)}{1-q}$.

Với $n = 10$ ta có tổng 10 số hạng đầu của cấp số nhân đó là

$$S_{10} = \frac{u_1\left(1-q^{10}\right)}{1-q} = \frac{-3\left[1-(-2)^{10}\right]}{1-(-2)} = 1\,023.$$

Vậy tổng 10 số hạng đầu của cấp số nhân đó là $1\,023$.

Chọn đáp án A .... □

Câu 16. Cho bốn góc của một tứ giác tạo thành bởi cấp số nhân và góc lớn nhất gấp 27 lần góc nhỏ nhất. Tổng của góc lớn nhất và góc nhỏ nhất bằng

A. 243°. **B.** 252°. **C.** 102°. **D.** 168°.

Lời giải.

Giả sử bốn góc của tứ giác là a, aq, aq^2, aq^3 với a là góc nhỏ nhất và aq^3 là góc lớn nhất.

- Góc lớn nhất gấp 27 lần góc nhỏ nhất nên $aq^3 = 27a \Rightarrow q^3 = 27 \Rightarrow q = 3$.

- Tổng bốn góc của một tứ giác là 360° nên ta có $a + aq + aq^2 + aq^3 = 360^\circ$.

Thay $q = 3$ vào tổng các góc, ta được

$$\begin{aligned} a + 3a + 9a + 27a &= 360^\circ \\ 40a &= 360^\circ \\ a &= 9^\circ. \end{aligned}$$

Do đó, các góc lần lượt là 9°, 27°, 81°, 243°.

Tổng của góc lớn nhất và góc nhỏ nhất là $9^\circ + 243^\circ = 252^\circ$.

Vậy tổng của góc lớn nhất và góc nhỏ nhất bằng 252°.

Chọn đáp án B .... □

Dạng II. Câu trắc nghiệm đúng sai

Trong mỗi ý **a)**, **b)**, **c)**, **d)** *ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.*

Câu 17. Cho dãy số (u_n) có tổng n số hạng đầu được tính bởi công thức $S_n = n^2 - \frac{3}{2}n$.

a) Ta có $S_1 = -\frac{1}{2}$; $S_2 = 1$.

b) Số hạng thứ hai của dãy số là $u_2 = 1$.

c) Số hạng tổng quát của dãy số là $u_n = -\frac{5}{2} + 2n$.

d) Dãy số (u_n) là một cấp số cộng có công sai là 2.

Lời giải.

a) **Đúng**.
Vì $S_1 = 1^2 - \frac{3}{2} \cdot 1 = -\frac{1}{2}$; $S_2 = 2^2 - \frac{3}{2} \cdot 2 = 1$.

b) **Sai**.
Với $n \geq 2$ thì $u_n = S_n - S_{n-1}$. Do đó, $u_2 = S_2 - S_1 = \frac{3}{2}$.

c) **Đúng**.

Ta có

$$\begin{aligned} u_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= n^2 - \frac{3}{2}n - (n-1)^2 + \frac{3}{2}(n-1) \\ &= 2n - 1 - \frac{3}{2} = -\frac{5}{2} + 2n \text{ với } n \geq 2. \end{aligned}$$

d) **Đúng**.
Ta có $u_n = -\frac{5}{2} + 2n$, suy ra $u_{n+1} = -\frac{5}{2} + 2(n+1) = -\frac{1}{2} + 2n$.
Suy ra, $u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{2} + 2n + \frac{5}{2} - 2n = 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
Vậy (u_n) là một cấp số cộng có công sai là 2.

Chọn đáp án | a đúng | b sai | c đúng | d đúng | .... □

Câu 18. Cho dãy số (u_n) biết $u_1 = 1$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1-2u_n}$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Đặt $v_n = \dfrac{u_n+2}{u_n}$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

a) $v_1 = 3$.

b) Dãy số v_n là một cấp số cộng có công sai $d = 4$.

c) Công thức của số hạng tổng quát v_n là $v_n = 7 - 4n$.

d) Công thức của số hạng tổng quát u_n là $u_n = \dfrac{2}{7-4n}$.

Lời giải.

a) Đúng.

Vì $v_1 = \dfrac{u_1+2}{u_1} = 3$.

b) Sai.

Vì theo giả thiết, ta có $v_n = \dfrac{u_n+2}{u_n} = 1 + \dfrac{2}{u_n}$ nên $v_{n+1} = 1 + \dfrac{2}{u_{n+1}}$.

Do $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1-2u_n}$ nên $\dfrac{1}{u_{n+1}} = \dfrac{1}{u_n} - 2$. Suy ra $v_{n+1} = 1 + 2\left(\dfrac{1}{u_n} - 2\right)$.

Khi đó, $v_{n+1} - v_n = 1 + \dfrac{2}{u_n} - 4 - \left(1 + \dfrac{2}{u_n}\right) = -4$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Vậy dãy số (v_n) là một cấp số cộng có số hạng đầu $v_1 = 3$, công sai $d = -4$.

c) Đúng.

Vì $v_n = v_1 + (n-1)d = 3 + (n-1)(-4) = 7 - 4n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

d) Sai.

Vì $v_n = \dfrac{u_n+2}{u_n}$ suy ra $u_n = \dfrac{2}{v_n - 1} = \dfrac{2}{7-4n-1} = \dfrac{1}{3-2n}$.

Chọn đáp án | a đúng | b sai | c đúng | d sai | ☐

Câu 19. Cho dãy số (u_n) có tổng n số hạng đầu được tính bởi công thức $S_n = \dfrac{1-3^n}{2\cdot 3^{n-2}}$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Số hạng thứ nhất của dãy số là $u_1 = -3$.

b) Số hạng thứ hai của dãy số là $u_2 = -4$.

c) Số hạng tổng quát của dãy số là $u_n = \dfrac{1}{3^{n-2}}$.

d) Dãy số (u_n) là một cấp số nhân có công bội là $-\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

a) Đúng.

Vì $u_1 = S_1 = \dfrac{1-3^1}{2\cdot 3^{1-2}} = -3$.

b) Sai.

Vì $S_2 = u_1 + u_2 = -4$ nên $u_2 = S_2 - S_1 = -1$.

c) Sai.

Vì ta có $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = S_{n-1} + u_n$ nên $u_n = S_n - S_{n-1}$.

Đầu tiên, ta có $S_{n-1} = \dfrac{1-3^{n-1}}{2\cdot 3^{n-3}} = \dfrac{3\cdot\left(1-3^{n-1}\right)}{3\cdot 2\cdot 3^{n-3}} = \dfrac{3-3^n}{2\cdot 3^{n-2}}$ và $S_n = \dfrac{1-3^n}{2\cdot 3^{n-2}}$.

Suy ra

$$\begin{aligned}u_n &= S_n - S_{n-1}\\ &= \frac{1-3^n}{2\cdot 3^{n-2}} - \frac{3-3^n}{2\cdot 3^{n-2}}\\ &= \frac{1-3^n-(3-3^n)}{2\cdot 3^{n-2}}\\ &= \frac{-2}{2\cdot 3^{n-2}}\\ &= -\frac{1}{3^{n-2}}.\end{aligned}$$

Điều này cho thấy $u_n = -\dfrac{1}{3^{n-2}}$.

d) Sai.

Vì ta có $u_n = u_{n-1}\cdot\dfrac{1}{3}$ với mọi $n \geq 2$.

Vậy nên dãy số (u_n) là một cấp số nhân có số hạng đầu là $u_1 = -3$ và cộng bội $q = \dfrac{1}{3}$.

Chọn đáp án | a đúng | b sai | c sai | d sai | .... □

Câu 20. Cho dãy số (u_n), biết $u_1 = -17$, $u_{n+1} = 5u_n - 12$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Đặt $v_n = \dfrac{3-u_n}{2}$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

a $v_1 = 10$.

b) Dãy số (v_n) là một cấp số nhân có công bội bằng $\dfrac{1}{5}$.

c) Công thức của số hạng tổng quát v_n là $v_n = \dfrac{2}{5^n}$.

d Công thức của số hạng tổng quát u_n là $u_n = 3 - 4\cdot 5^n$.

Lời giải.

Ta có $v_1 = \dfrac{3-u_1}{2} = 10$,

$$v_{n+1} = \frac{3-u_{n+1}}{2} = \frac{3-(5u_n-12)}{2} = \frac{5(3-u_n)}{2} = 5v_n \text{ với } n \in \mathbb{N}^*.$$

Vậy (v_n) là dãy cấp số nhân có số hạng đầu $v_1 = 10$ và công bội bằng $q = 5$.

a) Đúng.

Vì $v_1 = 10$.

b) Sai.

Vì $q = 5$.

c) Sai.

Công thức tổng quát dãy (v_n) là $v_n = 10\cdot 5^{n-1} = 2\cdot 5^n$.

d) Đúng.

Công thức tổng quát của dãy (v_n) là $v_n = 2\cdot 5^n$.

Nên công thức tổng quát dãy (u_n) là $u_n = 3 - 2\cdot v_n = 3 - 4\cdot 5^n$.

Chọn đáp án | a đúng | b sai | c sai | d đúng | ...... □

Dạng III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 21. Một nhà thi đấu có 20 hàng ghế dành cho khán giả. Hàng thứ nhất có 30 ghế, hàng thứ hai có 31 ghế, hàng thứ ba có 32 ghế,... Cứ như thế, số ghế ở hàng sau nhiều hơn số ghế ở hàng ngay trước là 1 ghế. Trong một giải thi đấu, ban tổ chức đã bán được hết số vé phát ra và số tiền thu được từ bán vé là 63 200 000 đồng. Tính giá tiền của mỗi vé (đơn vị: nghìn đồng), biết số vé bán ra bằng số ghế dành cho khán giả của nhà thi đấu và các vé là đồng giá. Đáp án: 80

Lời giải.

Số ghế ở mỗi hàng lập thành một cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 30$, công sai $d = 1$.

Cấp số cộng này có 20 số hạng. Do đó, tổng số ghế trong nhà thi đấu là

$$S_{20} = \frac{[2 \cdot 30 + (20-1) \cdot 1] \cdot 20}{2} = 790 \text{ (ghế)}.$$

Vì số vé bán ra bằng số ghế dành cho khán giả của nhà thi đấu nên có 790 vé được bán ra.

Vậy giá tiền của một vé là $63\,200\,000 : 790 = 80\,000$ (đồng) $= 80$ (nghìn đồng).

Câu 22. Cho tập hợp A gồm 99 số tự nhiên liên tiếp khác nhau $A = \{1; 2; 3; \ldots; 99\}$. Tìm số cách chọn ba số khác nhau từ tập hợp A để ba số đó lập thành cấp số cộng. Đáp án: 2 401

Lời giải.

Gọi a, b, c theo thứ tự lập thành cấp số cộng (a, b, $c \in A$).

Khi đó, $b - a = c - b$ hay $2b = a + c$.

Do đó, a và c phải cùng là số chẵn hoặc cùng là số lẻ nên số cách chọn hai số a, c cùng chẵn hoặc cùng lẻ là: $\mathrm{C}_{49}^2 + \mathrm{C}_{50}^2 = 1\,176 + 1\,225 = 2\,401$.

Với mỗi cách chọn hai số a, c có duy nhất một cách chọn số b.

Vậy số cách chọn ba số khác nhau từ tập hợp A để ba số đó lập thành cấp số cộng là 2 401.

Câu 23. Anh Minh kí hợp đồng lao động có thời hạn ở một công ty với phương án trả lương như sau: Quý thứ nhất, tiền lương là 27 triệu. Kể từ quý thứ hai trở đi, mỗi quý tiền lương được tăng 2,1 triệu. Tổng số tiền lương anh nhận được trong các năm đã đi làm là 684 triệu đồng. Hỏi anh Minh đã làm ở công ty đó bao nhiêu năm? Đáp án: 4

Lời giải.

Gọi số năm đã đi làm của anh Minh ở công ty đó là n với $n \in \mathbb{N}^*$. Số quý làm việc là $4n$.

Khi đó, tổng số tiền thu được của anh Minh trong n năm đi làm là

$$S = \frac{[2 \cdot 27 + (4n-1) \cdot 2{,}1] \cdot 4n}{2} = 684 \Leftrightarrow 84n^2 + 519n - 3\,420 = 0$$
$$\Leftrightarrow n = 4 \text{ hoặc } n = \frac{-285}{28}.$$

Do n nguyên dương nên $n = 4$ năm.

Câu 24. Một quả bóng được thả thẳng đứng từ độ cao 10m rơi xuống đất và nảy lên. Giả sử sau mỗi một lần rơi xuống, nó nảy lên được một độ cao bằng 75% độ cao vừa rơi xuống. Tính tổng quãng đường quả bóng di chuyển được kể từ lúc thả xuống đến khi quả bóng chạm đất lần thứ 10 (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của mét). **Đáp án: 65,5**

Lời giải.

Gọi u_n (m) là độ cao mà quả bóng đạt được sau khi nảy lên ở lần thứ n.

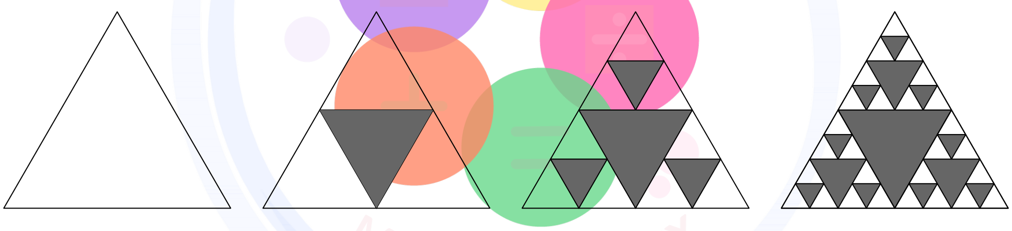
Ta có $u_1 = 10 \cdot 0{,}75 = 7{,}5$. Ta có, dãy (u_n) lập thành cấp số nhân có $u_1 = 7{,}5$ và công bội $q = 0{,}75$.

Kể từ lúc thả xuống đến khi quả bóng chạm đất lần thứ 10, quả bóng đã được nảy lên 9 lần rồi lại rơi xuống.

Do quãng đường quả bóng nảy lên và rơi xuống bằng nhau nên tổng quãng đường quả bóng di chuyển được kể từ lúc thả xuống đến khi quả bóng chạm đất lần thứ 10 là

$$S = 10 + 2(u_1 + u_2 + \cdots + u_9) = 10 + 2 \cdot 7{,}5 \cdot \frac{1 - (0{,}75)^9}{1 - 0{,}75} \approx 65{,}5 \text{ (m)}.$$

Câu 25. Một tam giác đều có cạnh bằng 4 cm. Chia tam giác đều đó thành 4 tam giác đều bằng nhau và tô màu tam giác ở trung tâm. Với mỗi tam giác nhỏ chưa được tô màu, lại chia thành 4 tam giác đều bằng nhau và tô màu tam giác ở trung tâm (Hình 1). Cứ như thế, quá trình trên được lặp lại. Tính tổng diện tích phần đã được tô màu ở hình tô thứ 5 (đơn vị: cm^2, làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



Hình 1

Đáp án: 5,28

Lời giải.

Gọi u_n là diện tích phần không được tô màu ở hình tô thứ n.

S_0 là diện tích của tam giác ban đầu.

Ta có $u_1 = \dfrac{3}{4} \cdot S_0$.

Do ở hình tô thứ n, diện tích phần không được tô màu bằng $\dfrac{3}{4}$ diện tích phần không được tô màu ở hình tô trước đó nên dãy (u_n) lập thành cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = \dfrac{3}{4} \cdot S_0$, công bội $q = \dfrac{3}{4}$.

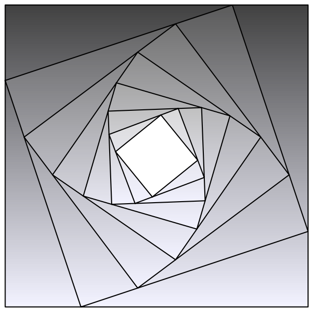
Do đó,

$$u_n = \frac{3}{4} \cdot S_0 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} = S_0 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

Vậy diện tích phần đã được tô màu ở hình tô thứ n là $S_n = S_0 \left[1 - \left(\dfrac{3}{4}\right)^n\right]$.

Thay $n = 5$, ta được $S_5 = 4\sqrt{3} \cdot \left(1 - 0{,}75^5\right) \approx 5{,}28$ (cm^2).

Câu 26. Cho hình vuông C_1 có cạnh bằng 4 cm. Người ta chia mỗi cạnh hình vuông C_1 thành bốn phần bằng nhau và nối các điểm chia một cách thích hợp để có hình vuông C_2. Từ hình vuông C_2 lại làm tiếp tục như trên để có hình vuông C_3. Cứ tiếp tục quá trình như trên, ta nhận được dãy các hình vuông C_1, C_2, C_3, ..., C_n, ... như Hình 2. Tính diện tích của hình vuông thứ 6 (đơn vị: cm^2, làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



Hình 2

Đáp án: 1,53

Lời giải.

Gọi a_n (cm) là độ dài cạnh hình vuông thứ n. Ta có

$$a_1 = 4, a_2 = \sqrt{\left(\frac{a_1}{4}\right)^2 + \left(\frac{3a_1}{4}\right)^2} = a_1 \cdot \frac{\sqrt{10}}{4}.$$

Cứ như thế, dãy (a_n) lập thành cấp số nhân có công bội $q = \dfrac{\sqrt{10}}{4}$. Do đó, ta suy ra

$$a_n = 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{10}}{4}\right)^{n-1}.$$

Vậy diện tích hình vuông thứ 6 là $a_6^2 \approx 1{,}53$ (cm^2).

BẢNG ĐÁP ÁN

PHẦN I.

Câu 1. A	Câu 2. B	Câu 3. A	Câu 4. B	Câu 5. B	Câu 6. A
Câu 7. B	Câu 8. D	Câu 9. C	Câu 10. C	Câu 11. B	Câu 12. C
Câu 13. A	Câu 14. A	Câu 15. A	Câu 16. B		

PHẦN II.

Câu 17. a Đ b S c Đ d Đ	Câu 18. a Đ b S c Đ d S
Câu 19. a Đ b S c S d S	Câu 20. a Đ b S c S d Đ

PHẦN III.

Câu 21. 80	Câu 22. 2401	Câu 23. 4	Câu 24. 65,5	Câu 25. 5,28	Câu 26. 1,53

CHỦ ĐỀ 3. ĐẠO HÀM VÀ KHẢO SÁT HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. ĐẠO HÀM

1. Định nghĩa

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(a;b)$ và điểm x_0 thuộc khoảng đó. Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}$ thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm của hàm số $y=f(x)$ tại x_0 và được kí hiệu là $f'\left(x_0\right)$ hoặc y'_{x_0}.

2. Ý nghĩa vật lí của đạo hàm

Đạo hàm xuất hiện trong nhiều khái niệm Vật lí. Chẳng hạn: Xét chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s=s(t)$, với $s=s(t)$ là một hàm số có đạo hàm. Vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t_0 là đạo hàm của hàm số $s=s(t)$ tại t_0: $v\left(t_0\right)=s'\left(t_0\right)$.

3. Ý nghĩa hình học của đạo hàm

- Đạo hàm của hàm số $y=f(x)$ tại điểm x_0 là hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số đó tại điểm $M_0\big(x_0;f(x_0)\big)$.
- Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm $M_0\big(x_0;f(x_0)\big)$ là

$$y=f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)+f\left(x_0\right).$$

4. Đạo hàm của hàm hợp

Nếu hàm số $u=g(x)$ có đạo hàm tại x là u'_x và hàm số $y=f(u)$ có đạo hàm tại u là y'_u thì hàm hợp $y=f(g(x))$ có đạo hàm tại x là $y'_x=y'_u\cdot u'_x$.

5. Đạo hàm của một số hàm số

Đạo hàm của hàm số sơ cấp cơ bản thường gặp	**Đạo hàm của hàm hợp (ở đây $u=u(x)$)**
$(x^n)'=n\cdot x^{n-1}$	$(u^n)'=n\cdot u^{n-1}\cdot u'$
$\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^2}$	$\left(\dfrac{1}{u}\right)'=-\dfrac{u'}{u^2}$
$(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{u})'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
$(\sin x)'=\cos x$	$(\sin u)'=u'\cdot\cos u$
$(\cos x)'=-\sin x$	$(\cos u)'=-u'\cdot\sin u$
$(\tan x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$(\tan u)'=\dfrac{u'}{\cos^2 u}$

Đạo hàm của hàm số sơ cấp cơ bản thường gặp	Đạo hàm của hàm hợp (ở đây $u = u(x)$)
$(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$(\cot u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$
$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$	$(\mathrm{e}^u)' = u' \cdot \mathrm{e}^u$
$(a^x)' = a^x \ln a$	$(a^u)' = u' \cdot a^u \ln a$
$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$
$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$	$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a}$

6. Đạo hàm của tổng, hiệu, tích, thương

Định lí: Giả sử $f = f(x)$, $g = g(x)$ là các hàm số có đạo hàm tại điểm x thuộc khoảng xác định. Ta có

- $(f + g)' = f' + g'$;
- $(f - g)' = f' - g'$;
- $(fg)' = f'g + fg'$;
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2} \quad (g = g(x) \neq 0)$.

Hệ quả: Cho $f = f(x)$ là hàm số có đạo hàm tại điểm x thuộc khoảng xác định.

- Nếu c là một hằng số thì $(cf)' = cf'$.
- $\left(\dfrac{1}{f}\right)' = -\dfrac{f'}{f^2} \quad (f = f(x) \neq 0)$.

II. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

1. Định lí

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên tập $K \subset \mathbb{R}$, trong đó K là một khoảng, đoạn hoặc nửa khoảng. Nếu $f'(x) \geq 0$ $\big($hoặc $f'(x) \leq 0\big)$ với mọi x thuộc K và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm của K thì hàm số $f(x)$ đồng biến (hoặc nghịch biến) trên K.

2. Các bước để tìm khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số $f(x)$

Bước 1. Tìm tập xác định của hàm số $y = f(x)$.

Bước 2. Tính đạo hàm $f'(x)$. Tìm các điểm x_i, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ mà tại đó hàm số có đạo hàm bằng 0 hoặc không tồn tại.

Bước 3. Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên.

Bước 4. Căn cứ vào bảng biến thiên, nêu kết luận về các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.

Chú ý: Ta cũng có thể nhận biết tính đơn điệu của hàm số bằng cách quan sát hình dáng của đồ thị đi lên (hàm số đồng biến) hoặc đi xuống (hàm số nghịch biến).

III. ĐIỂM CỰC TRỊ, GIÁ TRỊ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

1. Định nghĩa

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên tập $K \subset \mathbb{R}$, trong đó K là một khoảng, đoạn hoặc nửa khoảng và $x_0 \in K$, $x_1 \in K$.

- x_0 được gọi là một điểm cực đại của hàm số đã cho nếu tồn tại một khoảng $(a; b)$ chứa điểm x_0 sao cho $(a; b) \subset K$ và $f(x) < f(x_0)$ với mọi $x \in (a; b)$ và $x \neq x_0$.
  Khi đó, $f(x_0)$ được gọi là giá trị cực đại của hàm số đã cho, kí hiệu là $f_{\text{CĐ}}$.

- x_1 được gọi là một điểm cực tiểu của hàm số đã cho nếu tồn tại một khoảng $(c; d)$ chứa điểm x_1 sao cho $(c; d) \subset K$ và $f(x) > f(x_1)$ với mọi $x \in (c; d)$ và $x \neq x_1$.
  Khi đó, $f(x_1)$ được gọi là giá trị cực tiểu của hàm số đã cho, kí hiệu là f_{CT}.

- Điểm cực đại và điểm cực tiểu được gọi chung là điểm cực trị. Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu được gọi chung là giá trị cực trị (hay cực trị).

Chú ý: Nếu x_0 là một điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ thì điểm $M\big(x_0; f(x_0)\big)$ được gọi là điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

2. Dấu hiệu nhận biết về cực trị của hàm số bằng đạo hàm

Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(a; b)$ chứa điểm x_0 và có đạo hàm trên các khoảng $(a; x_0)$ và $(x_0; b)$. Khi đó:

- Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (a; x_0)$ và $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (x_0; b)$ thì hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm x_0.

- Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (a; x_0)$ và $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (x_0; b)$ thì hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm x_0.

3. Các bước để tìm điểm cực trị của hàm số $f(x)$

Bước 1. Tìm tập xác định của hàm số $f(x)$.

Bước 2. Tính đạo hàm $f'(x)$. Tìm các điểm $x_i\,(i = 1, 2, \ldots, n)$ mà tại đó hàm số có đạo hàm bằng 0 hoặc không tồn tại.

Bước 3. Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên.

Bước 4. Căn cứ vào bảng biến thiên, nêu kết luận về các điểm cực trị của hàm số.

IV. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

1. Định nghĩa

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập $\mathscr{D}$.

- Số M được gọi là giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên $\mathscr{D}$, kí hiệu $M = \max\limits_{\mathscr{D}} f(x)$, nếu $f(x) \leq M$ với mọi $x \in \mathscr{D}$ và tồn tại $x_0 \in \mathscr{D}$ sao cho $f(x_0) = M$.
- Số m được gọi là giá tri nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên $\mathscr{D}$, kí hiệu $m = \min\limits_{\mathscr{D}} f(x)$, nếu $f(x) \geq m$ với mọi $x \in \mathscr{D}$ và tồn tại $x_1 \in \mathscr{D}$ sao cho $f(x_1) = m$.

2. Cách tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng đạo hàm

Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$, có thể trừ một số hữu hạn điểm. Nếu $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm thuộc khoảng $(a; b)$ thì ta có quy tắc tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$ như sau:

Bước 1. Tìm các điểm $x_1, x_2, \ldots, x_n$ thuộc khoảng $(a; b)$ mà tại đó hàm số có đạo hàm bằng 0 hoặc không tồn tại.

Bước 2. Tính $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), f(a)$ và $f(b)$.

Bước 3. So sánh các giá trị tìm được ở Bước 2.
Số lớn nhất trong các giá trị đó là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$,
số nhỏ nhất trong các giá trị đó là giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.

V. ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

1. Đường tiệm cận ngang

Đường thẳng $y = y_0$ được gọi là đường tiệm cận ngang (hay tiệm cận ngang) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = y_0 \text{ hoặc } \lim_{x \to -\infty} f(x) = y_0.$$

2. Đường tiệm cận đứng

Đường thẳng $x = x_0$ được gọi là đường tiệm cận đứng (hay tiệm cận đứng) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thoả mãn
hoặc $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$ hoặc $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$ hoặc $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$ hoặc $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$.

3. Đường tiệm cận xiên

Đường thẳng $y = ax + b\,(a \neq 0)$ được gọi là đường tiệm cận xiên (hay tiệm cận xiên) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu

$$\lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - (ax + b)\right] = 0 \text{ hoặc } \lim_{x \to -\infty} \left[f(x) - (ax + b)\right] = 0.$$

VI. SƠ ĐỒ KHẢO SÁT HÀM SỐ

Bước 1: Tìm tập xác định của hàm số.

Bước 2: Xét sự biến thiên của hàm số

- Tìm các giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và tìm các đường tiệm cận của đồ thị (nếu có).

- Lập bảng biến thiên của hàm số, bao gồm: Tính đạo hàm của hàm số, xét dấu đạo hàm, xét chiều biến thiên và tìm cực trị của hàm số (nếu có), điền các kết quả vào bảng.

Bước 3: Vẽ đồ thị hàm số

- Vẽ các đường tiệm cận (nếu có).
- Xác định các điểm đặc biệt của đồ thị: Cực trị, giao điểm của đồ thị với các trục toạ độ (trong trường hợp đơn giản), ...
- Nhận xét về đặc điểm của đồ thị: Chỉ ra tâm đối xứng, trục đối xứng (nếu có).

B. MỘT SỐ VÍ DỤ

Dạng I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ lựa chọn một phương án.

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thoả mãn $f'(1) = 2$. Giá trị của biểu thức $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ bằng

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** 2. **C.** -2. **D.** $\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1) = 2$.

Chọn đáp án B .... □

Ví dụ 2. Đạo hàm của hàm số $y = \cos 2x$ là

A. $\sin 2x$. **B.** $-\sin 2x$. **C.** $-2\sin 2x$. **D.** $2\cos 2x$.

Lời giải.

Ta có $(\cos 2x)' = -2\sin 2x$.

Chọn đáp án C .... □

Ví dụ 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thoả mãn $f'(x) < 0$, $\forall x \in (1;2)$ và $f'(x) > 0$, $\forall x \in (2;3)$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên cả hai khoảng $(1;2)$ và $(2;3)$.

B. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên cả hai khoảng $(1;2)$ và $(2;3)$.

C. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;2)$ và nghịch biến trên khoảng $(2;3)$.

D. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1;2)$ và đồng biến trên khoảng $(2;3)$.

Lời giải.

Vì $f'(x) < 0$, $\forall x \in (1;2)$ và $f'(x) > 0$, $\forall x \in (2;3)$ nên hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1;2)$ và đồng biến trên khoảng $(2;3)$.

Chọn đáp án D .... □

Dạng II. Câu trắc nghiệm đúng sai

Trong mỗi ý **a)**, **b)**, **c)**, **d)** *ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.*

Ví dụ 4. Cho các hàm số $f(x)$ và $g(x)$ thoả mãn $f'(x) = 2x + 1$ và $g'(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

a $[f(x) + g(x)]' = 3x + 1$. **b** $[f(x) - g(x)]' = x + 1$.

c) $\left[5f(x)\right]' = 2x+6$.

d) $\left[-7g(x)\right]' = -7+x$.

Lời giải.

a) **Đúng**.

Ta có $\left[f(x)+g(x)\right]' = f'(x)+g'(x) = 2x+1+x = 3x+1$.

b) **Đúng**.

Ta có $\left[f(x)-g(x)\right]' = f'(x)-g'(x) = 2x+1-x = x+1$.

c) **Sai**.

Ta có $\left[5f(x)\right]' = 5f'(x) = 5(2x+1) = 10x+5$.

d) **Sai**.

Ta có $\left[-7g(x)\right]' = -7g'(x) = -7x$.

Chọn đáp án | a đúng | b đúng | c sai | d sai | .... □

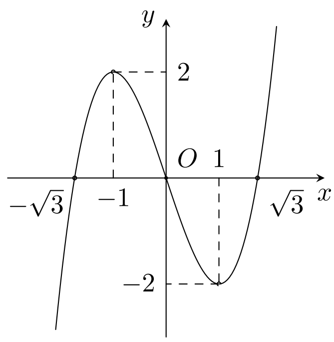
Ví dụ 5. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x$.

a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

b) $f'(x) = 3x^2 + 3$.

c) $f'(x) < 0$ khi $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$, $f'(x) > 0$ khi $x \in (-1; 1)$.

d) Hàm số đã cho có đồ thị như ở hình bên.



Lời giải.

a) **Đúng**.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

b) **Sai**.

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 3$.

c) **Sai**.

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 3$. Xét phương trình $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1. \end{array}\right.$

Bảng xét dấu của hàm số $y = f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu, ta suy ra $f'(x) > 0$ khi $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ và $f'(x) < 0$ khi $x \in (-1; 1)$.

d) **Đúng**.

- Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

- Ta có $y' = 3x^2 - 3$.

Phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1. \end{array}\right.$

- Giới hạn tại vô cực: $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} y = -\infty$.

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

- Các điểm đặc biệt:

+ Giao điểm của đồ thị với trục tung $(0;0)$.

+Giao điểm của đồ thị với trục hoành tại $x = 0$ hoặc $x = \pm\sqrt{3}$.

Vậy đồ thị hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x$ là đường cong như hình vẽ.

Chọn đáp án | a đúng | b sai | c sai | d đúng | .... □

Dạng III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Ví dụ 6. Biết rằng $(\sin x + \cos x)' = a \sin x + b \cos x$ với a, b là các hằng số thực. Giá trị của $a - 2b$ là bao nhiêu?

Đáp án: -3

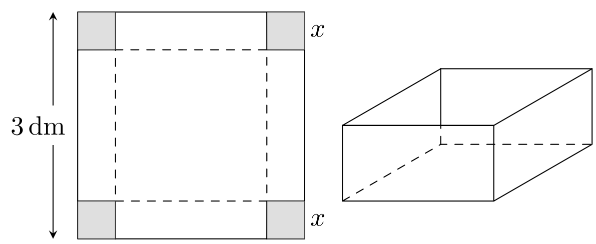
Lời giải.

Ta có $(\sin x + \cos x)' = (\sin x)' + (\cos x)' = \cos x - \sin x = (-1) \cdot \sin x + 1 \cdot \cos x$.

Suy ra $a = -1$, $b = 1$.

Vậy $a - 2b = -3$.

Ví dụ 7. Cho một tấm nhôm có dạng hình vuông cạnh 3 dm. Bác Tùng cắt ở bốn góc bốn hình vuông cùng có độ dài cạnh bằng x dm, rồi gập tấm nhôm lại như hình bên để được một cái hộp có dạng hình hộp chữ nhật không có nắp. Gọi V là thể tích của khối hộp đó tính theo x dm. Giá trị lớn nhất của V là bao nhiêu decimét khối?



Đáp án: 2

Lời giải.

Ta thấy độ dài x dm của cạnh hình vuông bị cắt thoả mãn điều kiện $0 < x < 1{,}5$.

Thể tích của khối hộp là $V(x) = x(3 - 2x)^2$ với $0 < x < 1{,}5$.

Ta phải tìm $x_0 \in (0; 1{,}5)$ sao cho $V(x_0)$ có giá trị lớn nhất.

Ta có $V'(x) = (3 - 2x)^2 - 4x(3 - 2x) = (3 - 2x)(3 - 6x) = 3(3 - 2x)(1 - 2x)$.

Trên khoảng $(0; 1{,}5)$, ta có $V'(x) = 0$ khi $x = 0{,}5$.

Bảng biến thiên của hàm số $V(x)$

x	0		$0{,}5$		$1{,}5$
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

Căn cứ bảng biến thiên, ta thấy

Trên khoảng $(0; 1{,}5)$, hàm số $V(x)$ đạt giá trị lớn nhất bằng 2 tại $x = 0{,}5$.

Vậy giá trị lớn nhất của V là 2 dm^3.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Dạng I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ lựa chọn một phương án.

Câu 1. Đạo hàm của hàm số $y = \cot 3x$ là

A. $\dfrac{-1}{\sin^2 3x}$. **B.** $\dfrac{3}{\sin^2 3x}$. **C.** $\dfrac{-3}{\sin^2 3x}$. **D.** $\dfrac{1}{\sin^2 3x}$.

Lời giải.

Ta có $y' = (\cot 3x)' = -\dfrac{3}{\sin^2 3x}$.

Chọn đáp án C ☐

Câu 2. Đạo hàm của hàm số $y = 5^x$ là

A. $5^x \cdot \log 5$. **B.** $5^x \cdot \ln 5$. **C.** 5^{x-1}. **D.** $x \cdot 5^{x-1}$.

Lời giải.

Ta có $y' = (5^x)' = 5^x \cdot \ln 5$.

Chọn đáp án B ☐

Câu 3. Đạo hàm của hàm số $y = \log_5 x$ là

A. $\dfrac{1}{x \log 5}$. **B.** $5^x \cdot \ln 5$. **C.** $\dfrac{1}{x}$. **D.** $\dfrac{1}{x \ln 5}$.

Lời giải.

Ta có $y' = (\log_5 x)' = \dfrac{1}{x \ln 5}$.

Chọn đáp án D ☐

Câu 4. Cho các hằng số a, b, c, d khác 0. Đạo hàm của hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ là

A. $y' = \dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$. **B.** $y' = \dfrac{ad+bc}{(cx+d)^2}$. **C.** $y' = \dfrac{ac-bd}{(cx+d)^2}$. **D.** $y' = \dfrac{ac+bd}{(cx+d)^2}$.

Lời giải.

Ta có $y' = \left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)' = \dfrac{a(cx+d)-c(ax+b)}{(cx+d)^2} = \dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$.

Chọn đáp án A ☐

Câu 5. Đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{x^2-2x-3}$ là

A. $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2-2x-3}}$. **B.** $y' = \dfrac{x-1}{2\sqrt{x^2-2x-3}}$.

C. $y' = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x-3}}$. **D.** $y' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x-3}}$.

Lời giải.

Ta có $y' = \left(\sqrt{x^2-2x-3}\right)' = \dfrac{\left(x^2-2x-3\right)'}{2\sqrt{x^2-2x-3}} = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x-3}}$.

Chọn đáp án C .... □

Câu 6. Tập xác định của hàm số $y = \dfrac{x-2}{x+2}$ là

A. $(-\infty;-2)\cap(-2;+\infty)$. **B.** $(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$.

C. $(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$. **D.** $(-\infty;-2)\cup(-2;+\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện $x+2\neq 0 \Rightarrow x\neq -2$.

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = (-\infty;-2)\cup(-2;+\infty)$.

Chọn đáp án D .... □

Câu 7. Cho các hằng số a, b, c, d khác 0 thoả mãn $ad-bc\neq 0$. Đồ thị của hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang là

A. $x = \dfrac{d}{c}$, $y = \dfrac{a}{c}$. **B.** $x = -\dfrac{d}{c}$, $y = \dfrac{a}{c}$. **C.** $x = -\dfrac{d}{c}$, $y = \dfrac{b}{d}$. **D.** $x = -\dfrac{b}{a}$, $y = \dfrac{b}{d}$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} y = \dfrac{a}{c}$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \dfrac{a}{c}$ nên đồ thị của hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ có tiệm cận ngang là $y = \dfrac{a}{c}$; $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{d}{c}\right)^+} y = +\infty$ hoặc $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{d}{c}\right)^+} y = -\infty$ và $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{d}{c}\right)^-} y = +\infty$ hoặc $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{d}{c}\right)^-} y = -\infty$ nên đồ thị của hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đường tiệm cận đứng là $x = -\dfrac{d}{c}$.

Chọn đáp án B .... □

Câu 8. Cho các hằng số a, b, c, d, m khác 0 thỏa mãn $ad-bc\neq 0$. Đồ thị hàm số $y = ax+b+\dfrac{m}{cx+d}$ có đường tiệm cận xiên là

A. $y = cx+d$. **B.** $y = a+bx$. **C.** $y = c+dx$. **D.** $y = ax+b$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[y-(ax+b)\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{m}{cx+d} = 0$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[y-(ax+b)\right] = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{m}{cx+d} = 0$.
Vậy $y = ax+b$ là đường tiệm cận xiên.

Chọn đáp án D .... □

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x) > 0$, $\forall x\in(0;1)$ và $f'(x) < 0$, $\forall x\in(1;2)$. Phát biểu nào sau đây đúng?

A. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên các khoảng $(0;1)$ và $(1;2)$.

B. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(0;1)$ và $(1;2)$.

C. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$ và nghịch biến trên khoảng $(1;2)$.

D. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$ và đồng biến trên khoảng $(1;2)$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) > 0$, $\forall x \in (0;1)$ nên hàm số đồng biến trên khoảng $(0;1)$.

$f'(x) < 0$, $\forall x \in (1;2)$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;2)$.

Chọn đáp án C .... □

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x) = x^2 - 5x - 6, \forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

A. $(0;3)$. **B.** $(-6;1)$. **C.** $(-\infty;-1)$. **D.** $(6;+\infty)$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 6. \end{array}\right.$

Bảng xét dấu $f'(x)$

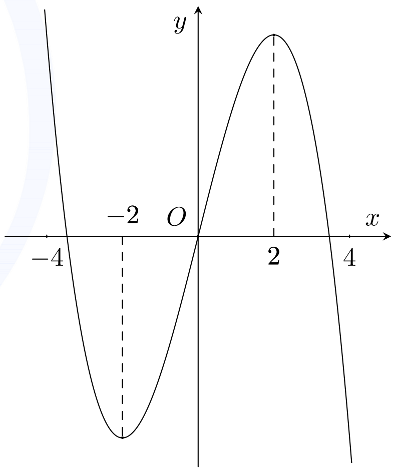
x	$-\infty$		-1		6		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu ta có hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;6)$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;3)$.

Chọn đáp án A .... □

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-4;2)$. **B.** $(0;4)$. **C.** $(-2;0)$. **D.** $(-4;4)$.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta thấy hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;2)$ nên suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;0)$.

Chọn đáp án C .... □

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0;2)$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $(-\infty;0)$. **D.** $(-\infty;2)$.

Lời giải.

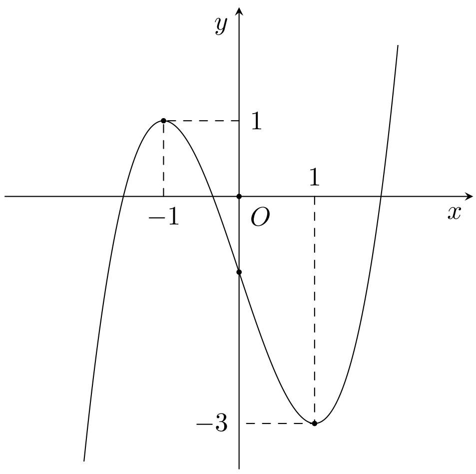
Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

Chọn đáp án (A) .... $\square$

Câu 13. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. $x_{\text{CT}}=-1$, $x_{\text{CĐ}}=1$. **B.** $x_{\text{CT}}=-3$, $x_{\text{CĐ}}=1$.

C. $x_{\text{CT}}=1$, $x_{\text{CĐ}}=-3$. **D.** $x_{\text{CT}}=1$, $x_{\text{CĐ}}=-1$.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta thấy hàm số có $x_{\text{CT}}=1$, $x_{\text{CĐ}}=-1$.

Chọn đáp án (D) .... $\square$

Câu 14. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)<f(0)$, $\forall x\in(-1;1)\setminus\{0\}$ và $f(x)>f(2)$, $\forall x\in(1;3)\setminus\{2\}$. Phát biểu nào sau đây **đúng**?

A. $x_{\text{CT}}=0, x_{\text{CĐ}}=2$. **B.** $x_{\text{CT}}=2, x_{\text{CĐ}}=0$.

C. $x_{\text{CT}}=-1, x_{\text{CĐ}}=3$. **D.** $x_{\text{CT}}=3, x_{\text{CĐ}}=-1$.

Lời giải.

Ta có $f(x)<f(0)$, $\forall x\in(-1;1)\setminus\{0\}$ nên hàm số đạt cực đại tại $x=0$.

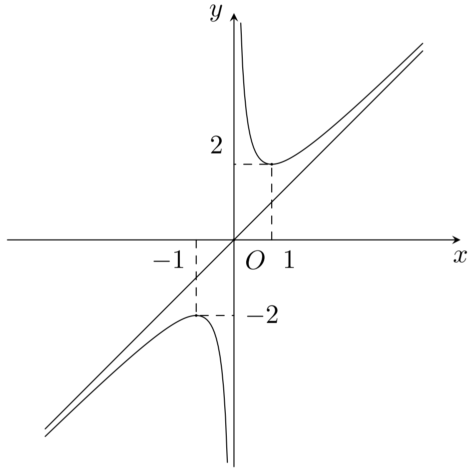
$f(x)>f(2)$, $\forall x\in(1;3)\setminus\{2\}$ nên hàm số đạt cực tiểu tại $x=2$.

Chọn đáp án (B) .... $\square$

Câu 15. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. $y_{\text{CT}}=1, y_{\text{CĐ}}=2$. **B.** $y_{\text{CT}}=2, y_{\text{CĐ}}=-1$.

C. $y_{\text{CT}}=-2, y_{\text{CĐ}}=2$. **D.** $y_{\text{CT}}=2, y_{\text{CĐ}}=-2$.

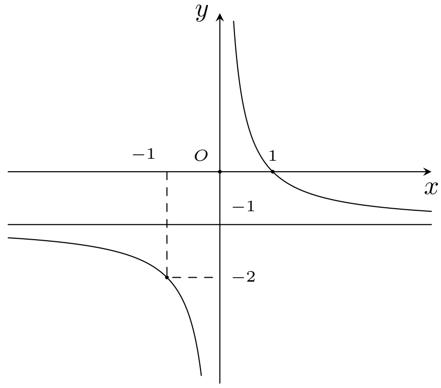


Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta thấy hàm số có $y_{\text{CT}}=2, y_{\text{CĐ}}=-2$.

Chọn đáp án (D) .... $\square$

Câu 16. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Phát biểu nào sau đây là đúng?



A. Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x = -1$, đường tiệm cận ngang $y = 0$.

B. Đồ thị hàm số có đương tiệm cận đứng $x = -1$, đường tiệm cận ngang $y = -1$.

C. Đồ thị hàm số có đương tiệm cận đứng $x = 0$, đường tiệm cận ngang $y = 0$.

D. Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x = 0$, đường tiệm cận ngang $y = -1$.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta thấy hàm số có đường tiệm cận đứng $x = 0$, đường tiệm cận ngang $y = -1$.

Chọn đáp án D .... □

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$	1 ↘		$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1

Đường tiệm cận ngang, tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

A. $x = 1$, $y = 1$. **B.** $x = 1$, $y = 2$. **C.** $x = 2$, $y = 1$. **D.** $x = 2$, $y = 2$.

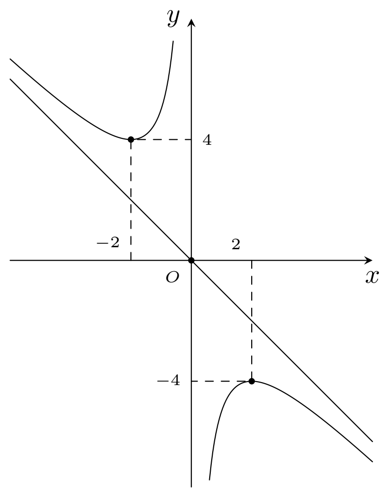
Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $\lim\limits_{x \to 2^+} y = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 2^-} y = -\infty$ nên $x = 2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x \to +\infty} y = 1$; $\lim\limits_{x \to -\infty} y = 1$ nên $y = 1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Chọn đáp án C .... □

Câu 18. Cho hàm số $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{x}, (ac \neq 0)$ có đồ thị như hình bên. Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho là đường thẳng



A. Đường thẳng $y = x$. **B.** Đường thẳng $y = -x$.

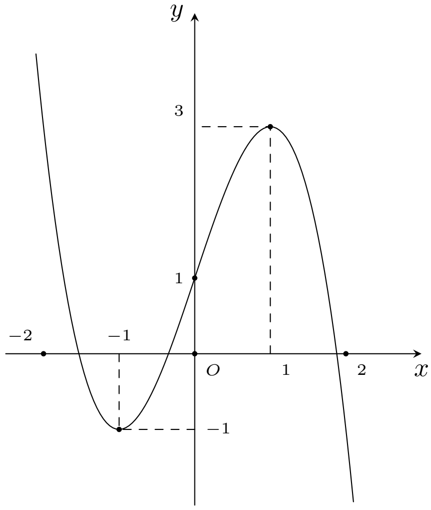
C. Đường thẳng $x = 0$. **D.** Đường thẳng $y = 2x$.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta thấy hàm số có đường tiệm cận xiên đi qua $O(0;0)$ và là đường đi xuống từ trái sang phải nên $y=-x$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

Chọn đáp án B .... □

Câu 19. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-2;2]$. Phát biểu nào sau đây là đúng?



A. $m=-2,\ M=2$.　　**B.** $m=1,\ M=3$.

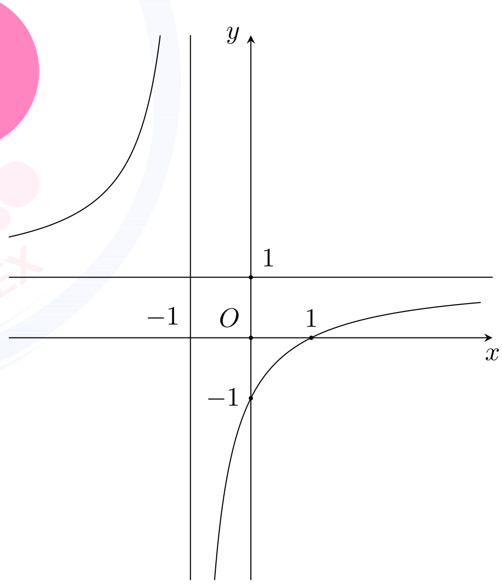
C. $m=3,\ M=1$.　　**D.** $m=-1,\ M=3$.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta thấy hàm số trên đoạn $[-2;2]$, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ bằng -1 tại $x=-1$, giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ bằng 3 tại $x=1$.

Chọn đáp án D .... □

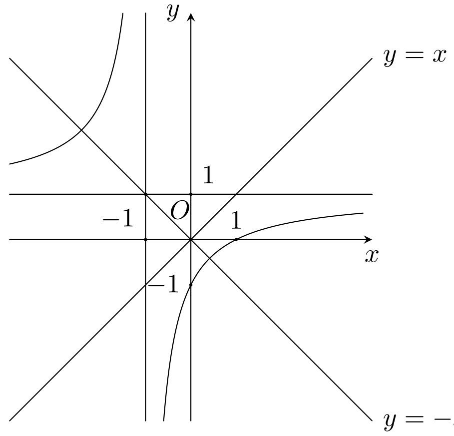
Câu 20. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị ở hình bên. Đường thẳng nào sau đây là trục đối xứng của đồ thị hàm số đã cho?



A. $y=x$.　　**B.** $y=-x$.

C. $y=0$.　　**D.** $x=0$.

Lời giải.



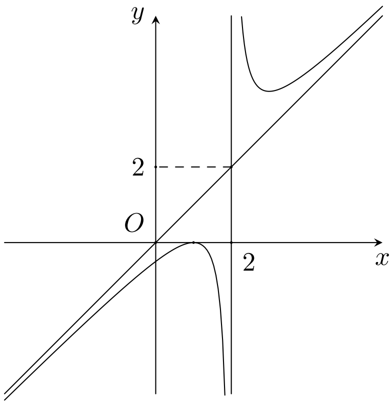
Ta có thể quan sát thấy tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là $x=-1$.

Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là $y=1$. Giao điểm của hai đường tiệm cận là $(-1;1)$. Đường thẳng $y=-x$ đi qua giao điểm của hai tiệm cận. Do đó $y=-x$ là trục đối xứng của đồ thị hàm số đã cho.

Hoặc có thể dùng bút chì kẻ các đường $y=x$, $y=-x$, $y=0$, $x=0$ và quan sát thì chỉ $y=-x$ thoả mãn là trục đối xứng của đồ thị hàm số đã cho.

Chọn đáp án (B) .... □

Câu 21. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị ở hình bên. Tâm đối xứng của đồ thị hàm số có toạ độ là



A. $(2; 2)$.
B. $(-2; -2)$.
C. $(-2; 2)$.
D. $(2; -2)$.

Lời giải.

Ta có thể quan sát thấy đường thẳng $y = x$ là tiệm cận xiên và $x = 2$ là tiệm cận đứng, giao của chúng là điểm $(2; 2)$ nên tâm đối xứng của đồ thị hàm số có toạ độ là $(2; 2)$.

Chọn đáp án (A) .... □

Dạng II. Câu trắc nghiệm đúng sai

Trong mỗi ý **a)**, **b)**, **c)**, **d)** *ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.*

Câu 22. Cho hàm số $f(x) = x - \sin 2x$.

a) $f'(x) = 1 + 2\cos 2x$.

b) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = -\dfrac{1}{2}$.

c) Trên đoạn $[0; \pi]$ phương trình $f'(x) = 0$ có đúng một nghiệm $\dfrac{5\pi}{6}$.

$\boxed{\text{d}}$ Giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[0; \pi]$ là $\dfrac{5\pi}{6} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

a) **Sai**.

Vì $f'(x) = 1 - 2\cos 2x$.

b) **Sai**.

Vì $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = \dfrac{1}{2}$.

c) **Sai**.

Vì $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

$$x \in [0; \pi] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \le \dfrac{\pi}{6} + k\pi \le \pi \\ 0 \le -\dfrac{\pi}{6} + k\pi \le \pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\dfrac{1}{6} \le k \le \dfrac{5}{6} \\ \dfrac{1}{6} \le k \le \dfrac{7}{6} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = 0 \\ k = 1. \end{array}\right.$$

Vậy ta được $x = \dfrac{\pi}{6};\ x = \dfrac{5\pi}{6}$.

d) **Đúng**.

Xét $x \in [0, \pi]$, ta có $f'(x) = 0$ có 2 nghiệm là $x = \dfrac{\pi}{6};\ x = \dfrac{5\pi}{6}$.

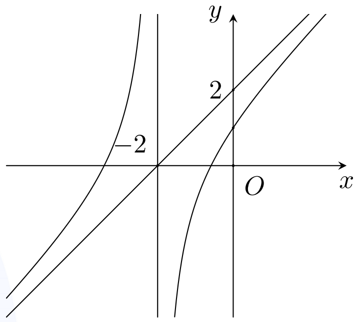
Ta có

$$f(0)=0.$$
$$f(\pi)=\pi.$$
$$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$
$$f\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{5\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy giá trị lớn nhất là $\dfrac{5\pi}{6}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ tại $x=\dfrac{5\pi}{6}$.

Chọn đáp án | a sai | b sai | c sai | d đúng | .... □

Câu 23. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x^2+4x+2}{x+2}$.



a $f(x)=x+2-\dfrac{2}{x+2}$, $\forall x\in(-\infty;-2)\cup(-2;+\infty)$.

b) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường $x=2$.

c Đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là đường $y=x+2$.

d Hàm số đã cho có đồ thị như hình bên.

Lời giải.

a) Đúng.

Vì $f(x)=\dfrac{x^2+4x+4-2}{x+2}=\dfrac{(x+2)^2-2}{x+2}=x+2-\dfrac{2}{x+2}$, $\forall x\neq-2$.

b) Sai.

$\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{x^2+4x+2}{x+2}=\dfrac{7}{2}\neq+\infty$ và $\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{x^2+4x+2}{x+2}=\dfrac{7}{2}\neq-\infty$ và $\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{x^2+4x+2}{x+2}=\dfrac{7}{2}\neq+\infty$ và $\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{x^2+4x+2}{x+2}=\dfrac{7}{2}\neq-\infty$ nên đồ thị của hàm số không có đường tiệm cận đứng là $x=2$.

c) Đúng.

Ta có $f(x)=x+2-\dfrac{2}{x+2}$ do đó tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho là $y=x+2$.

d) Đúng.

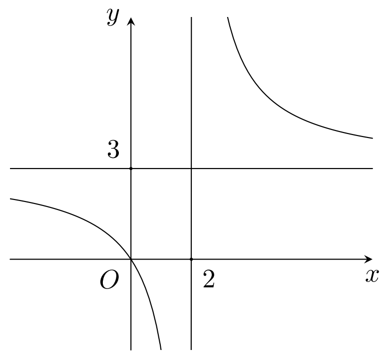
Vì đồ thị có tiệm cận đứng $x=-2$ và tiệm cận xiên $y=x+2$.

Ta có $f'(x)=1+\dfrac{2}{(x+2)^2}>0$, $\forall x\neq-2$.

Do đó, hàm số đồng biến trên khoảng xác định. Thỏa mãn hình vẽ.

Chọn đáp án | a đúng | b sai | c đúng | d đúng | .... □

Câu 24. Cho hàm số $y = \dfrac{3x+a}{x+b}$ có đồ thị như hình bên.



a) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x = 2$.

b) $b = 2$.

c) Đồ thị hàm số không đi qua gốc tọa độ.

d) $a = 0$.

Lời giải.

a) **Đúng**.

Dựa vào đồ thị ta có tiệm cận đứng $x = 2$.

b) **Sai**.

Ta có tiệm cận đứng $x = 2 \Rightarrow -b = 2 \Leftrightarrow b = -2$.

c) **Sai**.

Dựa vào đồ thị ta thấy đồ thị đi qua gốc tọa độ $O(0;0)$.

d) **Đúng**.

Ta có hàm số dạng $y = \dfrac{3x+a}{x-2}$ đi qua gốc tọa độ O, do đó ta được

$$0 = \frac{3 \cdot 0 + a}{0-2} \Rightarrow a = 0.$$

Chọn đáp án | a đúng | b sai | c sai | d đúng | .... □

Câu 25. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	142	$\searrow$	8	$\nearrow$	38	$\searrow$	14

a) Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(8;14)$.

b) Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng 8.

c) Hàm số đạt giá trị lớn nhất bằng 38.

d) Hàm số đã cho đồng biến trên $(8;38)$.

Lời giải.

a) **Đúng**.

Vì hàm số nghịch biến trên $(-\infty;-1)$ và $(1;+\infty)$ do đó cũng nghịch biến trên $(8;14)$.

b) **Đúng**.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy giá trị nhỏ nhất là 8 tại $x = -1$.

c) **Sai**.

Hàm số không có giá trị lớn nhất.

d) **Sai**.

Hàm số đồng biến trên $(-1; 1)$ do đó không đồng biến trên $(8; 38)$.

Chọn đáp án | a đúng | b đúng | c sai | d sai | .... □

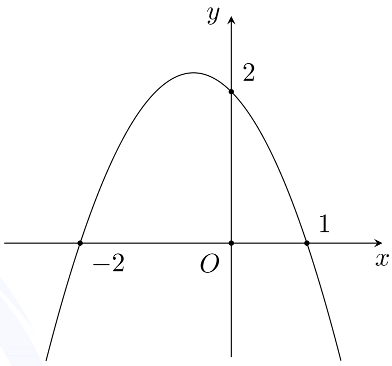
Câu 26. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $(a, b, c, d$ là các số thực và $a \neq 0)$ có đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình bên.

a Điểm cực tiểu của hàm số $y = f(x)$ là $x_{\text{CT}} = -2$.

b Điểm cực đại của hàm số $y = f(x)$ là $x_{\text{CĐ}} = 1$.

c Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(0; 1)$.

d Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $(2025; 2026)$.



Lời giải.

a) **Đúng**.

Vì tại $x = -2$ ta có $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương.

b) **Đúng**.

Vì tại $x = 1$ ta có $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm.

c) **Đúng**.

Dựa vào đồ thị ta thấy hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(-2; 1)$ do đó cũng đồng biến trên $(0; 1)$.

d) **Đúng**.

Dựa vào đồ thị ta thấy $f'(x)$ âm trên $(2025; 2026)$ nên hàm số nghịch biến trên $(2025; 2026)$.

Chọn đáp án | a đúng | b đúng | c đúng | d đúng | .... □

Câu 27. Trong 9 giây đầu tiên, một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = -t^3 + 9t^2 + 21t + 1$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét.

a $s'(t) = -3t^2 + 18t + 21$.

b $s''(t) = -6t + 18$.

c Phương trình $s'(t) = 0$ có đúng một nghiệm dương là $t = 7$.

d) Gia tốc của chất điểm tại thời điểm vật dừng lại là 36 m/s^2.

Lời giải.

a) **Đúng**.

Ta có $s(t) = -t^3 + 9t^2 + 21t + 1 \Rightarrow s'(t) = -3t^2 + 18t + 21$.

b) **Đúng**.

Ta có $s''(t) = -6t + 18$.

c) **Đúng**.

Ta có $s'(t) = 0 \Leftrightarrow -3t^2 + 18t + 21 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t = -1 & \text{(vô lý)} \\ t = 7. \end{array}\right.$

d) **Sai**.

Gia tốc của vật là $a(t) = s''(t) = -6t + 18 \Rightarrow a(7) = -24 \text{ m/s}^2$.

Chọn đáp án | a đúng | b đúng | c đúng | d sai | .... □

Câu 28. Trong 200 gam dung dịch muối nồng độ 15%, giả sử thêm vào dung dịch x gam muối tinh khiết và được dung dịch có nồng độ $f(x)\%$.

a) Hàm số $f(x) = \dfrac{100(x + 200)}{x + 30}$.

b) Đạo hàm của hàm số luôn nhận giá trị âm trên khoảng $(0; +\infty)$.

c) Thêm càng nhiều gam muối tinh khiết thì nồng độ phần trăm càng tăng và không vượt quá 100%.

d) Giới hạn của $f(x)$ khi x dần đến dương vô cực bằng 100.

Lời giải.

a) **Sai**.

Trong 200 gam dung dịch muối nồng độ 15% có $200 \cdot \dfrac{15}{100} = 30$ gam muối tinh khiết.

Khi ta thêm x gam muối tinh khiết ta có được $(x + 30)$ gam muối tinh khiết.

Khi đó nồng độ dung dịch là

$$f(x) = \frac{100(x + 30)}{x + 200}$$

b) **Sai**.

Vì ta có $f'(x) = \dfrac{17\,000}{(x + 200)^2} > 0,\ \forall x \in (0; +\infty)$.

c) **Đúng**.

Khi thêm càng nhiều gam muối tinh khiết thì dung dịch có nồng độ phần trăm càng tăng và không vượt quá 100%.

d) **Đúng**.

Vì $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{100(x + 30)}{x + 200} = 100$.

Chọn đáp án | a sai | b sai | c đúng | d đúng | .... □

Câu 29. Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s = f(t) = 0{,}5\cos(2\pi t)$ trong đó s tính bằng mét, t tính bằng giây.

[a] Vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm t là $-\pi\sin(2\pi t)$ m/s.

b) Gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm t là $-2\cos(2\pi t)$ m/s^2.

[c] Vận tốc lớn nhất của chất điểm bằng π m/s.

[d] Gia tốc lớn nhất của chất điểm bằng $2\pi^2$ m/s^2.

Lời giải.

a) **Đúng**.

Vận tốc tức thời $v = s' = -\pi\sin(2\pi t)$.

b) **Sai**.

Gia tốc tức thời $a = v' = -2\pi^2\cos(2\pi t)$.

c) **Đúng**.

Ta có $-1 \le \sin(2\pi t) \le 1 \Leftrightarrow \pi \ge v \ge -\pi$.

Vậy $v_{\max} = \pi$ với $\sin(2\pi t) = -1 \Rightarrow t = -\dfrac{1}{4} + k$, $k \in \mathbb{Z}$.

d) **Đúng**.

Ta có $-1 \le \cos(2\pi t) \le 1 \Leftrightarrow 2\pi^2 \ge a \ge -2\pi^2$.

Vậy $a_{\max} = 2\pi^2$ với $\cos(2\pi t) = -1 \Rightarrow t = \dfrac{1}{2} + k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Chọn đáp án | a đúng | b sai | c đúng | d đúng | .... □

Câu 30. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(1) \le f(x) \le f(-1)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

[a] Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $\mathbb{R}$ là $f(1)$.

[b] Giá trị lớn nhất của hàm số trên $\mathbb{R}$ là $f(-1)$.

c) Điểm cực tiểu của hàm số là $x_{\text{CT}} = -1$.

d) Điểm cực đại của hàm số là $x_{\text{CĐ}} = 1$.

Lời giải.

a) **Đúng**.

Hàm số có giá trị lớn nhất là $f(-1)$ tại $x = -1$.

b) **Đúng**.

Hàm số có giá trị nhỏ nhất là $f(1)$ tại $x = 1$.

c) **Sai**.

Vì lân cận $x = -1$ thì $f(-1)$ lớn nhất.

d) **Sai**.

Vì lân cận $x = 1$ thì $f(1)$ nhỏ nhất.

Chọn đáp án | a đúng | b đúng | c sai | d sai | .... □

Câu 31. Một công ty sản xuất một sản phẩm. Bộ phận tài chính của công ty đưa ra hàm giá bán là $p(x) = 1\,000 - 25x$, trong đó $p(x)$ (triệu đồng) là giá bán của mỗi sản phẩm mà tại giá bán này có x sản phẩm được bán ra.

a Hàm doanh thu của công ty là $f(x) = x \cdot p(x)$.

b Hàm số $f(x) = -25x^2 + 1\,000x$ có đạo hàm $f'(x) = -50x + 1\,000$.

c) Nếu $f(x) = x \cdot p(x)$ là hàm doanh thu thì phương trình $f'(x) = 0$ có nghiệm là $x = 2$.

d) Hàm doanh thu đạt giá trị lớn nhất bằng $10\,000$.

Lời giải.

a) **Đúng**.

Doanh thu của công ty là $x \cdot p(x)$.

b) **Đúng**.

Ta có $f(x) = -25x^2 + 1\,000x$. Suy ra $f'(x) = -50x + 1\,000$.

c) **Sai**.

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -50x + 1\,000 = 0 \Leftrightarrow x = 20$.

d) **Sai**.

Bảng biến thiên.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$1\,900$	$\searrow$	$-\infty$

Vậy doanh thu đạt lớn nhất là $1\,900$.

Chọn đáp án | a đúng | b đúng | c sai | d sai | .... □

Dạng III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 32. Giả sử hàm số $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ đạt cực đại tại $x = a$ và đạt cực tiểu tại $x = b$. Giá trị của biểu thức $A = 2a + b$ là bao nhiêu? Đáp án: 5

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$.

Cho $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 3$.

Suy ra $a = 1$ và $b = 3$.

Vậy $A = 2a + b = 5$.

Câu 33. Cho đồ thị hàm số $f(x) = \dfrac{3x+5}{-x+7}$ có tâm đối xứng là $I(a;b)$. Giá trị của biểu thức $B = -4a - b$ là bao nhiêu? Đáp án: -25

Lời giải.

Ta có tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là $x = 7$, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là $y = -3$.

Suy ra $I(7;-3)$.

Vậy $B = -4a - b = -25$.

Câu 34. Cho đồ thị hàm số $f(x) = 5x - 1 + \dfrac{8}{x-1}$ có tâm đối xứng là $I(a;b)$. Giá trị của biểu thức $C = a + 3b$ là bao nhiêu? Đáp án: -19

Lời giải.

Ta có $a = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(5 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{8}{x(x-1)}\right) = 5$.

Ta có $b = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[f(x) - 5x\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(5x - 1 + \dfrac{8}{x-1} - 5x\right) = -1$.

Do đó, đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là $y = 5x - 1$.

Mặt khác, $x = -1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Ta có tâm đối xứng của đồ thị hàm số trên là giao điểm của $y = 5x - 1$ và $x = -1$.

Vậy $I(-1;-6)$.

Suy ra $C = a + 3b = -19$.

Câu 35. Cho $a \neq 0$, $b^2 - 3ac > 0$. Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị? Đáp án: 2

Lời giải.

Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

Ta có $\Delta' = b^2 - 3ac > 0$ và $a \neq 0$ nên $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt.

Vậy hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có tất cả 2 cực trị.

Câu 36. Cho các hằng số a, b, c, d khác 0 thoả mãn $ad - bc \neq 0$. Tổng số đường tiệm cận ngang và đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ là bao nhiêu? Đáp án: 2

Lời giải.

Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là $x = -\dfrac{d}{c}$.

Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là $y = \dfrac{a}{c}$.

Vậy có 2 đường tiệm cận.

Câu 37. Số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 1970 được ước tính bởi công thức $f(t) = \dfrac{26t+10}{t+5}$ ($f(t)$ được tính bằng nghìn người). *(Nguồn: Giải tích 12 nâng cao, NXBGD Việt Nam, 2020)*. Xem $y = f(t)$ là một hàm số xác định trên nửa khoảng $[0;+\infty)$. Đồ thị hàm số $y = f(t)$ có đường tiệm cận ngang là $y = a$. Giá trị của a là bao nhiêu?

Lời giải.

Đáp án: 26

Ta có $\lim\limits_{x \to +\pm\infty} f(t) = 26$.

Do đó đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là $y = 26$.

Câu 38. Trong 18 giây đầu tiên, một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = -t^3 + 18t^2 + t + 3$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Chất điểm có vận tốc tức thời lớn nhất bằng bao nhiêu mét trên giây trong 18 giây đầu tiên đó? **Đáp án: 109**

Lời giải.

Ta có $v(t) = s'(t) = -3t^2 + 36t + 1$.

Suy ra $v'(t) = -6t + 36$.

Cho $v'(t) = 0 \Leftrightarrow -6t + 36 = 0 \Leftrightarrow t = 6$ (nhận).

Bảng biến thiên

t	0		6		18
$v'(t)$		$+$	0	$-$	
$v(t)$	1	$\nearrow$	109	$\searrow$	-323

Vậy vận tốc tức thời lớn nhất bằng 109 m/s.

BẢNG ĐÁP ÁN

PHẦN I.

Câu 1. C	Câu 2. B	Câu 3. D	Câu 4. A	Câu 5. C	Câu 6. D
Câu 7. B	Câu 8. D	Câu 9. C	Câu 10. A	Câu 11. C	Câu 12. A
Câu 13. D	Câu 14. B	Câu 15. D	Câu 16. D	Câu 17. C	Câu 18. B
Câu 19. D	Câu 20. B	Câu 21. A			

PHẦN II.

Câu 22. a S b S c S d Đ	Câu 23. a Đ b S c Đ d Đ
Câu 24. a Đ b S c S d Đ	Câu 25. a Đ b Đ c S d S
Câu 26. a Đ b Đ c Đ d Đ	Câu 27. a Đ b Đ c Đ d S
Câu 28. a S b S c Đ d Đ	Câu 29. a Đ b S c Đ d Đ
Câu 30. a Đ b Đ c S d S	Câu 31. a Đ b Đ c S d S

PHẦN III.

Câu 32. 5	Câu 33. -25	Câu 34. -19	Câu 35. 2	Câu 36. 2	Câu 37. 26
Câu 38. 109					

CHỦ ĐỀ 4. NGUYÊN HÀM VÀ TÍCH PHÂN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. NGUYÊN HÀM

1. Định nghĩa

Cho K là một khoảng, đoạn hoặc nửa khoảng của tập số thực $\mathbb{R}$.

- Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K. Hàm số $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K nếu $F'(x) = f(x)$ với mọi x thuộc K.
- Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì mọi nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K đều có dạng $F(x) + C$ với C là một hằng số. Vì vậy,
$$\boxed{\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C.}$$
- Mọi hàm số liên tục trên K đều có nguyên hàm trên K. Ta có
$$\boxed{\int F'(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C.}$$

2. Tính chất

Cho $f(x)$, $g(x)$ là hai hàm số liên tục trên K.

- $\displaystyle\int k \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = k\int f(x)\,\mathrm{d}x$ với k là hằng số khác 0;
- $\displaystyle\int [f(x) + g(x)]\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x$;
- $\displaystyle\int [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x - \int g(x)\,\mathrm{d}x$.

3. Nguyên hàm một số hàm số sơ cấp cơ bản

- Với $\alpha \neq -1$, ta có $\displaystyle\int x^\alpha\,\mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$;
- $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$;
- $\displaystyle\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$;
- $\displaystyle\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C$;
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = -\cot x + C$;
- $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \tan x + C$;
- Với $a > 0$, $a \neq 1$, ta có $\displaystyle\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C$.

II. TÍCH PHÂN

1. Định nghĩa

Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $[a;b]$. Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$. Khi đó $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

2. Tính chất

Cho các hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Ta có

- $\int\limits_a^b k\cdot f(x)\,\mathrm{d}x = k\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ (k là hằng số);
- $\int\limits_a^b [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$;
- $\int\limits_a^b [f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$;
- Giả sử m, n, c là ba số thực tuỳ ý thuộc đoạn $[a;b]$, ta có
$$\int\limits_m^n f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_m^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^n f(x)\,\mathrm{d}x.$$

3. Tích phân một số hàm số sơ cấp cơ bản

- Với $\alpha \neq -1$, ta có $\int\limits_a^b x^\alpha\,\mathrm{d}x = \left.\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right|_a^b = \dfrac{b^{\alpha+1}-a^{\alpha+1}}{\alpha+1}$;
- Với hàm số $f(x) = \dfrac{1}{x}$ liên tục trên đoạn $[a;b]$, ta có
$$\int\limits_a^b \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x|\Big|_a^b = \ln|b| - \ln|a|;$$
- $\int\limits_a^b \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x\Big|_a^b = \cos a - \cos b$;
- $\int\limits_a^b \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x\Big|_a^b = \sin b - \sin a$;
- Với hàm số $f(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x}$ liên tục trên $[a;b]$, ta có:
$$\int\limits_a^b \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = -\cot x\Big|_a^b = \cot a - \cot b;$$

- Với hàm số $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ liên tục trên $[a;b]$, ta có:

$$\int\limits_a^b \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \tan x\Big|_a^b = \tan b - \tan a;$$

- Với $a > 0$, $a \neq 1$, ta có $\displaystyle\int\limits_\alpha^\beta a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a}\Big|_\alpha^\beta = \frac{a^\beta - a^\alpha}{\ln a}$.

4. Ứng dụng

- Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Khi đó, diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ là

$$S = \int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

- Cho các hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Khi đó, diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ là

$$S = \int\limits_a^b |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x.$$

- Cắt một vật thể bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại $x = a$ và $x = b$ $(a < b)$. Một mặt phẳng tuỳ ý vuông góc với Ox tại x $(a \leq x \leq b)$ cắt vật thể đó theo hình phẳng có diện tích là $S(x)$. Giả sử hàm số $S(x)$ liên tục trên $[a;b]$. Khi đó, thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng trên được tính bởi công thức

$$V = \int\limits_a^b S(x)\,\mathrm{d}x.$$

- Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, không âm trên đoạn $[a;b]$. Hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ quay quanh trục Ox tạo thành một khối tròn xoay có thể tích bằng

$$V = \pi\int\limits_a^b [f(x)]^2\,\mathrm{d}x.$$

B. MỘT SỐ VÍ DỤ

Dạng I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ lựa chọn một phương án.

Ví dụ 1. Hàm số $F(x) = 2x^3 - 2x + 1$ là nguyên hàm của hàm số nào sau đây?

A. $f(x) = 6x^2 - 2$. **B.** $f(x) = \dfrac{1}{2}x^4 - x^2 + x$.

C. $f(x) = \dfrac{1}{2}x^4 - x^2 + x + C$. **D.** $f(x) = 6x^2 - 2 + C$.

Lời giải.

Ta có $f(x) = F'(x) = (2x^3 - 2x + 1)' = 6x^2 - 2$.

Chọn đáp án A ☐

Ví dụ 2. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường thẳng $x = 0$, $x = \pi$, đồ thị hàm số $y = \cos x$ và trục Ox là

A. $S = \displaystyle\int_0^\pi \cos x \, \mathrm{d}x$. **B.** $S = \displaystyle\int_0^\pi \cos^2 x \, \mathrm{d}x$. **C.** $S = \displaystyle\int_0^\pi |\cos x| \, \mathrm{d}x$. **D.** $S = \pi \displaystyle\int_0^\pi |\cos x| \, \mathrm{d}x$.

Lời giải.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ và đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục Ox là $S = \displaystyle\int_a^b |f(x)| \, \mathrm{d}x$.

Khi đó, theo đề bài ta có $S = \displaystyle\int_0^\pi |\cos x| \, \mathrm{d}x$.

Chọn đáp án C ☐

Ví dụ 3. Gọi V là thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \mathrm{e}^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$ quay quanh Ox. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. $V = \pi \displaystyle\int_0^2 \mathrm{e}^{2x} \, \mathrm{d}x$. **B.** $V = \displaystyle\int_0^2 \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x$. **C.** $V = \pi \displaystyle\int_0^2 \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x$. **D.** $V = \displaystyle\int_0^2 \mathrm{e}^{2x} \, \mathrm{d}x$.

Lời giải.

Hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ quay quanh trục Ox tạo thành một khối tròn xoay có thể tích bằng $V = \pi \displaystyle\int_a^b [f(x)]^2 \, \mathrm{d}x$.

Như vậy, theo đề bài ta có $V = \pi \displaystyle\int_0^2 \mathrm{e}^{2x} \, \mathrm{d}x$.

Chọn đáp án A ☐

Ví dụ 4. Một vật chuyển động với vận tốc $v(t) = 1 - 2\sin 2t$ (m/s). Quãng đường vật di chuyển trong khoảng thời gian từ $t = 0$ (giây) đến thời điểm $t = \dfrac{3\pi}{4}$ (giây) được tính theo công thức:

A. $s(t) = \displaystyle\int_0^{\frac{3\pi}{4}} (1 - 2\sin 2t) \, \mathrm{d}t$. **B.** $s(t) = \displaystyle\int_0^{\frac{3\pi}{4}} (1 - 2\sin 2t)^2 \, \mathrm{d}t$.

C. $s(t) = \displaystyle\int_0^{\frac{3\pi}{4}} |1 - 2\sin 2t| \, \mathrm{d}t$. **D.** $s(t) = v\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) - v(0)$.

Lời giải.

Gọi $s(t)$ là quãng đường mà vật di chuyển trong khoảng thời gian từ $t = 0$ (giây) đến $t = \dfrac{3\pi}{4}$ (giây).

Mà $s'(t) = v(t)$ nên ta có $s(t) = \int\limits_0^{\frac{3\pi}{4}} (1 - 2\sin 2t)\,\mathrm{d}t$.

Chọn đáp án (A) .... □

Dạng II. Câu trắc nghiệm đúng sai

Trong mỗi ý **a)**, **b)**, **c)**, **d)** *ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.*

Ví dụ 5. Giả sử $s(t)$ là phương trình quãng đường chuyển động của một vật theo thời gian t (giây) và $v(t)$ là phương trình vận tốc của chuyển động đó theo thời gian t (giây).

a) $\int s(t)\,\mathrm{d}t = v(t) + C$.

b $\int v(t)\,\mathrm{d}t = s(t) + C$.

c) $\int s'(t)\,\mathrm{d}t = v(t) + C$.

d $\int s'(t)\,\mathrm{d}t = s(t) + C$.

Lời giải.

a) **Sai**.

Vì $\int v(t)\,\mathrm{d}t = s(t) + C$.

b) **Đúng**.

Vì $\int v(t)\,\mathrm{d}t = \int s'(t)\,\mathrm{d}t = s(t) + C$.

c) **Sai**.

Vì $\int s'(t)\,\mathrm{d}t = s(t) + C$.

d) **Đúng**.

Vì $\int s'(t)\,\mathrm{d}t = s(t) + C$.

Chọn đáp án | a sai | b đúng | c sai | d đúng | .... □

Ví dụ 6. Cho hàm số $F(x) = x^3 - 2x + 1$, $x \in \mathbb{R}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$.

a) Nếu hàm số $G(x)$ cũng là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và $G(-1) = 3$ thì $G(x) = F(x) - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

b Nếu hàm số $H(x)$ cũng là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và $H(1) = -3$ thì $H(x) = F(x) - 3$, $x \in \mathbb{R}$.

c) Nếu hàm số $K(x)$ cũng là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và $K(0) = 0$ thì $K(x) = F(x) + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

d Nếu hàm số $M(x)$ cũng là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và $M(2) = 4$ thì $M(x) = F(x) - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

a) **Sai**.

Vì $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ nên $G(x) = F(x) + C$, với C là một hằng số. Mà $G(-1) = 3$ nên ta có

$$G(-1) = F(-1) + C \Leftrightarrow 3 = 2 + C \Leftrightarrow C = 1.$$

Vậy $G(x) = F(x) + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Đúng.

Vì $H(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ nên $H(x) = F(x) + C$, với C là một hằng số. Mà $H(1) = -3$ nên ta có:

$$H(1) = F(1) + C \Leftrightarrow -3 = 0 + C \Leftrightarrow C = -3.$$

Vậy $H(x) = F(x) - 3$, $x \in \mathbb{R}$.

c) Sai.

Vì $K(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ nên $K(x) = F(x) + C$, với C là một hằng số. Mà $K(0) = 0$ nên ta có

$$K(0) = F(0) + C \Leftrightarrow 0 = 1 + C \Leftrightarrow C = -1.$$

Vậy $K(x) = F(x) - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

d) Đúng.

Vì $M(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ nên $M(x) = F(x) + C$, với C là một hằng số. Mà $M(2) = 4$ nên ta có:

$$M(2) = F(2) + C \Leftrightarrow 4 = 5 + C \Leftrightarrow C = -1.$$

Vậy $M(x) = F(x) - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Chọn đáp án | a sai | b đúng | c sai | d đúng | .... □

Ví dụ 7. Một vật chuyển động với gia tốc $a(t) = 2\cos t\,(\mathrm{m/s^2})$.

a) Tại thời điểm bắt đầu chuyển động, vật có vận tốc bằng 0. Khi đó, vận tốc của vật được biểu diễn bởi hàm số $v(t) = 2\sin t\,(\mathrm{m/s})$.

b) Vận tốc của vật tại thời điểm $t = \dfrac{\pi}{2}$ là $1\,(\mathrm{m/s})$.

c) Quãng đường vật đi được từ thời điểm $t = 0\,(\mathrm{s})$ đến thời điểm $t = \pi\,(\mathrm{s})$ là $4\,(\mathrm{m})$.

d) Quãng đường vật đi được từ thời điểm $t = \dfrac{\pi}{2}\,(\mathrm{s})$ đến thời điểm $t = \dfrac{3\pi}{4}\,(\mathrm{s})$ là $2\,(\mathrm{m})$.

Lời giải.

a) Đúng.

Vì ta có $v(t) = \displaystyle\int a(t)\mathrm{d}t = \int 2\cos t\,\mathrm{d}t = 2\sin t + C$. Mà tại thời điểm bắt đầu chuyển động, vật có vận tốc bằng 0 nên ta có $v(0) = 2\sin 0 + C = 0 \Rightarrow C = 0$.

Vậy $v(t) = 2\sin t$.

b) Sai.

Vì vận tốc của vật tại thời điểm $t = \dfrac{\pi}{2}$ là $v\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2\sin\dfrac{\pi}{2} = 2\,(\mathrm{m/s})$.

c) Đúng.

Vì quãng đường vật đi được từ thời điểm $t = 0\,(\mathrm{s})$ đến thời điểm $t = \pi\,(\mathrm{s})$ là

$$\int_0^{\pi} v(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} 2\sin t\,\mathrm{d}t = -2\cos t\Big|_0^{\pi} = -2\cos\pi - (-2\cos 0) = 4\,(\mathrm{m}).$$

d) Sai.

Vì quãng đường vật đi được từ thời điểm $t=\dfrac{\pi}{2}$ (s) đến thời điểm $t=\dfrac{3\pi}{4}$ (s) là

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} v(t)\,\mathrm{d}t=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} 2\sin t\,\mathrm{d}t=-2\cos t\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}=-2\cos\frac{3\pi}{4}-\left(-2\cos\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{2}\,(\mathrm{m}).$$

Chọn đáp án | a đúng | b sai | c đúng | d sai | .... □

Dạng III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Ví dụ 8. Cho hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=3x^2-4x+1$ và $F(2)=2$. Tính $F(3)$.

Đáp án: 12

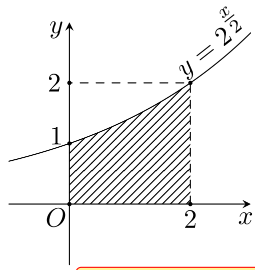
Lời giải.

Ta có $F(x)=\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int\left(3x^2-4x+1\right)\mathrm{d}x=x^3-2x^2+x+C$.

Mà $F(2)=2$ nên suy ra $C=0$.

Vậy hàm số $F(x)=x^3-2x^2+x$. Suy ra $F(3)=12$.

Ví dụ 9. Cho đồ thị hàm số $y=2^{\frac{x}{2}}$ và hình phẳng được gạch sọc như hình sau. Hình phẳng đó được giới hạn bởi các đường nào? Tính diện tích hình phẳng đó (viết kết quả dưới dạng số thập phân và làm tròn đến hàng phần trăm).



Đáp án: 2,89

Lời giải.

Hình phẳng đã cho ở trên là hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=2^{\frac{x}{2}}$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0$, $x=2$. Khi đó, diện tích hình phẳng là

$$S=\int\limits_0^2 2^{\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^2\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^x\mathrm{d}x=\left.\frac{\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^x}{\ln 2^{\frac{1}{2}}}\right|_0^2=\frac{2}{\ln 2}\approx 2{,}89.$$

Ví dụ 10. Một vật chuyển động với gia tốc được cho bởi hàm số $a(t)=5\cos t\,(\mathrm{m/s^2})$. Lúc bắt đầu chuyển động vật có vận tốc $2{,}5\,\mathrm{m/s}$. Tính gia tốc của vật tại thời điểm vận tốc đạt giá trị lớn nhất trong π (s) đầu tiên.

Đáp án: 0

Lời giải.

Vận tốc của vật được biểu diễn bởi hàm số $v(t)=\displaystyle\int a(t)\,\mathrm{d}t=\int 5\cos t\,\mathrm{d}t=5\sin t+C$.

Khi bắt đầu chuyển động, vật có vận tốc $2{,}5\,(\mathrm{m/s})$ nên ta có:

$$v(0)=2{,}5\Leftrightarrow 5\sin 0+C=2{,}5\Leftrightarrow C=2{,}5.$$

Suy ra $v(t) = 5\sin t + 2{,}5$. Mà $5\sin t + 2{,}5 \le 7{,}5$.

Vậy vận tốc đạt giá trị lớn nhất bằng 7,5 tại $t = \dfrac{\pi}{2}$.

Khi đó, gia tốc của vật tại thời điểm $t = \dfrac{\pi}{2}$ là $a\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 5\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0\,(\mathrm{m/s^2})$.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Dạng I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ lựa chọn một phương án.

Câu 1. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. $\displaystyle\int F'(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$.

B. $\displaystyle\int F(x)\,\mathrm{d}x = F'(x) + C$.

C. $\displaystyle\int F(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$.

D. $\displaystyle\int F'(x)\,\mathrm{d}x = F'(x) + C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int F'(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$

Chọn đáp án A .... □

Câu 2. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. $\displaystyle\int \mathrm{e}^{-3x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-3x} + C$.

B. $\displaystyle\int \mathrm{e}^{-3x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-3x} + C$.

C. $\displaystyle\int \mathrm{e}^{-3x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-3x} + C$.

D. $\displaystyle\int \mathrm{e}^{-3x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-3x}$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int \mathrm{e}^{-3x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-3x} + C$.

Chọn đáp án B .... □

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ $(a < b)$. Thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay D quanh trục hoành là

A. $V = \pi\displaystyle\int_a^b [f(x)]^2\,\mathrm{d}x$.

B. $V = 2\pi\displaystyle\int_a^b [f(x)]^2\,\mathrm{d}x$.

C. $V = \pi^2\displaystyle\int_a^b [f(x)]^2\,\mathrm{d}x$.

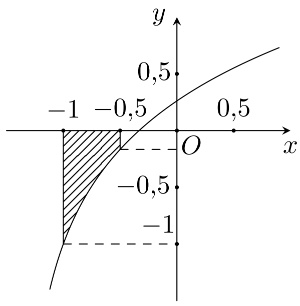
D. $V = \pi^2\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có $V = \pi\displaystyle\int_a^b [f(x)]^2\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án A .... □

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Gọi S là phần diện tích hình phẳng gạch sọc. Phát biểu nào sau đây là đúng?



A. $S = \displaystyle\int_{-1}^{-0,5} f(x)\,\mathrm{d}x$.

B. $S = -\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$.

C. $S = -\left|\displaystyle\int_{-1}^{-0,5} f(x)\,\mathrm{d}x\right|$.

D. $S = -\displaystyle\int_{-1}^{-0,5} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Quan sát hình vẽ ta chọn $S = -\displaystyle\int_{-1}^{-0,5} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án (D) .... □

Câu 5. Gọi H là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{x}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1, x = 4$. Thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi cho hình phẳng H quay quanh trục Ox là

A. $V = \pi\displaystyle\int_{1}^{4} \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.

B. $V = \displaystyle\int_{1}^{4} \dfrac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

C. $V = \pi\displaystyle\int_{1}^{4} \dfrac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

D. $V = \pi^2\displaystyle\int_{1}^{4} \dfrac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi cho hình phẳng H quay quanh trục Ox là

$$V = \pi\int_{1}^{4} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Chọn đáp án (C) .... □

Câu 6. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -\sin x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$, $x = \pi$. Thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi cho hình phẳng D quay xung quanh trục Ox là

A. $V = \pi\displaystyle\int_{0}^{\pi} |\sin x|\,\mathrm{d}x$.

B. $V = \pi\displaystyle\int_{0}^{\pi} \sin^2 x\,\mathrm{d}x$.

C. $V = \pi\left|\displaystyle\int_{0}^{\pi} (-\sin x)\,\mathrm{d}x\right|$.

D. $V = \pi^2\displaystyle\int_{0}^{\pi} \sin^2 x\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Áp dụng công thức, ta có

$$V = \pi\int_{0}^{\pi} (-\sin x)^2\,\mathrm{d}x = \pi\int_{0}^{\pi} \sin^2 x\,\mathrm{d}x.$$

Chọn đáp án (B) .... □

Câu 7. Gọi H là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1$, $x = 2$. Thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi cho hình phẳng H quay xung quanh trục Ox là

A. $V=\pi\int\limits_1^2\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$. **B.** $V=\pi^2\int\limits_1^2 x\,\mathrm{d}x$. **C.** $V=\pi^2\int\limits_1^2\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$. **D.** $V=\pi\int\limits_1^2 x\,\mathrm{d}x$.

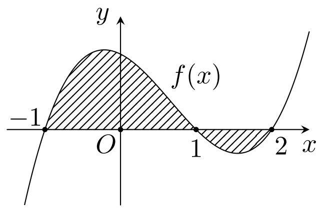
Lời giải.

Áp dụng công thức, ta có

$$V=\pi\int\limits_1^2\left(\sqrt{x}\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int\limits_1^2 x\,\mathrm{d}x.$$

Chọn đáp án D .... □

Câu 8. Gọi S là diện tích hình phẳng được gạch sọc trong hình sau. Công thức tính S là



A. $S=\int\limits_{-1}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{2}f(x)\,\mathrm{d}x$. **B.** $S=\int\limits_{-1}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x-\int\limits_{1}^{2}f(x)\,\mathrm{d}x$.

C. $S=\int\limits_{-1}^{2}f(x)\,\mathrm{d}x$. **D.** $S=-\int\limits_{-1}^{2}f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Từ đồ thị ta thấy: $f(x)>0,\ \forall x\in(-1;1)$ và $f(x)<0,\ \forall x\in(1;2)$ do đó

$$S=\int\limits_{-1}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x-\int\limits_{1}^{2}f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Chọn đáp án B .... □

Câu 9. $\int(2x)^{\sqrt{2}}\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{(2x)^{\sqrt{2}+1}}{\sqrt{2}+1}+C$. **B.** $\dfrac{2^{\sqrt{2}}\cdot x^{\sqrt{2}+1}}{\sqrt{2}+1}+C$. **C.** $\dfrac{(2x)^{\sqrt{2}}}{\ln(2x)}+C$. **D.** $(2x)^{\sqrt{2}}+C$.

Lời giải.

Ta có $\int(2x)^{\sqrt{2}}\,\mathrm{d}x=\int 2^{\sqrt{2}}\cdot x^{\sqrt{2}}\,\mathrm{d}x=2^{\sqrt{2}}\int x^{\sqrt{2}}\,\mathrm{d}x=\dfrac{2^{\sqrt{2}}\cdot x^{\sqrt{2}+1}}{\sqrt{2}+1}+C$.

Chọn đáp án B .... □

Câu 10. $\int\left(\sin\dfrac{x}{2}+\cos\dfrac{x}{2}\right)^2\mathrm{d}x$ bằng

A. $x-\cos x+C$. **B.** $\left(-\cos\dfrac{x}{2}+\sin\dfrac{x}{2}\right)^2$.

C. $\dfrac{1}{3}\left(\sin\dfrac{x}{2}+\cos\dfrac{x}{2}\right)^3+C$. **D.** $x+\cos x+C$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\int\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2\mathrm{d}x&=\int\left(\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x\\&=\int(1+\sin x)\,\mathrm{d}x\\&=\int\mathrm{d}x+\int\sin x\,\mathrm{d}x\\&=x-\cos x+C.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (A) .... □

Câu 11. $\int\left(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-2x}\right)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\mathrm{e}^x-2\mathrm{e}^{-2x}+C$.

B. $\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-2x}+C$.

C. $\mathrm{e}^x-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}+C$.

D. $\dfrac{\mathrm{e}^{x+1}}{x+1}+\dfrac{\mathrm{e}^{-2x+1}}{-2x+1}+C$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\int\left(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-2x}\right)\,\mathrm{d}x &= \int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x+\int \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x\\ &= \mathrm{e}^x-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}+C.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (C) .... □

Câu 12. $\int\left(\cos\dfrac{x}{2}\right)^2\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $x+\sin x+C$.

B. $\dfrac{1}{3}\left(\cos\dfrac{x}{2}\right)^3+C$.

C. $\left(\sin\dfrac{x}{2}\right)^2+C$.

D. $\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}\sin x+C$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\int\left(\cos\frac{x}{2}\right)^2\,\mathrm{d}x &= \int\frac{1+\cos x}{2}\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\int\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int\cos x\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\sin x+C.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (D) .... □

Câu 13. $\int\left(5^{2x}-6\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\right)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\mathrm{e}^x-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}+C$.

B. $\dfrac{25^x}{2\ln 5}+12\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}+C$.

C. $\mathrm{e}^x-2\mathrm{e}^{-2x}+C$.

D. $\dfrac{\mathrm{e}^{x+1}}{x+1}+\dfrac{\mathrm{e}^{-2x+1}}{-2x+1}+C$.

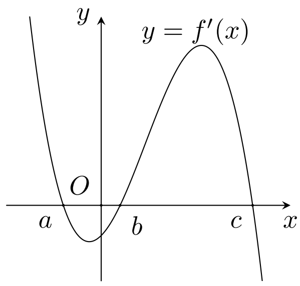
Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\int\left(5^{2x}-6\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\right)\,\mathrm{d}x &= \int 5^{2x}\,\mathrm{d}x-6\int\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\int 5^{2x}\,\mathrm{d}(2x)+12\int\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}\left(-\frac{x}{2}\right)\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{5^{2x}}{\ln 5}+12\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}+C\\ &= \frac{25^x}{2\ln 5}+12\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}+C.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (B) .... □

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ cắt trục Ox tại ba điểm có hoành độ $a < b < c$ như hình vẽ. Mệnh đề nào sau đây là đúng?



A. $f(c) > f(a) > f(b)$. **B.** $f(c) > f(b) > f(a)$.

C. $f(a) > f(b) > f(c)$. **D.** $f(b) > f(a) > f(c)$.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$, ta có

$$\int\limits_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x < 0 \Leftrightarrow f(x)\Big|_a^b < 0$$
$$\Leftrightarrow f(b) - f(a) < 0$$
$$\Leftrightarrow f(a) > f(b). \quad (1)$$
$$\int\limits_b^c f'(x)\,\mathrm{d}x > 0 \Leftrightarrow f(x)\Big|_b^c > 0$$
$$\Leftrightarrow f(c) - f(b) > 0$$
$$\Leftrightarrow f(c) > f(b). \quad (2)$$
$$-\int\limits_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x < \int\limits_b^c f'(x)\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow -f(x)\Big|_a^b < f(x)\Big|_b^c$$
$$\Leftrightarrow f(a) - f(b) < f(c) - f(b)$$
$$\Leftrightarrow f(a) < f(c). \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra $f(c) > f(a) > f(b)$.

Chọn đáp án A .... □

Câu 15. Vi khuẩn *E. coli* sống chủ yếu ở đường ruột và có số lượng lớn nhất trong hệ vi sinh vật của cơ thể. Một quần thể vi khuẩn *E. coli* được quan sát trong điều kiện thích hợp, có tốc độ sinh trưởng được cho bởi hàm số $f(t) = 480 \cdot 2^t \cdot \ln 2$. Trong đó t tính bằng giờ $(t > 0)$, $f(t)$ tính bằng cá thể/giờ (*Nguồn: R.Larson and B. Edwards, Calculus 10e, Cengage*). Biết tại thời điểm bắt đầu quan sát, số lượng cá thể được ước tính một cách chính xác khoảng 480 cá thể. Hàm số biểu thị cá thể theo thời gian t là

A. $F(t) = 480 \cdot 2^t + \ln 2$. **B.** $F(t) = 480 \cdot 2^t$.

C. $F(t) = 480 \cdot \dfrac{2^t}{\ln 2}$. **D.** $F(t) = 480 \cdot \dfrac{2^t}{\ln 2} + C$.

Lời giải.

Hàm số biểu thị số cá thể vi khuẩn *E. coli* theo thời gian t chính là một nguyên hàm $F(t)$ của hàm số $f(t)$ tốc độ sinh sản của quần thể *E. coli*.

Ta có $F(t) = \displaystyle\int f(t)\,\mathrm{d}t = \int \left(480 \cdot 2^t \cdot \ln 2\right)\,\mathrm{d}t = 480 \cdot 2^t + C$, với C là hằng số.

Mặt khác tại thời điểm $t = 0$ (lúc bắt đầu quan sát) số lượng cá thể là 480 cá thể, nghĩa là $F(0) = 480 \Leftrightarrow C = 0$.

Vậy $F(t) = 480 \cdot 2^t$.

Chọn đáp án (B) .... □

Dạng II. Câu trắc nghiệm đúng sai

Trong mỗi ý **a)**, **b)**, **c)**, **d)** *ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.*

Câu 16. Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$, C là một hằng số.

a) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = f'(x) + C$.

b $\displaystyle\int f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x) + C$.

c) $\displaystyle\int f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)$.

d $\displaystyle\int f''(x)\,\mathrm{d}x = f'(x) + C$.

Lời giải.

a) Sai.
$\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$, với $F'(x) = f(x)$.

b) Đúng.
$\displaystyle\int f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x) + C$

c) Sai.
$\displaystyle\int f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x) + C$.

d) Đúng.
Vì $[f'(x)]' = f''(x)$.

Chọn đáp án | a sai | b đúng | c sai | d đúng | .... □

Câu 17. Giả sử $v(t)$ là phương trình vận tốc của một vật chuyển động theo thời gian t (giây), $a(t)$ là phương trình gia tốc của vật đó chuyển động theo thời gian t (giây).

a $\displaystyle\int a(t)\,\mathrm{d}t = v(t) + C$.

b) $\displaystyle\int v(t)\,\mathrm{d}t = a(t) + C$.

c) $\displaystyle\int v'(t)\,\mathrm{d}t = a(t) + C$.

d $\displaystyle\int v'(t)\,\mathrm{d}t = v(t) + C$.

Lời giải.

Ta có $s'(t) = v(t)$, $v'(t) = a(t)$.

a) Đúng.
Vì $\displaystyle\int a(t)\,\mathrm{d}t = v(t) + C$.

b) Sai
Vì $\displaystyle\int v(t)\,\mathrm{d}t = s(t) + C$.

c) Sai
$\displaystyle\int v'(t)\,\mathrm{d}t = v(t) + C$.

d) Đúng.
$\displaystyle\int v'(t)\,\mathrm{d}t = v(t) + C$.

Chọn đáp án | a đúng | b sai | c sai | d đúng | .... □

Câu 18. Giả sử $v(t)$ là phương trình vận tốc của một vật chuyển động theo thời gian t (giây), $a(t)$ là phương trình gia tốc của một vật chuyển động theo thời gian t (giây). Xét chuyển động trong khoảng thời gian từ c (giây) đến b (giây).

a) $\int\limits_c^b a(t)\,\mathrm{d}t = v(b) - v(c)$.

b) $\int\limits_c^b v(t)\,\mathrm{d}t = a(b) - a(c)$.

c) $\int\limits_c^b v'(t)\,\mathrm{d}t = v(c) - v(b)$.

d) $\int\limits_c^b v'(t)\,\mathrm{d}t = v(b) - v(c)$.

Lời giải.

Ta có $s'(t) = v(t)$, $v'(t) = a(t)$.
Suy ra $\int a(t)\,\mathrm{d}t = v(t) + C$.

a) Đúng.
Vì $\int\limits_c^b a(t)\,\mathrm{d}t = v(b) - v(c)$.

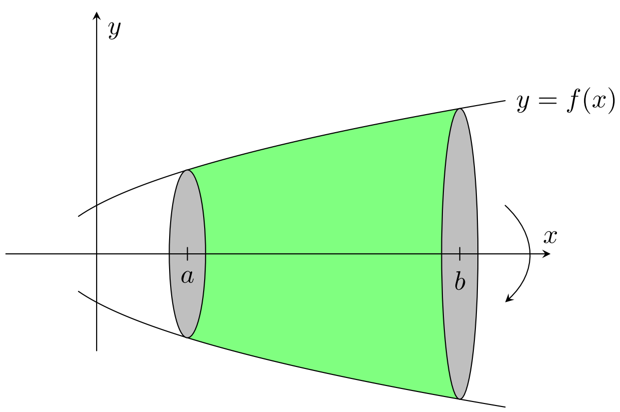
b) Sai.
Vì $\int v(t)\,\mathrm{d}t = s(t) + C$.

c) Sai.
$\int\limits_c^b v'(t)\,\mathrm{d}t = v(b) - v(c)$.

d) Đúng.
$\int\limits_c^b v'(t)\,\mathrm{d}t = v(b) - v(c)$.

Chọn đáp án | a đúng | b sai | c sai | d đúng | .... □

Câu 19. Cho vật thể tròn xoay như hình dưới đây



a) Vật thể được tạo thành khi cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ quay quanh trục Ox.

b Vật thể được tạo thành khi cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ quay quanh trục Ox.

c) Thể tích của vật thể được tính theo công thức $V = \pi \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

d Thể tích của vật thể được tính theo công thức $V = \pi \int\limits_a^b [f(x)]^2\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Dựa vào hình vẽ vật thể được tròn xoay được được tạo thành từ hình phẳng bị giới hạn bởi $y = f(x), y = 0$ (trục Ox), $x = a$ và $x = b$ khi xoay quanh Ox.

Công thức tính thể tích hình tròn xoay khi xoay quanh Ox là $V = \pi \int\limits_a^b [f(x)]^2\,\mathrm{d}x$.

a) **Sai**.

b) **Đúng**.

c) **Sai**.

d) **Đúng**.

Chọn đáp án | a sai | b đúng | c sai | d đúng | .... □

Câu 20. Tại một khu di tích vào ngày lễ hội hàng năm, tốc độ thay đổi lượng khách tham quan được biểu diễn bằng hàm số $Q'(t) = 4t^3 - 72t^2 + 288t$, trong đó t được tính bằng giờ $(0 \leq t \leq 13)$, $Q'(t)$ tính bằng khách/ giờ (*Nguồn: R.Larson and B. Edwards, Calculus 10e, Cengage*). Sau 2 giờ đã có 500 người có mặt.

a) Lượng khách tham quan được biểu diễn bởi hàm số $Q(t) = t^4 - 24t^3 + 144t^2$.

b Sau 5 giờ lượng khách tham quan là 1 325 người.

c) Lượng khách tham quan lớn nhất là 1 296 người.

d) Tốc độ thay đổi lượng khách tham quan lớn nhất tại thời điểm $t = 6$.

Lời giải.

Lượng khách tham quan được biểu diễn bởi hàm số

$$Q(t) = \int Q'(t)\,\mathrm{d}t = t^4 - 24t^3 + 144t^2 + C$$

Lượng khách sau 2 giờ là $Q(2) = 500 \Leftrightarrow C = 100$.

Vậy $Q(t) = t^4 - 24t^3 + 144t^2 + 100$.

Lượng khách sau 5 giờ là $Q(5) = 1\,325$ người.

Ta tìm lượng khách lớn nhất với $t \in [0; 13]$ là $Q(6) = 1\,396$.

Ta khảo sát hàm số $Q'(t) = 4t^3 - 72t^2 + 288t$ trên đoạn $[0; 13]$.

Ta có: $Q''(t) = 12t^2 - 144t + 288$.

Xét $Q''(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 6 - 2\sqrt{3} \\ t = 6 + 2\sqrt{3} \end{array}\right.$

Bảng biến thiên của hàm số $Q'(t)$ như sau:

t	0		$6-2\sqrt{3}$		$6+2\sqrt{3}$		13
$Q''(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$Q'(t)$	0	$\nearrow$	$Q'\left(6-2\sqrt{3}\right)$	$\searrow$	$Q'\left(6+2\sqrt{3}\right)$	$\nearrow$	364

Với $Q'\left(6-2\sqrt{3}\right) \approx 332{,}6$.

Vậy tốc độ thay đổi lượng khách lớn nhất tại thời điểm $t = 13$.

a) **Sai**.

b) **Đúng**.

c) **Sai**.

d) **Sai**.

Chọn đáp án | a sai | b đúng | c sai | d sai | .... □

Dạng III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 21. $\int\limits_0^1 \frac{3^{x-2}}{2^{2x}}\,\mathrm{d}x$ có giá trị bằng bao nhiêu? (viết kết quả dưới dạng số thập phân và làm tròn đến hàng phần mười).

Đáp án: 0,1

Lời giải.

Ta có $\int\limits_0^1 \frac{3^{x-2}}{2^{2x}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{9}\int\limits_0^1 \left(\frac{3}{4}\right)^x \mathrm{d}x = \left.\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^x}{9\ln\frac{3}{4}}\right|_0^1 = \frac{3}{36\ln\frac{3}{4}} - \frac{1}{9\ln\frac{3}{4}} = -\frac{1}{36\ln\frac{3}{4}} \approx 0{,}1.$

Câu 22. Cho hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \left(x^2-2\right)(2x+1)$ và $F(-1) = \frac{1}{6}$. Tính $F\left(-\frac{1}{2}\right)$ (viết kết quả dưới dạng số thập phân và làm tròn đến hàng phần trăm).

Đáp án: 0,49

Lời giải.

Ta có $f(x) = \left(x^2-2\right)(2x+1) = 2x^3 + x^2 - 4x - 2$.

Suy ra

$$\begin{aligned} F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x &= \int \left(2x^3 + x^2 - 4x - 2\right)\,\mathrm{d}x \\ &= \int 2x^3\,\mathrm{d}x + \int x^2\,\mathrm{d}x - \int 4x\,\mathrm{d}x - \int 2\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 2x + C,\ C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Mà $F(-1) = \frac{1}{6}$ nên suy ra $C = 0$.

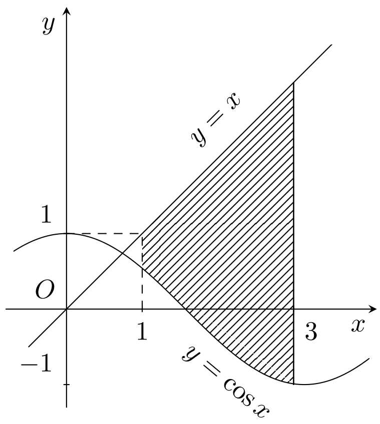
Vậy hàm số $F(x) = \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 2x$.

Suy ra $F\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{47}{96} \approx 0{,}49$.

Cách khác:

$$I = \int\limits_{-1}^{-\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x = F\left(-\frac{1}{2}\right) - F(-1) \Rightarrow F\left(-\frac{1}{2}\right) = I + F(-1) = \frac{47}{96} \approx 0{,}49.$$

Câu 23. Cho đồ thị hàm số $y = \cos x$ và hình phẳng được gạch sọc như bên. Tính diện tích hình phẳng đó (viết kết quả dưới dạng số thập phân và làm tròn đến hàng phần mười).



Đáp án: 4,7

Lời giải.

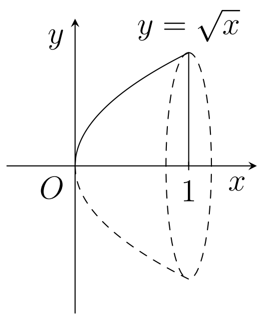
Hình phẳng đã cho giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $y = \cos x$, $y = x$ và hai đường thẳng $x = 1$, $x = 3$.

Khi đó, diện tích hình phẳng là $S = \int\limits_1^3 |\cos x - x|\,\mathrm{d}x$.

Vì $x \geq \cos x$, $\forall x \in [1;3]$ nên ta có

$$S = \int\limits_1^3 (x - \cos x)\,\mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{2} - \sin x\right)\Bigg|_1^3 = 4 - \sin 3 + \sin 1 \approx 4{,}7.$$

Câu 24. Cho khối tròn xoay như hình bên. Tính thể tích của khối tròn xoay được tạo thành bởi hình phẳng cho ở hình đã cho khi quay quanh trục Ox (viết kết quả dưới dạng số thập phân và làm tròn đến hàng phần mười).



Đáp án: 1,6

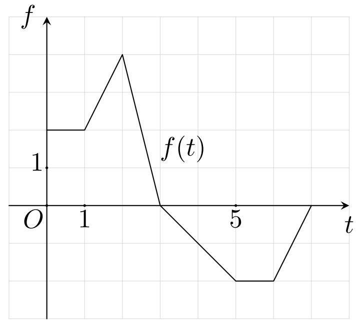
Lời giải.

Hình phẳng đã cho được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0$, $x = 1$, khi quay hình phẳng đó quanh trục Ox ta được khối tròn xoay như hình đã cho.

Thể tích khối tròn xoay đó là

$$V = \pi \int\limits_0^1 \left(\sqrt{x}\right)^2\,\mathrm{d}x = \pi \int\limits_0^1 x\,\mathrm{d}x = \pi \cdot \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{2} \approx 1{,}6.$$

Câu 25. Cho $g(x) = \int\limits_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$, $(0 \leq x \leq 7)$ trong đó $f(t)$ là hàm số có đồ thị như hình bên. Tính $g(3)$.



Đáp án: 7

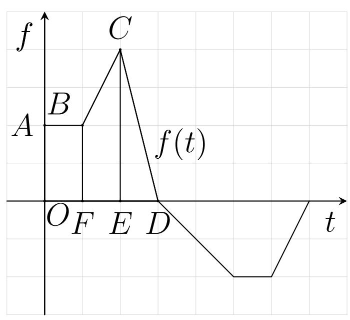
Lời giải.

Ta có $f(t) = \begin{cases} 2 & \text{nếu } 0 \leq t \leq 1, \\ 2t & \text{nếu } 1 \leq t \leq 2, \\ 12 - 4t & \text{nếu } 2 \leq t \leq 3, \\ 3 - t & \text{nếu } 3 \leq t \leq 5, \\ -2 & \text{nếu } 5 \leq t \leq 6, \\ 2t - 14 & \text{nếu } 6 \leq t \leq 7. \end{cases}$

Do đó,

$$\begin{aligned} g(3) = \int\limits_0^3 f(t)\,\mathrm{d}t &= \int\limits_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t + \int\limits_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t + \int\limits_2^3 f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int\limits_0^1 2\,\mathrm{d}t + \int\limits_1^2 2t\,\mathrm{d}t + \int\limits_2^3 (12 - 4t)\,\mathrm{d}t \\ &= 2t\Big|_0^1 + t^2\Big|_1^2 + \left(12t - 2t^2\right)\Big|_2^3 = 7. \end{aligned}$$

Cách khác:



Ta có $g(x) = \int\limits_0^x f(t)\,dt \Rightarrow g(0) = 0$.

Khi đó

$$\begin{aligned}
&\int\limits_0^3 f(t)\,dt = S_{OABCD}\\
\Rightarrow\, &g(3) - g(0) = S_{OABF} + S_{FBCE} + S_{CED}\\
\Rightarrow\, &g(3) = 2 + 3 + \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 4 = 7.
\end{aligned}$$

Câu 26. Một vật được ném lên từ độ cao 300 m với vận tốc được cho bởi công thức $v(t) = -9{,}81t + 29{,}43\,(\mathrm{m/s})$ (*Nguồn: R. Larson and B. Edwards, Calculus 10e, Cengane*). Gọi $h(t)$ (m) là độ cao của vật tại thời điểm t (s). Sau bao lâu kể từ khi bắt đầu được ném lên thì vật đó chạm đất (làm tròn kết quả đến hàng phần chục giây)? Đáp án: 11,4

Lời giải.

Ta có $h(t) = \displaystyle\int v(t)\,\mathrm{d}t = \int(-9{,}81\cdot t + 29{,}43)\,\mathrm{d}t = -\frac{9{,}81}{2}t^2 + 29{,}43\cdot t + C$.
Vì vật được ném lên từ độ cao 300 m nên $h(0) = 300$. Suy ra $C = 300$.
Vậy $h(t) = -\dfrac{9{,}81}{2}t^2 + 29{,}43t + 300$.
Khi vật bắt đầu chạm đất ứng với $h(t) = 0$.
Nên ta có $-\dfrac{9{,}81}{2}t^2 + 29{,}43\cdot t + 300 = 0 \Leftrightarrow t \approx 11{,}4$ hoặc $t \approx -5{,}4$.
Do $t > 0$ nên $t \approx 11{,}4$ giây.

Câu 27. Chủ một trung tâm thương mại muốn cho thuê một số gian hàng như nhau. Người đó muốn tăng giá cho thuê của mỗi gian hàng thêm x (triệu đồng) $(x \geq 0)$. Tốc độ thay đổi doanh thu từ các gian hàng đó được biểu diễn bởi hàm số $T'(x) = -20x + 300$, trong đó $T'(x)$ tính bằng triệu đồng (*Nguồn: R. Larson and B. Edwards, Calculus ioe, Cengage*). Biết rằng nếu người đó tăng giá thuê cho mỗi gian hàng thêm 10 triệu đồng thì doanh thu là 12 000 triệu đồng. Tìm giá trị của x để người đó có doanh thu là cao nhất? Đáp án: 15

Lời giải.

Ta có $T(x) = \displaystyle\int T'(x)\,\mathrm{d}x = \int(-20x + 300)\,\mathrm{d}x = -10x^2 + 300x + C$, $C \in \mathbb{R}$.
Khi người đó tăng giá cho thuê mỗi gian hàng thêm 10 triệu đồng thì doanh thu là 12 000 triệu đồng.
Nên ứng với $x = 10$ ta có $T(10) = 12\,000$ suy ra

$$12\,000 = -10\cdot 10^2 + 300\cdot 10 + C \Rightarrow C = 10\,000.$$

Vậy $T(x) = -10x^2 + 300x + 10\,000$. Ta có $T(x)$ là một hàm số bậc hai với hệ số $a < 0$ và đồ thị hàm số có đỉnh là $I(15; 12\,250)$.
Vậy doanh thu cao nhất mà người đó có thể thu về là 12 250 triệu đồng và khi đó mỗi gian hàng đã tăng giá cho thuê thêm 15 triệu đồng.

BẢNG ĐÁP ÁN

PHẦN I.

Câu 1. A	Câu 2. B	Câu 3. A	Câu 4. D	Câu 5. C	Câu 6. B
Câu 7. D	Câu 8. B	Câu 9. B	Câu 10. A	Câu 11. C	Câu 12. D
Câu 13. B	Câu 14. A	Câu 15. B			

PHẦN II.

Câu 16. a S b Đ c S d Đ	Câu 17. a Đ b S c S d Đ
Câu 18. a Đ b S c S d Đ	Câu 19. a S b Đ c S d Đ
Câu 20. a S b Đ c S d S	

PHẦN III.

Câu 21. 0,1	Câu 22. 0,49	Câu 23. 4,7	Câu 24. 1,6	Câu 25. 7	Câu 26. 11,4
Câu 27. 15					

CHỦ ĐỀ 5. HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

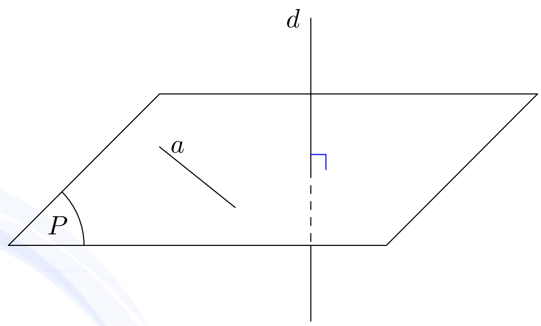
1. Hai đường thẳng vuông góc

Hai đường thẳng a và b được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90°, kí hiệu $a \perp b$.

2. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

a) *Định nghĩa*

Đường thẳng d được gọi là vuông góc với mặt phẳng (P) nếu đường thẳng d vuông góc với mọi đường thẳng trong mặt phẳng (P), kí hiệu $d \perp (P)$ hoặc $(P) \perp d$.



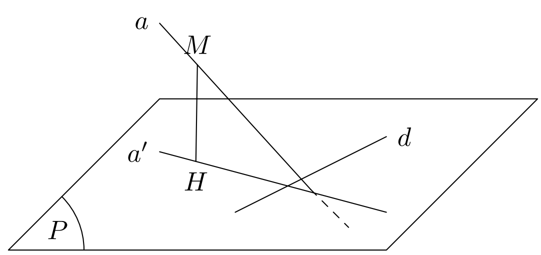
b) *Dấu hiệu nhận biết*: Nếu một đường thẳng vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau cùng thuộc một mặt phẳng thì nó vuông góc với mặt phẳng ấy.

c) *Tính chất*

- Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.
- Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.
- Cho hai đường thẳng song song. Một mặt phẳng vuông góc với đường thẳng này thì cũng vuông góc với đường thẳng kia.
- Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.
- Cho hai mặt phẳng song song. Một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng này thì cũng vuông góc với mặt phẳng kia.
- Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

d) *Định lí ba đường vuông góc*:

Cho đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P) và đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P). Khi đó, d vuông góc với a khi và chỉ khi d vuông góc với hình chiếu vuông góc a' của a trên (P) (Hình 2).



3. Hai mặt phẳng vuông góc

a) *Định nghĩa*: Hai mặt phẳng $(P),(Q)$ cắt nhau tạo nên bốn góc nhị diện. Nếu một trong các góc nhị diện đó là góc nhị diện vuông thì hai mặt phẳng (P), (Q) gọi là vuông góc với nhau, kí hiệu $(P)\perp(Q)$.

b) *Dấu hiệu nhận biết*: Nếu mặt phẳng này chứa một đường thẳng mà đường thẳng đó vuông góc với mặt phẳng kia thì hai mặt phẳng đó vuông góc với nhau.

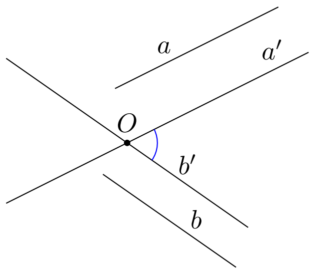
c) *Tính chất*

- Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến cũng vuông góc với mặt phẳng kia.
- Nếu hai mặt phẳng cắt nhau và cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng thứ ba đó.

II. GÓC TRONG KHÔNG GIAN

1. Góc giữa hai đường thẳng trong không gian

Góc giữa hai đường thẳng a và b trong không gian là góc giữa hai đường thẳng a' và b' cùng đi qua một điểm O và lần lượt song song (hoặc trùng) với a và b (Hình 3), kí hiệu (a,b) hoặc $\widehat{(a,b)}$.



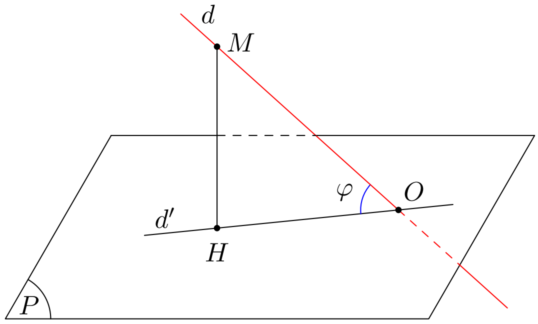
Hình 3

Nhận xét: Góc giữa hai đường thẳng trong không gian có số đo từ 0° đến 90°.

2. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Cho đường thẳng d và mặt phẳng (P), ta có định nghĩa sau:

- Nếu đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P) thì góc giữa d và (P) bằng 90°.
- Nếu đường thẳng d không vuông góc với mặt phẳng (P) thì góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) là góc giữa d và hình chiếu d' của đường thẳng d trên (P), kí hiệu $\big(d,(P)\big)$.

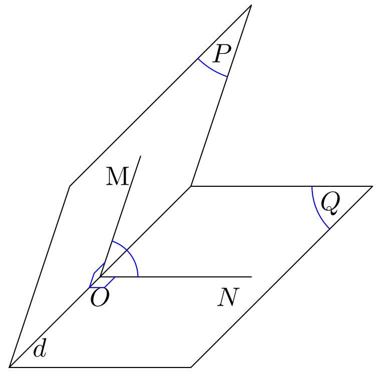


Nhận xét: Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng có số đo từ 0° đến 90°.

3. Góc nhị diện

- Góc nhị diện là hình gồm hai nửa mặt phẳng có chung bờ;

kí hiệu $[P,d,Q]$ hoặc $[M,d,N]$, trong đó (P), (Q) là hai nửa mặt phẳng có chung bờ là đường thẳng d và M, N là các điểm lần lượt thuộc hai nửa mặt phẳng (P), (Q). Đường thẳng d gọi là cạnh của góc nhị diện, mỗi nửa mặt phẳng (P), (Q) gọi là một mặt của góc nhị diện.



- Cho góc nhị diện. Một góc có đỉnh thuộc cạnh của góc nhị diện, hai cạnh của góc đó lần lượt thuộc hai mặt nhị diện và cùng vuông góc với cạnh của góc nhị diện, được gọi là góc phẳng nhị diện của góc nhị diện đã cho.

- Số đo của một góc phẳng nhị diện được gọi là số đo của góc nhị diện đó.

- Nếu số đo góc phẳng nhị diện bằng 90° thì góc nhị diện đó gọi là góc nhị diện vuông.
  Nhận xét: Góc nhị diện có số đo từ 0° đến 180°.

III. KHOẢNG CÁCH TRONG KHÔNG GIAN

1. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

Khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ là khoảng cách từ điểm M đến hình chiếu vuông góc H của M trên Δ, kí hiệu $\mathrm{d}\big(M,\Delta\big)$.

2. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P) là khoảng cách từ điểm M đến hình chiếu vuông góc H của M trên (P), kí hiệu $\mathrm{d}\big(M,(P)\big)$.

3. Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song

Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song Δ và Δ' là khoảng cách từ một điểm bất kì thuộc đường thẳng này đến đường thẳng kia, kí hiệu $\mathrm{d}\big(\Delta,\Delta'\big)$.

4. Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song

Cho đường thẳng Δ song song với mặt phẳng (P). Khoảng cách giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) là khoảng cách từ một điểm bất kì thuộc đường thẳng Δ đến mặt phẳng (P), kí hiệu $\mathrm{d}\big(\Delta,(P)\big)$.

5. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song

Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song (P) và (Q) là khoảng cách từ một điểm bất kì thuộc mặt phẳng này đến mặt phẳng kia, kí hiệu $\mathrm{d}\big((P),(Q)\big)$.

6. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

Cho hai đường thẳng a, b chéo nhau.

- Có và chỉ có một đường thẳng c vừa vuông góc, vừa cắt cả hai đường thẳng a, b, gọi là đường vuông góc chung của hai đường thẳng đó.

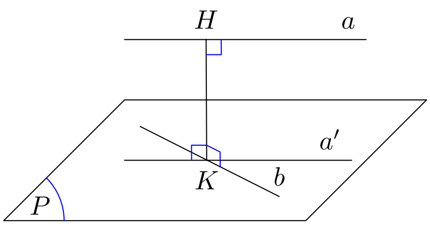
- Đoạn thẳng có hai đầu mút là giao điểm của đường thẳng c với hai đường thẳng a, b gọi là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng đó.

- Độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng a, b gọi là khoảng cách giữa hai đường thẳng đó, kí hiệu $\mathrm{d}(a, b)$.

Nhận xét:

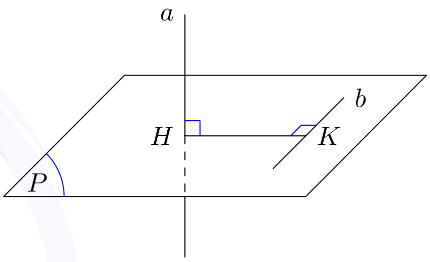
- Gọi (P) là mặt phẳng chứa b và song song với a,

  hình chiếu của a trên (P) là a', giao điểm của a' và b là K, hình chiếu của K trên a là H. Khi đó HK là đoạn vuông góc chung của a và b.
  Ngoài ra, $\mathrm{d}(a, b) = HK = \mathrm{d}(a, (P))$.



- Trong trường hợp đặc biệt $a \perp b$,

  ta có thể xác định như sau: Gọi (P) là mặt phẳng chứa b và vuông góc với a, giao điểm của a và (P) là H, hình chiếu của H trên b là K. Khi đó, HK là đoạn vuông góc chung của a và b.



IV. THỂ TÍCH CỦA MỘT SỐ KHỐI ĐA DIỆN

- Công thức tính thể tích của khối lăng trụ: $V = Sh$.
  Trong đó V, S, h lần lượt là thể tích, diện tích đáy, chiều cao của khối lăng trụ.

- Công thức tính thể tích của khối chóp: $V = \dfrac{1}{3}Sh$.
  Trong đó V, S, h lần lượt là thể tích, diện tích đáy, chiều cao của khối chóp.

- Công thức tính thể tích của khối chóp cụt đều: $V = \dfrac{1}{3}h\left(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2\right)$.
  Trong đó V, h, S_1, S_2 lần lượt là thể tích, chiều cao, diện tích hai đáy của khối chóp cụt đều.

B. MỘT SỐ VÍ DỤ

Dạng I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ lựa chọn một phương án.

Ví dụ 1. Cho hai đường thẳng a và b chéo nhau. Có bao nhiêu đường thẳng vừa vuông góc vừa cắt cả hai đường thẳng a và b?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số.

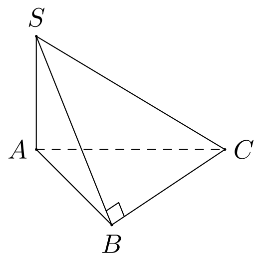
Lời giải.

Có và chỉ có một đường thẳng c vừa vuông góc, vừa cắt cả hai đường thẳng chéo nhau a và b, gọi là đường vuông góc chung của hai đường thẳng đó.

Chọn đáp án B .... □

Ví dụ 2.

Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $SB \perp BC$ (như hình vẽ). Trong tất cả các mặt của hình chóp $S.ABC$, có bao nhiêu mặt là tam giác vuông?



A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải.

Ta có $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp AC$, $SA \perp AB$ và $SA \perp BC$.

Mà $BC \perp SB$, suy ra $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AB$.

Do đó các tam giác $\triangle SAB$, $\triangle SAC$, $\triangle SBC$ và $\triangle ABC$ đều là các tam giác vuông.

Vậy ta có 4 mặt của hình chóp $S.ABC$ là tam giác vuông.

Chọn đáp án D .... □

Dạng II. Câu trắc nghiệm đúng sai

Trong mỗi ý **a)**, **b)**, **c)**, **d)** *ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.*

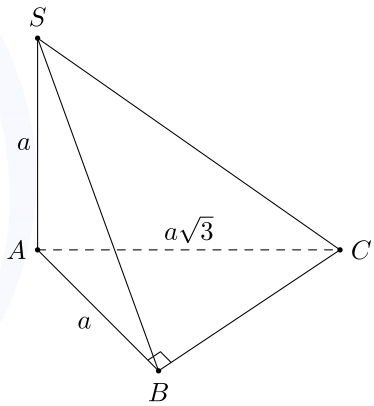
Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $AB \perp BC$, $SA = AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$ (như hình vẽ).

a $BC \perp (SAB)$.

b) Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB) bằng $\widehat{CSA}$.

c $\tan \widehat{CSB} = 1$.

d) Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB) bằng 60°.



Lời giải.

a) **Đúng**.

Ta có $\begin{cases} SA \perp BC \text{ do } SA \perp (ABC) \\ AB \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$.

b) **Sai**.

Ta có $BC \perp (SAB) \Rightarrow SB$ là hình chiếu vuông góc của SC trên (SAB).

Do đó $(SC, (SAB)) = (SC, SB) = \widehat{CSB}$.

c) **Đúng**.

Ta có $\triangle SBC$ vuông tại B. Khi đó

$$\tan \widehat{CSB} = \frac{BC}{SB} = \frac{\sqrt{AC^2 - AB^2}}{SA^2 + AB^2} = \frac{\sqrt{3a^2 - a^2}}{\sqrt{a^2 + a^2}} = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{2}} = 1.$$

d) **Sai**.

Ta có góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB) bằng $\widehat{CSB}$.

Mà $\tan \widehat{CSB} = 1 \Rightarrow \widehat{CSB} = 45^\circ$.

Chọn đáp án | a đúng | b sai | c đúng | d sai | ....

Ví dụ 4. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$, $AA' = 2a$.

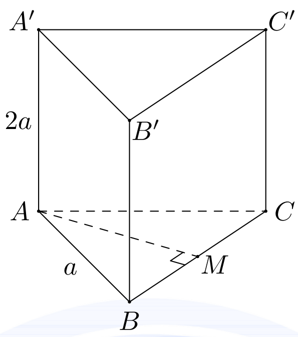
a) Khoảng cách giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(A'B'C')$ bằng $2a$.

b) Khoảng cách giữa đường thẳng $B'C'$ và mặt phẳng (ABC) bằng a.

c) Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng a.

d) Khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng $a\sqrt{3}$.

Lời giải.



Gọi M là trung điểm của BC.

a) Đúng.

Vì $(ABC) \parallel (A'B'C')$ và $A'A \perp (ABC)$ nên

$$\mathrm{d}((ABC),(A'B'C')) = \mathrm{d}(A',(ABC)) = A'A = 2a.$$

b) Sai.

Vì $B'C' \parallel (ABC)$ và $B'B \perp (ABC)$ nên

$$\mathrm{d}(B'C',(ABC)) = \mathrm{d}(B',(ABC)) = B'B = 2a.$$

c) Sai.

Ta có $AM \perp BC$ và $BB' \perp AM$ (do $BB' \perp (ABC)$), suy ra $AM \perp (BB'C'C)$. Do đó

$$\mathrm{d}(A,(BB'C'C)) = AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

d) Sai.

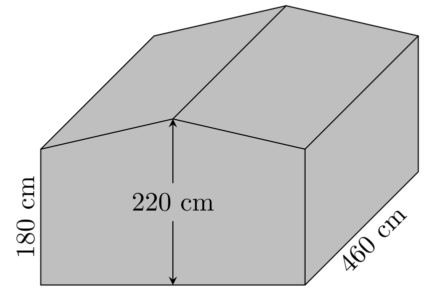
Ta có $\begin{cases} AM \perp BC \\ AM \perp AA' \end{cases} \Rightarrow AM$ là đoạn vuông góc chung của AA' và BC. Khi đó

$$\mathrm{d}(AA',BC) = AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

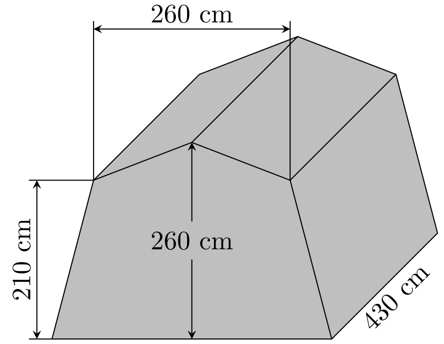
Chọn đáp án | a đúng | b sai | c sai | d sai | ....

Dạng III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Ví dụ 5. Để chuẩn bị cho hoạt động cắm trại, bạn An tìm hiểu các mẫu lều cắm trại có kích thước như trong hình vẽ. Bạn An muốn biết thể tích chênh lệch của hai lều nên thực hiện tính $V_1 - V_2$, trong đó V_1, V_2 lần lượt là thể tích của mẫu lều cắm trại ở Hình a), b). Giá trị của $V_1 - V_2$ bằng bao nhiêu decimét khối (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?



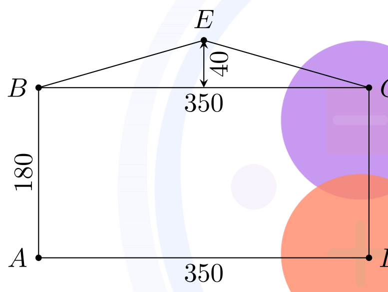
Hình a)



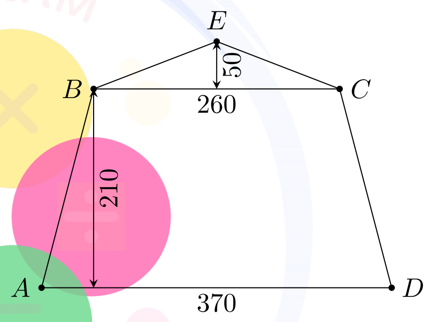
Hình b)

Đáp án: 961

Lời giải.



Hình a)



Hình b)

- Ở hình a), ta có $S_{ABECD} = S_{ABCD} + S_{BEC} = 180 \cdot 350 + \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 350 = 70000$ (cm^2).
  Suy ra $V_1 = S_{ABECD} \cdot h_1 = 70000 \cdot 460 = 32200000$ (cm^3)$=$ 32200 (dm^3).

- Ở hình b), ta có

$$S_{ABECD} = S_{ABCD} + S_{BEC} = \frac{1}{2} \cdot 210 \cdot (260 + 370) + \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 260 = 72650 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

  Suy ra $V_2 = S_{ABECD} \cdot h_2 = 72650 \cdot 430 = 31239500$ (cm^3)$=$ 31239,5 (dm^3).

Vậy $V_1 - V_2 = 960{,}5 \approx 961$ (dm^3).

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Dạng I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ lựa chọn một phương án.

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và $SD \perp (ABCD)$. Đường thẳng AC vuông góc với mặt phẳng nào trong các mặt phẳng sau?

A. (SAB). **B.** (SAD). **C.** (SCD). **D.** (SBD).

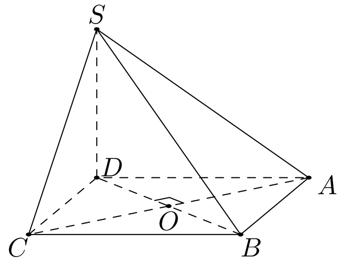
Lời giải.

Ta có

$ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow AC \perp BD$.

$SD \perp (ABCD) \Rightarrow AC \perp SD$.

Suy ra $AC \perp (SBD)$.



Chọn đáp án (D) .... □

Câu 2. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$, O là giao điểm của AC và BD, M là trung điểm AD. Góc nào sau đây là góc phẳng nhị diện của góc nhị diện $[B, AD, S]$?

A. $\widehat{SAB}$. **B.** $\widehat{SDB}$. **C.** $\widehat{SMO}$. **D.** $\widehat{SMB}$.

Lời giải.

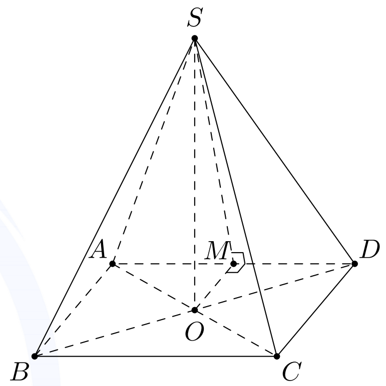
Góc nhị diện $[B, AD, S]$ có cạnh là AD và hai mặt là $(ABCD)$ và (SAD).

Ta có

$O = AC \cap BD$, M trung điểm $AD \Rightarrow OM \perp AD$.

$\triangle SAD$ cân tại $S \Rightarrow SM \perp AD$.

Vậy góc phẳng nhị diện của góc nhị diện $[B, AD, S]$ là $\widehat{SMO}$.



Chọn đáp án (C) .... □

Câu 3. Cho đường thẳng a và hai mặt phẳng (P), (Q) vuông góc với nhau. Phát biểu nào sau đây là đúng về đường thẳng a?

A. Đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (P) thì vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong (Q).

B. Đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (P) thì vuông góc với giao tuyến của (P) và (Q).

C. Đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (Q) thì a nằm trong mặt phẳng (P).

D. Đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (P) và vuông góc với giao tuyến của (P), Q thì a vuông góc với (Q).

Lời giải.

Theo tính chất hai mặt phẳng vuông góc: "Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến cũng vuông góc với mặt phẳng kia".

Vậy đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (P) và vuông góc với giao tuyến của (P), (Q) thì a vuông góc với (Q).

Chọn đáp án (D) .... □

Câu 4. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai đường thẳng AC và $A'B$ bằng

A. 30°. **B.** 45°. **C.** 60°. **D.** 90°.

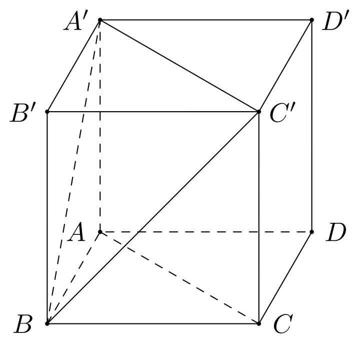
Lời giải.

Ta có $AC \parallel A'C'$ nên $(AC, A'B) = (A'C', A'B) = \widehat{BA'C'}$.

Tam giác $BA'C'$ có $A'C' = C'B = BA'$ nên $\triangle BA'C'$ là tam giác đều.

Suy ra $\widehat{BA'C'} = 60^\circ$.

Vậy góc giữa hai đường thẳng AC và $A'B$ bằng 60°.



Chọn đáp án (C) .... □

Câu 5. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng $ABCD$ bằng

A. 30°. **B.** 45°. **C.** 60°. **D.** 90°.

Lời giải.

Gọi O là giao điểm AC và $BD \Rightarrow SO \perp (ABCD)$.

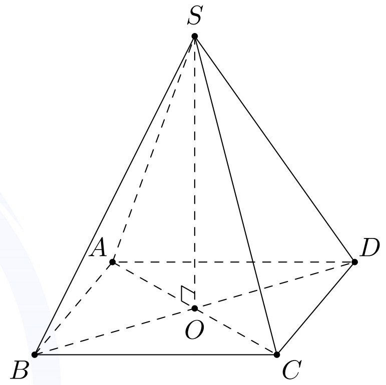
Suy ra AO là hình chiếu của SA trên $(ABCD)$.

Do đó $(SA, (ABCD)) = \widehat{SAO}$.

$\triangle SAO$ vuông tại O có $SA = a$, $AO = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

$\Rightarrow \cos\widehat{SAO} = \dfrac{AO}{SA} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \widehat{SAO} = 45^\circ$.

Vậy góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45°.



Chọn đáp án (B) .... □

Câu 6. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Khoảng cách từ đỉnh đến mặt đáy bằng

A. a. **B.** $\dfrac{2a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $a\sqrt{2}$. **D.** $\dfrac{a}{2}$.

Lời giải.

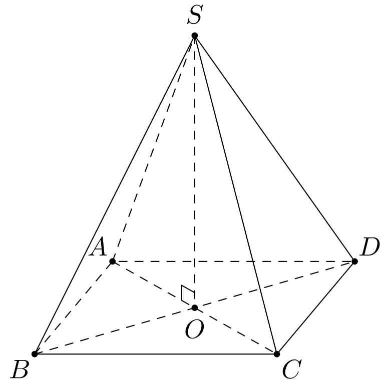
Gọi O là giao điểm AC và $BD \Rightarrow SO \perp (ABCD)$.

$\Rightarrow \mathrm{d}\,(S, (ABCD)) = SO$.

$\triangle SAO$ vuông tại O có $SA = a$, $AO = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

$\Rightarrow SA^2 = SO^2 + AO^2 \Rightarrow SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vậy khoảng cách từ đỉnh đến mặt đáy bằng $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.



Chọn đáp án (B) .... □

Câu 7. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AA' = 2a$, $A'B' = 2a$, $A'D' = a$. Khoảng cách từ đường thẳng AA' đến mặt phẳng $(BDD'B')$ bằng

A. $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$. **B.** $a\sqrt{2}$. **C.** $\dfrac{a}{2}$. **D.** $\dfrac{2a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A' trên $B'D'$.

$\Rightarrow \begin{cases} A'H \perp B'D' \\ A'H \perp BB' \text{ vì } BB' \perp (A'B'C'D'). \end{cases}$

$\Rightarrow A'H \perp (BDD'B')$.

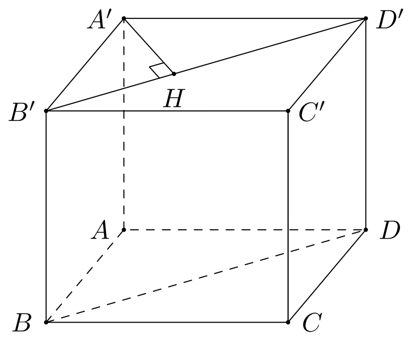
Mặt khác $AA' \parallel BB' \Rightarrow AA' \parallel (BDD'B')$.

Do đó $d(AA', (BDD'B')) = \mathrm{d}(A', (BDD'B')) = A'H$.

$\triangle A'B'D'$ vuông tại A', $A'H \perp B'D'$.

$\Rightarrow \dfrac{1}{A'H^2} = \dfrac{1}{A'B'^2} + \dfrac{1}{A'D'^2} = \dfrac{5}{4a^2} \Rightarrow A'H = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Vậy khoảng cách từ đường thẳng AA' đến mặt phẳng $(BDD'B')$ bằng $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.



Chọn đáp án (A) .... □

Câu 8. Cho khối chóp có diện tích đáy là $3a^2$ và chiều cao là a. Thể tích của khối chóp đó bằng

A. $3a^3$. **B.** a^3. **C.** $\dfrac{a^3}{3}$. **D.** $9a^3$.

Lời giải.

Thể tích của khối chóp là $V = \dfrac{1}{3} \cdot 3a^2 \cdot a = a^3$.

Chọn đáp án (B) .... □

Câu 9. Cho khối lăng trụ có diện tích đáy bằng $3a^2$ và chiều cao là a. Thể tích của khối lăng trụ bằng

A. $3a^3$. **B.** a^3. **C.** $\dfrac{a^3}{3}$. **D.** $9a^3$.

Lời giải.

Thể tích của khối lăng trụ là $V = 3a^2 \cdot a = 3a^3$.

Chọn đáp án (A) .... □

Dạng II. Câu trắc nghiệm đúng sai

Trong mỗi ý **a)**, **b)**, **c)**, **d)** *ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.*

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi H là trung điểm của AB. Xác định tính đúng sai của các mệnh đề sau.

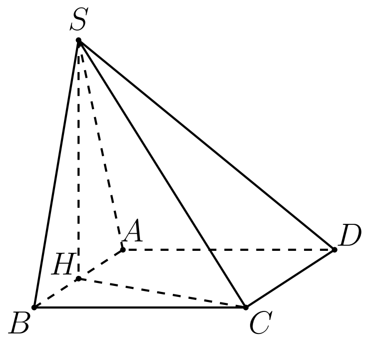
a) $SH \perp (ABCD)$.

b) Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $\widehat{SCA}$.

c) $CH = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

d) Gọi α là góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$. Giá trị $\cos\alpha$ bằng $\dfrac{3}{4}$.

Lời giải.



a) Vì SH nằm trong (SAB) và $SH \perp AB$, với AB là giao tuyến của (SAB) và $(ABCD)$ nên $SH \perp (ABCD)$.
Vậy khẳng định trong đề bài là đúng.

b) Hình chiếu của SC lên $(ABCD)$ là HC nên góc giữa SC và $(ABCD)$ là góc $\widehat{SCH}$.
Vậy khẳng định trong đề bài là sai.

c) Ta có $HC = \sqrt{HB^2 + BC^2} = \sqrt{\dfrac{a^2}{4} + a^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.
Vậy khẳng định trong đề bài là đúng.

d) Ta có $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $SC = \sqrt{SH^2 + HC^2} = a\sqrt{2}$. Góc giữa SC và $(ABCD)$ là $\alpha = \widehat{SCH}$ nên $\cos\alpha = \dfrac{HC}{SC} = \dfrac{\sqrt{10}}{4}$.
Vậy khẳng định $\cos\alpha = \dfrac{3}{4}$ là sai.

Chọn đáp án | a đúng | b sai | c đúng | d sai | .... □

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $AC = a$, $SA = \dfrac{a}{2}$. Gọi H là hình chiếu của S trên cạnh CD. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a $AH \perp CD$.

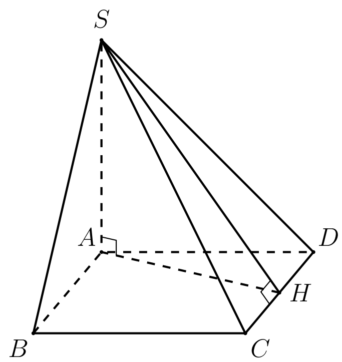
b $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

c) Góc $\widehat{SDC}$ là góc phẳng nhị diện của góc nhị điện $[S, CD, A]$.

d Số đo của góc nhị diện $[S, CD, A]$ bằng $30°$.

Lời giải.

Từ giả thiết suy ra $\triangle ABC$ và $\triangle ACD$ là hai tam giác đều có cạnh bằng a.
Gọi H là trung điểm của CD ta có $AH \perp CD$.
Mà $SA \perp (ABCD)$ nên $CD \perp (SAH)$ suy ra $SH \perp CD$. Vậy H là hình chiếu vuông góc của S lên CD.
Từ đó suy ra $\widehat{SHA}$ là góc phẳng nhị diện của góc nhị điện $[S, CD, A]$.
Tam giác ACD đều cạnh a nên $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Ta có $\tan\widehat{SHA} = \dfrac{SA}{AH} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \widehat{SHA} = 30°$.



a) Khẳng định $AH \perp CD$ là đúng.

b) Khẳng định $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ là đúng.

c) Khẳng định "Góc $\widehat{SDC}$ là góc phẳng nhị diện của góc nhị diện $[S, CD, A]$" là sai.

d) Khẳng định "Số đo của góc nhị diện $[S, CD, A]$ bằng $30°$" là đúng.

Chọn đáp án | a đúng | b đúng | c sai | d đúng | .... □

Câu 12. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

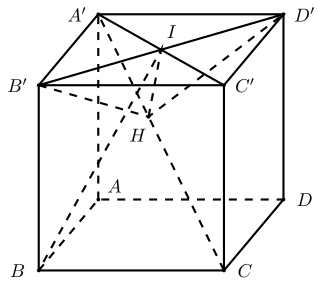
a Góc giữa hai đường thẳng AB và $A'C'$ bằng $45°$.

b) Gọi α là góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $(A'B'C'D')$. Giá trị $\tan\alpha$ bằng $\sqrt{2}$.

c) Gọi β là số đo của góc nhị diện $[B, A'C', B']$. Giá trị $\tan\beta$ bằng $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

d Số đo của góc nhị diện $[B', A'C, D']$ bằng $120°$.

Lời giải.



Giả sử cạnh của hình lập phương bằng a.

Gọi α là góc giữa $A'C$ và $(A'B'C'D')$. Ta có

$$\tan\alpha = \frac{CC'}{A'C'} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Gọi I là trung điểm của $A'C'$ ta có $B'I \perp A'C'$ và $BI \perp A'C'$ nên số đo góc nhị diện $[B, A'C', B']$ là $\beta = \widehat{B'IB}$.

Ta có $\tan\beta = \dfrac{BB'}{B'I} = \sqrt{2}$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên $A'C$ ta có góc phẳng nhị diện của góc nhị diện $[B', A'C, D']$ bằng $\widehat{B'HD'}$.

Ta tính được $B'H = D'H = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$, áp dụng định lý Côsin ta có

$$\cos\widehat{B'HD'} = \frac{B'H^2 + D'H^2 - B'H'^2}{2B'H \cdot D'H} = -\frac{1}{2}.$$

Suy ra số đo của góc nhị diện $[B', A'C, D']$ bằng $120°$.

a) Góc giữa AB và $A'C'$ bằng góc $(A'B', A'C') = \widehat{B'A'C'} = 45°$. Vậy khẳng định trong đề bài là đúng.

b) Khẳng định $\tan\alpha = \sqrt{2}$ là sai vì $\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

c) Khẳng định $\tan\beta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ là sai.

d) Số đo của góc nhị diện $[B', A'C, D']$ bằng $120°$ là đúng.

Chọn đáp án | a đúng | b sai | c sai | d đúng | .... □

Câu 13. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $(A'ABB') \perp (ABC)$, $AA' = 2a$, $\widehat{A'AB} = 60^\circ$. Gọi H là hình chiếu của A' trên AB. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

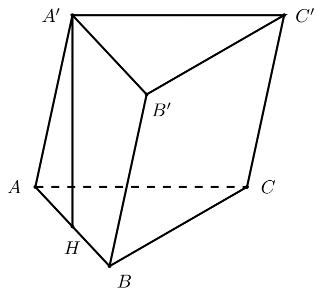
a Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau $A'C'$ và AB bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(A'B'C')$ và (ABC).

b) $A'H$ không phải là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau $A'C'$ và AB.

c $A'H = a\sqrt{3}$.

d) Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau $A'C'$ và AB bằng a.

Lời giải.



Do $(A'ABB') \perp (ABC)$ mà $A'H \perp AB$ nên $A'H \perp (ABC)$.

Vì $(ABC) \parallel (A'B'C')$ nên $A'H \perp (A'B'C')$. Suy ra $A'H \perp' C'$.

Vậy $A'H$ là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau $A'C'$ và AB, $A'H$ cũng là khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song $(A'B'C')$ và (ABC).

Xét tam giác $A'AH$ vuông có

$$A'H = AA' \cdot \sin 60^\circ = a\sqrt{3}.$$

Vậy $\mathrm{d}(A'C', AB) = a\sqrt{3}$.

a) Khẳng định "Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau $A'C'$ và AB bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(A'B'C')$ và (ABC)" là đúng.

b) Khẳng định "$A'H$ không phải là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau $A'C'$ và AB" là sai.

c) Khẳng định "$A'H = a\sqrt{3}$" là đúng.

d) Khẳng định "Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau $A'C'$ và AB bằng a" là sai.

Chọn đáp án

a đúng	b sai	c đúng	d sai

.... □

Câu 14. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D$ có cạnh bằng a. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

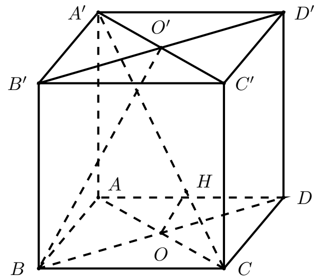
a Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và DD' bằng a.

b Khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng $(ACC'A')$ bằng $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

c) Khoảng cách từ điểm B đến đường thẳng $A'C'$ bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

d) Khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và $A'C$ bằng $\dfrac{a}{2}$.

Lời giải.



Gọi O là giao điểm của AC và BD; O' là giao điểm của $A'C'$ và $B'D'$.

Vì $AB \perp AD$, $DD' \perp AD$ nên $\mathrm{d}(AB, DD') = AD = a$.

Vì $BO \perp (ACC'A')$ nên $\mathrm{d}(B, (ACC'A')) = BO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vì $A'C' \perp B'O', A'C' \perp BB'$ nên $A'C' \perp BO'$.

Suy ra $\mathrm{d}(B, A'C') = BO'$.

Xét tam giác vuông $BB'O'$ có $BO' = \sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + a^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Vậy $\mathrm{d}(B, A'C') = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Gọi H là hình chiếu của O trên $A'C$.

Vì $BD \perp (ACA')$ nên $BD \perp OH$. Do đó, OH là đoạn vuông góc chung của BD và $A'C$.

Vì hai tam giác $CA'A$ và COH đồng dạng với nhau nên $\dfrac{OH}{A'A} = \dfrac{CO}{CA'}$.

Suy ra $OH = \dfrac{A'A \cdot CO}{CA'} = \dfrac{a \cdot \dfrac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{3}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.

Vậy $\mathrm{d}(BD, A'C) = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.

a) Mệnh đề "Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và DD' bằng a" là đúng.

b) Mệnh đề "Khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng $(ACC'A')$ bằng $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$" là đúng.

c) Mệnh đề "Khoảng cách từ điểm B đến đường thẳng $A'C'$ bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$" là sai.

d) Mệnh đề "Khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và $A'C$ bằng $\dfrac{a}{2}$" là sai.

Chọn đáp án | a đúng | b đúng | c sai | d sai | .... □

Câu 15. Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi cạnh $3a$, $\widehat{ABC} = 60°$, $AA' = 2a$. Đỉnh A' cách đều ba đỉnh A, B, C. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC.

a $A'G$ là đường cao của hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$.

b) Độ dài đường cao của hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ bằng $a\sqrt{3}$.

c Diện tích hình thoi $ABCD$ bằng $\dfrac{9a^2\sqrt{3}}{2}$.

d Thể tích của khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ 'bằng $\dfrac{9a^3\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

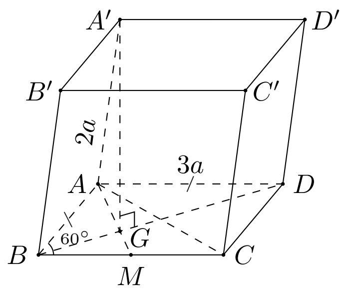
a) Đúng.

Vì $AB = BC = 3a$, $\widehat{ABC} = 60°$ nên ABC là tam giác đều.

Suy ra G cách đều ba điểm A, B, C.

Mà A' cách đều ba điểm A, B, C nên $A'G \perp (ABC)$.

Vậy $A'G$ là đường cao của hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$.



b) Sai.

Xét tam giác ABC đều có $AG = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{3a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

Xét tam giác $AA'G$ vuông tại G có $A'G = \sqrt{A'A^2 - AG^2} = \sqrt{(2a)^2 - (a\sqrt{3})^2} = a$.

c) Đúng.

Diện tích hình thoi $ABCD$ là $S_{ABCD} = 3a \cdot 3a \cdot \sin 60^\circ = \dfrac{9a^2\sqrt{3}}{2}$.

d) Đúng.

Thể tích của khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ là $V_{ABCD.A'B'C'D'} = a \cdot \dfrac{9a^2\sqrt{3}}{2} = \dfrac{9a^3\sqrt{3}}{2}$.

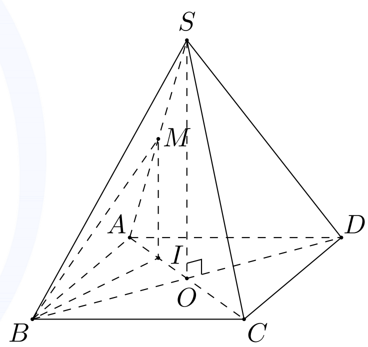
Chọn đáp án | a đúng | b sai | c đúng | d đúng | .... □

Dạng III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 16. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $2a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của SA. Góc giữa đường thẳng BM với mặt phẳng $(ABCD)$ bằng bao nhiêu độ?

Đáp án: 60°

Lời giải.



Gọi O là giao điểm AC và BD, I là trung điểm của AO.

Vì $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều nên $SO \perp (ABCD)$.

Do $MI \parallel SO$ nên $MI \perp (ABCD)$.

Suy ra $(BM, (ABCD)) = \widehat{MBI}$.

Xét tam giác SAO vuông có

$$SO = \sqrt{(2a\sqrt{2})^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{30}}{2}.$$

Suy ra $MI = \dfrac{1}{2}SO = \dfrac{a\sqrt{30}}{4}$.

Xét tam giác vuông BIO có $BI = \sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{10}}{4}$.

Khi đó, $\tan \widehat{MBI} = \dfrac{MI}{BI} = \dfrac{\frac{a\sqrt{30}}{4}}{\frac{a\sqrt{10}}{4}} = \sqrt{3}$. Suy ra $\widehat{MBI} = 60^\circ$.

Vậy góc giữa đường thẳng BM với mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60°.

Câu 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh $a, \widehat{ABC} = 60^\circ$. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Biết rằng $SO \perp (ABCD), SO = \dfrac{3a}{4}$. Khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SCD) bằng $\dfrac{ma}{n}$ với $\dfrac{m}{n}$ là phân số tối giản, $m > 0, n > 0$. Giá trị $m + n$ bằng bao nhiêu?

Đáp án: 11

Lời giải.

Gọi I là hình chiếu của O trên CD, H là hình chiếu của O trên SI.

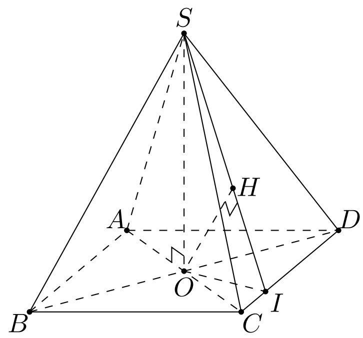
Thấy rằng $CD \perp (SO)$ nên $CD \perp OH$.

Mà $OH \perp SI$ nên $OH \perp (SCD)$.

Suy ra $\mathrm{d}\big(O,(SCD)\big) = OH$.

Vì $AB = BC, \widehat{ABC} = 60^\circ$ nên tam giác ABC đều.

Suy ra $OB = OD = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}, OA = OC = \dfrac{a}{2}$.



Xét tam giác vuông DOC có $OI = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{a}{2}}{a} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Xét tam giác vuông SOI có

$$SI = \sqrt{\left(\frac{3a}{4}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \text{ và } OH = \frac{\dfrac{3a}{4}\cdot\dfrac{a\sqrt{3}}{4}}{\dfrac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{3a}{8}.$$

Suy ra $\dfrac{m}{n} = \dfrac{3}{8}$. Vậy $m + n = 3 + 8 = 11$.

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$, số đo của góc nhị diện $[S, BC, A]$ bằng 60°. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và BD bằng $\dfrac{a\sqrt{30}}{n}$. Giá trị của n bằng bao nhiêu?

Đáp án: 10

Lời giải.

Vì $BC \perp SA$, $BC \perp AB$ nên $BC \perp SB$.

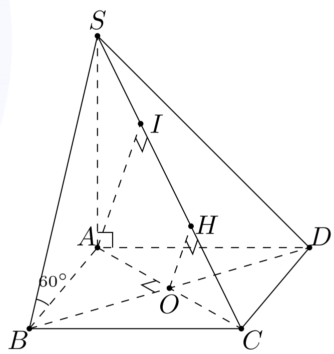
Suy ra $\widehat{SBA}$ bằng số đo của góc nhị diện $[S, BC, A]$, tức là $\widehat{SBA} = 60^\circ$.

Xét tam giác vuông SAB có $SA = a\tan 60^\circ = a\sqrt{3}$.

Gọi H là hình chiếu của O trên SC.

Vì $BD \perp (SAC)$ nên $OH \perp BD$. Suy ra OH là đoạn vuông góc chung của BD và SC.

Gọi I là hình chiếu của A trên SC.



Xét tam giác vuông SAC có

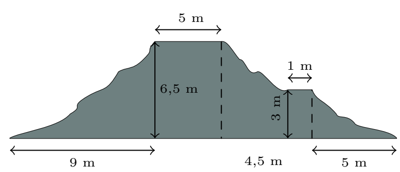
$$AI = \frac{a\sqrt{3}\cdot a\sqrt{2}}{\sqrt{(a\sqrt{3})^2 + (a\sqrt{2})^2}} = \frac{a\sqrt{30}}{5}.$$

Ngoài ra, vì $OH \parallel AI$ nên $\dfrac{OH}{AI} = \dfrac{OC}{CA} = \dfrac{1}{2}$, suy ra $OH = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{a\sqrt{30}}{5} = \dfrac{a\sqrt{30}}{10}$.

Vậy $n = 10$.

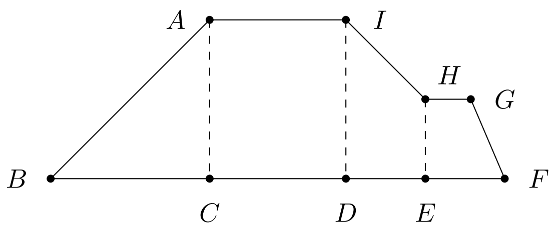
Câu 19.

Người ta cần xây dựng công trình đê để ngăn nước lũ của sông. Mặt cắt của đê được thiết kế với số đo như trong Hình 14. Tổng thể tích vật liệu cần dùng để xây dựng đoạn đê đó bằng bao nhiêu mét khối (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)? Biết rằng đoạn đê thẳng và dài 100 m.



Đáp án: 9 363

Lời giải.



Hình 14

Chia mặt cắt đoạn đê thành các hình tam giác vuông, hình chữ nhật, hình thang như Hình 24.
Đoạn đê được ghép bởi bốn khối lăng trụ đứng có cùng chiều cao 100 m và có đáy lần lượt là tam giác vuông ABC, hình chữ nhật $ACDI$, các hình thang vuông $DEHI$ và $EFGH$.
Theo giả thiết, ta có

- Tam giác vuông ABC có kích thước hai cạnh góc vuông là 9 m và 6,5 m;
- Hình chữ nhật $ACDI$ có hai kích thước là 5 m và 6,5 m;
- Hình thang vuông $DEHI$ có đáy lớn dài 6,5 m, đáy nhỏ dài 3 m và chiều cao 4,5 m;
- Hình thang vuông $EFGH$ có đáy lớn dài 6 m, đáy nhỏ dài 1 m và chiều cao 3 m.

Thể tích của khối lăng trụ đứng có đáy là tam giác vuông ABC bằng

$$V_1 = \left(\frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 6{,}5\right) \cdot 100 = 2\,925\,(\mathrm{m}^3).$$

Thể tích của khối lăng trụ đứng có đáy là hình chữ nhật $ACDI$ bằng

$$V_2 = (5 \cdot 6{,}5) \cdot 100 = 3250\,(\mathrm{m}^3).$$

Thể tích của khối lăng trụ đứng có đáy là hình thang vuông $DEHI$ bằng

$$V_3 = \frac{1}{2}(6{,}5 + 3) \cdot 4{,}5 \cdot 1\,00 = 2\,137{,}5\,(\mathrm{m}^3).$$

Thể tích của khối lăng trụ đứng có đáy là hình thang vuông $DEHI$ bằng

$$V_4 = \frac{1}{2}(6 + 1) \cdot 3 \cdot 100 = 1\,050\,(\mathrm{m}^3).$$

Vậy thể tích vật liệu cần dùng để xây dựng đoạn đê đó bằng

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = 2\,925 + 3\,250 + 2\,137{,}5 + 1\,050 = 9\,362{,}5 \approx 9\,363\,(\mathrm{m}^3).$$

BẢNG ĐÁP ÁN

PHẦN I.

Câu 1. D	Câu 2. C	Câu 3. D	Câu 4. C	Câu 5. B	Câu 6. B
Câu 7. A	Câu 8. B	Câu 9. A			

PHẦN II.

Câu 10. a Đ b S c Đ d S	Câu 11. a Đ b Đ c S d Đ
Câu 12. a Đ b S c S d Đ	Câu 13. a Đ b S c Đ d S
Câu 14. a Đ b Đ c S d S	Câu 15. a Đ b S c Đ d Đ

PHẦN III.

Câu 16. 60°	Câu 17. 11	Câu 18. 10	Câu 19. 9 363

CHỦ ĐỀ 6. VECTƠ VÀ PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. VECTƠ

1. Vectơ và các phép toán vectơ

a) *Các khái niệm*

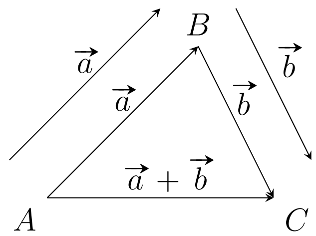
- Vectơ là một đoạn thẳng có hướng.
- Giá của vectơ là đường thẳng đi qua hai đầu mút của vectơ; độ dài của vectơ là khoảng cách giữa hai đầu mút của vectơ; hai vectơ cùng phương nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau; hai vectơ bằng nhau nếu chúng cùng hướng và cùng độ dài; vectơ-không (kí hiệu $\vec{0}$) là vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau; hai vectơ đối nhau nếu chúng ngược hướng và cùng độ dài.

b) *Các phép toán vectơ trong không gian*

- Tổng và hiệu của hai vectơ:

  Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

  – Lấy một điểm A tuỳ ý, vẽ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Vectơ $\overrightarrow{AC}$ được gọi là tổng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu là $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$.



  – Hiệu của vectơ $\vec{a}$ và vectơ $\vec{b}$ là tổng của vectơ $\vec{a}$ và vectơ đối của vectơ $\vec{b}$, kí hiệu là $\vec{a} - \vec{b}$.

  Chú ý:

  – Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ (Quy tắc hình bình hành).

  – Nếu $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$ (Quy tắc hình hộp).

  – Với ba điểm O, A, B trong không gian, ta có $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$ (Quy tắc hiệu).

- Tích của một số với một vectơ:

  Cho số thực $k \neq 0$ và vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$. Tích của số k với vectơ $\vec{a}$ là một vectơ, kí hiệu là $k\vec{a}$, được xác định như sau:

  – Cùng hướng với vectơ $\vec{a}$ nếu $k > 0$, ngược hướng với vectơ $\vec{a}$ nếu $k < 0$;

  – Có độ dài bằng $|k| \cdot |\vec{a}|$.

  Chú ý:

  – Ta có $k\vec{a} = 0$ khi và chỉ khi $k = 0$ hoặc $\vec{a} = \vec{0}$.

  – Với hai vectơ bất kì $\vec{a}$, $\vec{b}$ và hai số thực h, k, ta có

- $k\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=k\vec{a}+k\vec{b}$;
- $k\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=k\vec{a}-k\vec{b}$;
- $(h+k)\vec{a}=h\vec{a}+k\vec{a}$;
- $h(k\vec{a})=(hk)\vec{a}$;
- $1\vec{a}=\vec{a}; (-1)\vec{a}=-\vec{a}$.

– Hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ khác $\vec{0}$ là cùng phương khi và chỉ khi có một số thực $k\neq 0$ sao cho $\vec{a}=k\vec{b}$.

– Nếu I là trung điểm của đoạn thẳng AB thì $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.

– Nếu G là trọng tâm của tam giác ABC thì $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

– Điều kiện cần và đủ để ba điểm A, B, C thẳng hàng là có số thực $k\neq 0$ sao cho $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$.

- Tích vô hướng của hai vectơ:
  Cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ khác $\vec{0}$.
  Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu $\vec{a}\cdot\vec{b}$, là một số thực được xác định bởi công thức:
  $$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right),$$
  ở đó, $\left(\vec{a},\vec{b}\right)$ là góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.
  Chú ý: Với các vectơ bất kì $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ và số thực k tuỳ ý, ta có:
  - $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$;
  - $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$;
  - $(k\vec{a})\cdot\vec{b}=k\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)=\vec{a}\cdot\left(k\vec{b}\right)$;
  - $(\vec{a})^2\geq 0$, trong đó $(\vec{a})^2=\vec{a}\cdot\vec{a}$.

  Ngoài ra, $(\vec{a})^2=0\Leftrightarrow\vec{a}=\vec{0}$.

II. PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

1. Toạ độ của vectơ

Xét không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$.

- $\overrightarrow{OM}=(a;b;c)\Leftrightarrow M(a;b;c)$.
- Toạ độ của một vectơ $\vec{u}$ là toạ độ của điểm A, trong đó A là điểm sao cho $\overrightarrow{OA}=\vec{u}$.
- Nếu $\vec{u}=(a;b;c)$ thì $\vec{u}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$.
  Ngược lại, nếu $\vec{u}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$ thì $\vec{u}=(a;b;c)$.
- Với $\vec{a}=(x_1;y_1;z_1)$ và $\vec{b}=(x_2;y_2;z_2)$, ta có $\vec{a}=\vec{b}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=x_2\\y_1=y_2\\z_1=z_2.\end{cases}$
- Cho hai điểm $A(x_A;y_A;z_A)$ và $B(x_B;y_B;z_B)$. Khi đó, ta có
  $$\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A).$$

2. Biểu thức toạ độ của các phép toán vectơ

a) Cho hai vectơ $\vec{u} = (x_1; y_1; z_1)$ và $\vec{v} = (x_2; y_2; z_2)$. Khi đó:

- $\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2)$;
- $\vec{u} - \vec{v} = (x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2)$;
- $m\vec{u} = (mx_1; my_1; mz_1)$ với $m \in \mathbb{R}$;
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

Chú ý:

- Hai vectơ $\vec{u} = (x_1; y_1; z_1)$, $\vec{v} = (x_2; y_2; z_2)$ $(\vec{v} \neq \vec{0})$ cùng phương khi và chỉ khi có một số thực m sao cho $\begin{cases} x_1 = mx_2 \\ y_1 = my_2 \\ z_1 = mz_2. \end{cases}$
- Nếu $\vec{a} = (x; y; z)$ thì $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
- Nếu $A(x_1; y_1; z_1)$ và $B(x_2; y_2; z_2)$ thì
$$AB = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$
- Với hai vectơ $\vec{u} = (x_1; y_1; z_1)$ và $\vec{v} = (x_2; y_2; z_2)$ khác vectơ $\vec{0}$, ta có
$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

b) Cho hai điểm $A(x_A; y_A; z_A)$ và $B(x_B; y_B; z_B)$. Nếu $M(x_M; y_M; z_M)$ là trung điểm đoạn thẳng AB thì $x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2}$; $y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2}$; $z_M = \dfrac{z_A + z_B}{2}$.

c) Cho tam giác ABC có $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$, $C(x_C; y_C; z_C)$. Nếu $G(x_G; y_G; z_G)$ là trọng tâm tam giác ABC thì
$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}; y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}.$$

3. Phương trình mặt phẳng

a) *Vectơ pháp tuyến và cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng*

- Nếu vectơ $\vec{n}$ khác $\vec{0}$ và có giá vuông góc với mặt phẳng (P) thì $\vec{n}$ được gọi là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).
- Hai vectơ không cùng phương có giá song song hoặc thuộc mặt phẳng (P) được gọi là cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng (P).

Chú ý: Nếu hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ là cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng (α) thì $\vec{n} = \left[\vec{a}, \vec{b}\right]$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α).

b) *Phương trình mặt phẳng*

- Mặt phẳng (P) đi qua điểm $I(x_0; y_0; z_0)$ và nhận $\vec{n} = (a; b; c)$ làm vectơ pháp tuyến có phương trình tổng quát là $ax + by + cz + d = 0$ với $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$.

- Mặt phẳng đi qua ba điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với $abc \neq 0$ có phương trình chính tắc là $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$.

c) *Điều kiện song song và vuông góc của hai mặt phẳng*

Cho hai mặt phẳng (P_1), (P_2) lần lượt có phương trình tổng quát là

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0; A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

Gọi $\vec{n}_1=(A_1;B_1;C_1)$, $\vec{n}_2=(A_2;B_2;C_2)$ lần lượt là vectơ pháp tuyến của hai mặt phẳng (P_1), (P_2), khi đó

- $(P_1) \parallel (P_2) \Leftrightarrow$ Tồn tại số thực $k \neq 0$ sao cho $\begin{cases} \vec{n}_1=k\vec{n}_2 \\ D_1 \neq kD_2. \end{cases}$
- $(P_1) \perp (P_2) \Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$.

d) *Khoảng cách tìm một điểm đến một mặt phẳng*

Khoảng cách từ điểm $M_0\left(x_0;y_0;z_0\right)$ đến mặt phẳng $(P)\colon Ax+By+Cz+D=0$ $\left(A^2+B^2+C^2>0\right)$ được tính theo công thức $\mathrm{d}\left(M_0,(P)\right)=\dfrac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

4. Phương trình đường thẳng

a) *Vectơ chỉ phương của đường thẳng*

Nếu vectơ $\vec{u}$ khác $\vec{0}$ và có giá song song hoặc trùng với đường thẳng Δ thì $\vec{u}$ được gọi là vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ.

b) *Phương trình đường thẳng*

- Hệ phương trình $\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \\ z=z_0+ct \end{cases}$, trong đó a,b,c không đồng thời bằng $0, t$ là tham số, được gọi là phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua $M_0\left(x_0;y_0;z_0\right)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(a;b;c)$.
- Đường thẳng đi qua điểm $M_0\left(x_0;y_0;z_0\right)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(a;b;c)$ (với $abc \neq 0$) thì có phương trình chính tắc là: $\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$.

c) *Vị trí tương đối của hai đường thẳng* Cho hai đường thẳng phân biệt Δ_1, Δ_2 lần lượt đi qua các điểm M_1, M_2 và tương ứng có $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ là hai vectơ chỉ phương. Khi đó, ta có

- $\Delta_1 \parallel \Delta_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\vec{u}_1,\vec{u}_2\right]=\vec{0} \\ \left[\vec{u}_1,\overrightarrow{M_1M_2}\right] \neq \vec{0}; \end{cases}$
- Δ_1 cắt $\Delta_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\vec{u}_1,\vec{u}_2\right] \neq \vec{0} \\ \left[\vec{u}_1,\vec{u}_2\right]\cdot\overrightarrow{M_1M_2}=0; \end{cases}$
- Δ_1 và Δ_2 chéo nhau $\Leftrightarrow \left[\vec{u}_1,\vec{u}_2\right]\cdot\overrightarrow{M_1M_2} \neq 0$.

5. Phương trình mặt cầu

- Phương trình của mặt cầu tâm $I(a;b;c)$, bán kính R là

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2.$$

- Phương trình $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ xác định một mặt cầu khi và chỉ khi $a^2+b^2+c^2-d>0$.
  Ngoài ra, nếu $a^2+b^2+c^2-d>0$ thì phương trình đó xác định mặt cầu tâm $I(a;b;c)$ và bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$.

6. Góc

a) *Côsin của góc giữa hai đường thẳng*

Cho hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 có vectơ chỉ phương lần lượt là $\vec{u}_1=(a_1;b_1;c_1)$, $\vec{u}_2=(a_2;b_2;c_2)$. Khi đó, ta có $\cos(\Delta_1,\Delta_2)=\dfrac{|a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$.

Nhận xét: $\Delta_1\perp\Delta_2\Leftrightarrow a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$.

b) *Sin của góc giữa đường thẳng và mặt phẳng*

Cho đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(a_1;b_1;c_1)$ và mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(a_2;b_2;c_2)$. Khi đó, ta có

$$\sin(\Delta,(P))=\frac{|a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}.$$

7. Côsin của góc giữa hai mặt phẳng

Cho hai mặt phẳng (P_1) và (P_2) có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1=(A_1;B_1;C_1)$, $\vec{n}_2=(A_2;B_2;C_2)$. Khi đó, ta có

$$\cos((P_1),(P_2))=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

B. MỘT SỐ VÍ DỤ

Dạng I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ lựa chọn một phương án.

Ví dụ 1. Cho hai vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$ có $|\vec{u}|=2$, $|\vec{v}|=3$ và $(\vec{u},\vec{v})=60^\circ$. Khi đó, $\vec{u}\cdot\vec{v}$ bằng

A. 3. **B.** 6. **C.** $3\sqrt{3}$. **D.** 12.

Lời giải.

Ta có $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos(\vec{u},\vec{v})=2\cdot3\cdot\cos60^\circ=6\cdot\dfrac{1}{2}=3$.

Chọn đáp án A .... □

Ví dụ 2. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $(S)\colon (x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=9$ có bán kính bằng

A. 81. **B.** 9. **C.** 3. **D.** 6.

Lời giải.

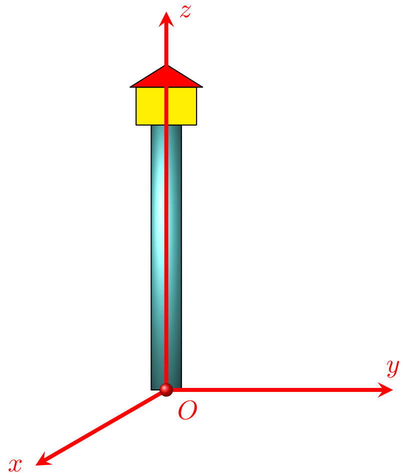
Mặt cầu $(S)\colon (x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=9$ có bán kính $R=\sqrt{9}=3$.

Chọn đáp án (C) .... □

Dạng II. Câu trắc nghiệm đúng sai

Trong mỗi ý **a)**, **b)**, **c)**, **d)** *ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.*

Ví dụ 3. Một tháp trung tâm kiểm soát không lưu ở sân bay cao 80 m sử dụng ra đa có phạm vi theo dõi 500 km được đặt trên đỉnh tháp. Chọn hệ trục toạ độ $Oxyz$ có gốc O trùng với vị trí chân tháp, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất sao cho trục Ox hướng về phía tây, trục Oy hướng về phía nam, trục Oz hướng thẳng đứng lên phía trên (hình bên) (đơn vị trên mỗi trục tính theo kilômét). Một máy bay tại vị trí A cách mặt đất 10 km, cách 300 km về phía đông và 200 km về phía bắc so với tháp trung tâm kiểm soát không lưu.



a) Ra đa ở vị trí có toạ độ $(0;0;0)$.

b) Vị trí A có toạ độ $(300;200;10)$.

c) Khoảng cách từ máy bay đến ra đa là khoảng $360,69$ km (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

d) Ra đa của trung tâm kiểm soát không lưu không phát hiện được máy bay tại vị trí A.

Lời giải.

a) **Sai**.

Ra đa đặt tại đỉnh tháp nên có toạ độ $(0;0;0{,}08)$ (đơn vị km).

b) **Sai**.

Vị trí A cách mặt đất 10 km, cách 300 km về phía đông và 200 km về phía bắc so với tháp trung tâm kiểm soát không lưu nên A có toạ độ $A(-300;-200;10)$ (đơn vị km).

c) **Đúng**.

Ta có vị trí đặt ra đa có toạ độ $G(0;0;0{,}08)$ (đơn vị km). Do đó khoảng cách từ máy bay đến ra đa là $GA=\sqrt{(-300)^2+(-200)^2+(10-0{,}08)^2}\approx 360{,}69$ km.

d) **Sai**.

Khoảng cách từ máy bay đến ra đa là khoảng $360{,}69$ km <500 km nên ra đa phát hiện được máy bay.

Chọn đáp án

a sai	b sai	c đúng	d sai

.... □

Ví dụ 4. Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tính theo kilômét), một trạm thu phát sóng điện thoại di động được đặt ở vị trí $I(1;3;7)$. Trạm thu phát sóng đó được thiết kế với bán kính phủ sóng là 3 km.

a) Phương trình mặt cầu (S) để mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sóng trong không gian là $(x+1)^2+(y+3)^2+(z+7)^2=9$.

b) Điểm $A(2;2;7)$ nằm ngoài mặt cầu (S).

c Nếu người dùng điện thoại ở vị trí có toạ độ $(2;2;7)$ thì có thể sử dụng dịch vụ của trạm thu phát sóng đó.

d Nếu người dùng điện thoại ở vị trí có toạ độ $(5;6;7)$ thì không thể sử dụng dịch vụ của trạm thu phát sóng đó.

Lời giải.

a) **Sai**.

Phương trình mặt cầu (S) để mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sóng trong không gian là $(x-1)^2+(y-3)^2+(z-7)^2=9$.

b) **Sai**.

Ta có $IA=\sqrt{2}<3$.

Suy ra điểm $A(2;2;7)$ nằm trong mặt cầu (S).

c) **Đúng**.

Ta có $IA=\sqrt{2}<3$.

Suy ra điểm $A(2;2;7)$ nằm trong mặt cầu (S).

Vậy người dùng điện thoại ở vị trí có toạ độ $(2;2;7)$ thì có thể sử dụng dịch vụ của trạm thu phát sóng đó.

d) **Đúng**.

Gọi $M(5;6;7)$ là vị trí của người dùng điện thoại. Ta có

$IM=5>3$.

Vậy người dùng điện thoại ở vị trí có toạ độ $(5;6;7)$ không thể sử dụng dịch vụ của trạm thu phát sóng này.

Chọn đáp án | a sai | b sai | c đúng | d đúng | .... □

Dạng III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Ví dụ 5. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1;-1;3)$, $B(-1;-1;2)$ và $C(-3;-2;2)$. Tính $\cos\widehat{ABC}$. Đáp án: $-0{,}8$

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{BC}=(-2;-1;0)$, $\overrightarrow{BA}=(2;0;1)$.

$$\begin{aligned}\cos\widehat{ABC} &= \cos\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)\\ &= \frac{\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}}{\left|\overrightarrow{BC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BA}\right|}\\ &= \frac{-2\cdot 2-1\cdot 0+0\cdot 1}{\sqrt{(-2)^2+(-1)^2+0^2}\cdot\sqrt{2^2+0^2+1^2}}\\ &= -0{,}8.\end{aligned}$$

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Dạng I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ lựa chọn một phương án.

Câu 1. Cho tứ diện $ABCD$. Lấy G là trọng tâm của tam giác ABC. Phát biểu nào sau đây là **sai**?

A. $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.
B. $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.
C. $\overrightarrow{GD}-\overrightarrow{GA}=\overrightarrow{AD}$.
D. $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=3\overrightarrow{DG}$.

Lời giải.

Ta có

- $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ đúng, vì G là trọng tâm tam giác ABC.
- Ta có

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}\\
\Leftrightarrow\ &\vec{0}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}\\
\Leftrightarrow\ &\overrightarrow{GD}=\vec{0}\,\text{(sai)}.
\end{aligned}$$

- $\overrightarrow{GD}-\overrightarrow{GA}=\overrightarrow{AD}$ đúng.
- Ta có

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=3\overrightarrow{DG}\\
\Leftrightarrow\ &\overrightarrow{DG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{DG}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{DG}+\overrightarrow{GC}=3\overrightarrow{DG}\\
\Leftrightarrow\ &3\overrightarrow{DG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=3\overrightarrow{DG}\\
\Leftrightarrow\ &3\overrightarrow{DG}+\vec{0}=3\overrightarrow{DG}\text{ (đúng)}.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án B .... □

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm M thoả mãn $\overrightarrow{OM}=2\vec{i}+3\vec{j}-4\vec{k}$. Toạ độ của điểm M là

A. $(-4;3;2)$. **B.** $(2;3;-4)$. **C.** $(3;-4;2)$. **D.** $(-2;-3;4)$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{OM}=2\vec{i}+3\vec{j}-4\vec{k}$.

Vậy toạ độ điểm M là $M(2;3;-4)$.

Chọn đáp án B .... □

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u}=(3;2;-1)$, $\vec{v}=(5;-4;2)$. Toạ độ của vectơ $\vec{u}-\vec{v}$ là

A. $(-2;6;-3)$. **B.** $(2;-6;3)$. **C.** $(-2;-2;-3)$. **D.** $(2;2;1)$.

Lời giải.

Ta có $\vec{u}-\vec{v}=(-2;6;-3)$.

Chọn đáp án A .... □

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{u}=(1;-2;3)$. toạ độ của vectơ $-3\vec{u}$ là

A. $(3;-6;9)$. **B.** $(-3;-6;-9)$. **C.** $(3;6;9)$. **D.** $(-3;6;-9)$.

Lời giải.

Ta có $-3\vec{u}=(-3;6;-9)$.

Chọn đáp án D .... □

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác MNP có $M(2;-3;4), N(1;2;3)$ và $P(3;-2;2)$. Trọng tâm của tam giác MNP có toạ độ là

A. $(2;-1;3)$. **B.** $(6;-3;9)$. **C.** $(-2;1;-3)$. **D.** $(-6;3;-9)$.

Lời giải.

Gọi $G(x;y;z)$ là trọng tâm của tam giác MNP.

Suy ra $\begin{cases} x=\dfrac{2+1+3}{3}=2 \\ y=\dfrac{-3+2-2}{3}=-1 \\ x=\dfrac{4+3+2}{3}=3. \end{cases}$

Vậy $G(2;-1;3)$.

Chọn đáp án A .... □

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, tích vô hướng của hai vectơ $\vec{u}=(2;3;-3)$ và $\vec{v}=(-3;-2;4)$ bằng

A. $\sqrt{22}\cdot\sqrt{29}$. **B.** $-\sqrt{22}\cdot\sqrt{29}$. **C.** 24. **D.** -24.

Lời giải.

Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=(2)\cdot(-3)+(3)\cdot(-2)+(-3)\cdot(4)=-6-6-12=-24.$$

Chọn đáp án D .... □

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách giữa hai điểm $I(3;5;-7)$ và $K(-5;5;-1)$ bằng

A. 100. **B.** 20. **C.** 10. **D.** 17.

Lời giải.

Khoảng cách giữa hai điểm I và K là độ dài đoạn thẳng IK. Mà

$$IK=\sqrt{(-5-3)^2+(5-5)^2+(-1-(-7))^2}=10.$$

Chọn đáp án C .... □

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u}=(3;1;-2)$ và $\vec{v}=(-2;1;5)$. Toạ độ của vectơ $[\vec{u},\vec{v}]$ là

A. $(5;7;-11)$. **B.** $(-7;11;-5)$. **C.** $(7;-11;5)$. **D.** $(-5;-7;11)$.

Lời giải.

Tích có hướng của hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là

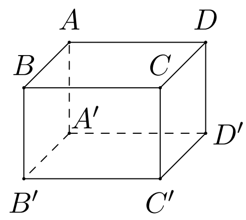
$$[\vec{u},\vec{v}] = (1\cdot 5-(-2)\cdot 1;(-2)\cdot(-2)-3\cdot 5;3\cdot 1-1\cdot(-2)) = (7;-11;5).$$

Chọn đáp án C .... □

Câu 9. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Cặp vectơ nào sau đây là cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng $(ABB'A')$?

A. $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AD}$. **B.** $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AD'}$. **C.** $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{A'B'}$. **D.** $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CC'}$.

Lời giải.



Vì hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CC'}$ thỏa mãn được các điều kiện sau

a) Là các vectơ khác vectơ $\vec{0}$.

b) Không cùng phương.

c) Vectơ $\overrightarrow{AB}$ có giá là đường thẳng AB nằm trong mặt phẳng $(ABB'A')$ và vectơ $\overrightarrow{CC'}$ có giá là đường thẳng CC' song song với mặt phẳng $(ABB'A')$.

Nên cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CC'}$ là cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng $(ABB'A')$.

Chọn đáp án D .... □

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, vectơ nào sau đây là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(P)\colon x+3y-4z+5=0$?

A. $\vec{n}_1=(3;4;5)$. **B.** $\vec{n}_2=(1;3;-4)$. **C.** $\vec{n}_3=(1;3;4)$. **D.** $\vec{n}_4=(3;-4;5)$.

Lời giải.

Dễ thấy rằng mặt phẳng $(P)\colon x+3y-4z+5=0$ có một vectơ pháp tuyến là $(1;3;-4)$.

Chọn đáp án B .... □

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng đi qua điểm $K(1;1;1)$ nhận $\vec{u}=(1;0;1)$, $\vec{v}=(1;1;0)$ là cặp vectơ chỉ phương có phương trình tổng quát là

A. $x+y+z-3=0$. **B.** $x-y+z-1=0$.

C. $x+y-z-1=0$. **D.** $-x+y+z-1=0$.

Lời giải.

Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm $K(1;1;1)$ nhận $\vec{u}=(1;0;1)$, $\vec{v}=(1;1;0)$ là cặp vectơ chỉ phương có dạng phương trình tổng quát $ax+by+cz+d=0$.

Vì (P) nhận cặp vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là cặp vectơ chỉ phương nên ta có thể chọn được cho (P) một vectơ pháp tuyến là $[\vec{u},\vec{v}]=(-1;1;1)$.

Do đó $a=-1$, $b=1$, $c=1$. Mặt khác (P) đi qua điểm $K(1;1;1)$ suy ra $-1\cdot 1+1\cdot 1+1\cdot 1+d=0$ suy ra $d=-1$.

Vậy (P) có phương trình là $-x+y+z-1=0$.

Chọn đáp án D .... □

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng cắt ba trục toạ độ tại ba điểm $D(3;0;0)$, $E(0;-2;0)$, $G(0;0;-7)$ có phương trình chính tắc là

A. $\frac{x}{3}-\frac{y}{2}-\frac{z}{7}+1=0$.

B. $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}+\frac{z}{7}=1$.

C. $\frac{x}{3}-\frac{y}{2}-\frac{z}{7}=1$.

D. $\frac{x}{3}-\frac{y}{2}+\frac{z}{7}=1$.

Lời giải.

Dễ thấy rằng phương trình mặt phẳng cắt ba trục toạ độ tại ba điểm $D(3;0;0)$, $E(0;-2;0)$, $G(0;0;-7)$ có phương trình là $\frac{x}{3}+\frac{y}{-2}+\frac{z}{-7}=1 \Leftrightarrow \frac{x}{3}-\frac{y}{2}-\frac{z}{7}=1$.

Chọn đáp án C .... □

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng đi qua điểm $I(15;-16;17)$ và nhận $\vec{u}=(-7;8;-9)$ là vectơ chỉ phương có phương trình tham số là

A. $\begin{cases} x=15-7t \\ y=-16+8t \\ z=17-9t \end{cases}$.

B. $\begin{cases} x=15-7t \\ y=-16+8t \\ z=17-9t^2 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} x=15-7t^2 \\ y=-16+8t \\ z=17-9t \end{cases}$.

D. $\begin{cases} x=-7+15t \\ y=8-16t \\ z=-9+17t \end{cases}$.

Lời giải.

Đường thẳng đi qua điểm $I(15;-16;17)$ và nhận $\vec{u}=(-7;8;-9)$ làm vectơ chỉ phương có phương trình tham số là $\begin{cases} x=15-7t \\ y=-16+8t \\ z=17-9t. \end{cases}$

Chọn đáp án A .... □

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$, vectơ nào sau đây là một vectơ chỉ phương của đường thẳng $\Delta\colon \frac{x-5}{8}=\frac{y-9}{6}=\frac{z-12}{3}$?

A. $\vec{u}_1=(8;6;3)$.

B. $\vec{u}_2=(8;6;-3)$.

C. $\vec{u}_3=(-8;6;-3)$.

D. $\vec{u}_4=(5;9;12)$.

Lời giải.

Vectơ chỉ phương của đường thẳng $\Delta\colon \frac{x-5}{8}=\frac{y-9}{6}=\frac{z-12}{3}$ là $\vec{u}_1=(8;6;3)$.

Chọn đáp án A .... □

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu tâm $I(-6;-9;15)$ và đường kính bằng 10 có phương trình là

A. $(x+6)^2+(y+9)^2+(z-15)^2=100$.

B. $(x+6)^2+(y+9)^2+(z-15)^2=25$.

C. $(x-6)^2+(y-9)^2+(z+15)^2=100$.

D. $(x-6)^2+(y-9)^2+(z+15)^2=25$.

Lời giải.

Mặt cầu có bán kính $R=\frac{10}{2}=5$.

Phương trình mặt cầu tâm $I(-6;-9;15)$ và bán kính $R=5$ là

$$(x+6)^2+(y+9)^2+(z-15)^2=25.$$

Chọn đáp án B .... □

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào trong các điểm sau đây thuộc mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2=50$?

A. $M(3;4;6)$. **B.** $N(4;4;5)$. **C.** $P(3;4;-5)$. **D.** $Q(-3;3;-5)$.

Lời giải.

Thay toạ độ các điểm M, N, P, Q vào phương trình mặt cầu.

Thay $\begin{cases} x=3 \\ y=4 \\ z=6 \end{cases}$ vào phương trình mặt cầu, ta được $3^2+4^2+6^2=50$ (sai).

Thay $\begin{cases} x=4 \\ y=4 \\ z=5 \end{cases}$ vào phương trình mặt cầu, ta được $4^2+4^2+5^2=50$ (sai).

Thay $\begin{cases} x=3 \\ y=4 \\ z=-5 \end{cases}$ vào phương trình mặt cầu, ta được $3^2+4^2+(-5)^2=50$ (đúng).

Thay $\begin{cases} x=-3 \\ y=3 \\ z=-5 \end{cases}$ vào phương trình mặt cầu, ta được $(-3)^2+3^2+(-5)^2=50$ (sai).

Chỉ có toạ độ điểm P thỏa mãn.

Chọn đáp án C .... □

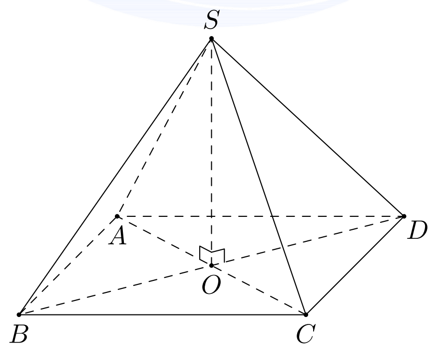
Dạng II. Câu trắc nghiệm đúng sai

Trong mỗi ý **a)**, **b)**, **c)**, **d)** *ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.*

Câu 17. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có độ dài tất cả các cạnh đều bằng a.

a) Tứ giác $ABCD$ là hình vuông.
b) Tam giác SBD vuông cân tại S.
c) $\left(\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{BD}\right) = 45^\circ$.
d) $\overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{BD} = -a^2$.

Lời giải.



a) **Đúng**.

Vì hình chóp đều có đáy là đa giác đều nên $ABCD$ là tứ giác đều, do đó $ABCD$ là hình vuông.

b) **Đúng**.

Ta có $BD = a\sqrt{2}$, $SB = SD = a$.

Ta có $BD^2 = SB^2 + SD^2$. Theo định lí đảo Pi-ta-go thì tam giác SBD vuông cân tại S.

c) **Sai.**

Vì góc $\left(\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{BD}\right) = 180^\circ - \widehat{SBD} = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$.

d) **Sai.**

Vì $\overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{BD} = SB \cdot BD \cdot \cos\left(\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{BD}\right) = a \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 135^\circ = -\dfrac{a^2}{2}$.

Chọn đáp án | a đúng | b đúng | c sai | d sai | .... □

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1;-2;3), B(-2;1;2), C(3;-1;2)$.

a) $\overrightarrow{AB} = (-3;3;-1)$.

b) $\overrightarrow{AC} = (-2;-1;1)$.

c) $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC}$.

d) Ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

Lời giải.

a) **Đúng.**

Vì $\overrightarrow{AB} = (-2-1;1+2;2-3) = (-3;3;-1)$.

b) **Sai.**

Vì $\overrightarrow{AC} = (3-1;-1+2;2-3) = (2;1;-1)$.

c) **Sai.**

Vì $\dfrac{-3}{2} \neq \dfrac{3}{1} \neq \dfrac{-1}{-1}$ nên $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương. Do đó $\overrightarrow{AB} \neq 3\overrightarrow{AC}$.

d) **Đúng.**

Vì $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương. Do đó A, B, C không thẳng hàng.

Chọn đáp án | a đúng | b sai | c sai | d đúng | .... □

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$ có $A(2;-1;-2)$, $B(3;1;2)$, $C(1;-1;1)$ và $D\left(x_D;y_D;z_D\right)$.

a) $\overrightarrow{AB} = (1;2;4)$.

b) $\overrightarrow{DC} = (1-x_D;-1-y_D;1-z_D)$.

c) $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$.

d) Toạ độ điểm D là $(0;3;3)$.

Lời giải.

a) **Đúng.**

$\overrightarrow{AB} = (1;2;4)$.

Công thức $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$

Ta có $\begin{cases} A(2;-1;-2) \\ B(3;1;2) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (1;2;4)$.

b) **Đúng.**

$\overrightarrow{DC} = (1-x_D;-1-y_D;1-z_D)$.

Ta có $\begin{cases} C(1;-1;1) \\ D(x_D;y_D;z_D) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{DC} = (1-x_D;-1-y_D;1-z_D)$.

c) **Đúng**.

$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$.

Vì tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$.

d) **Sai**.

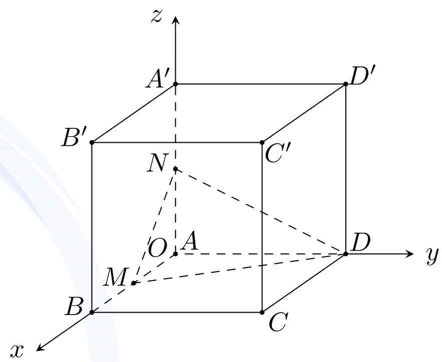
Toạ độ điểm D là $(0;3;3)$.

Vì tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$.

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{DC} = (1-x_D; -1-y_D; 1-z_D) \\ \overrightarrow{AB} = (1;2;4) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x_D = 1 \\ -1-y_D = 2 \\ 1-z_D = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 0 \\ y_D = -3 \\ z_D = -3. \end{cases}$

Chọn đáp án | a đúng | b đúng | c đúng | d sai | .... □

Câu 20. Trong không gia $Oxyz$, cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0;0;0)$, $B(2;0;0)$, $D(0;2;0)$, $A'(0;0;2)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và AA' (tham khảo hình vẽ).



a) Toạ độ của điểm M là $(1;0;0)$.

b) Toạ độ của điểm N là $(0;1;0)$.

c) Phương trình mặt phẳng (DMN) là $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{1}$.

d) Khoảng cách từ điểm C' đến mặt phẳng (DMN) bằng $\dfrac{8}{3}$

.

Lời giải.

a) **Đúng**. Toạ độ của điểm M là $(1;0;0)$.

Ta có $\begin{cases} A(0;0;0) \\ B(2;0;0) \end{cases}$, M là trung điểm $AB \Rightarrow M(1;0;0)$.

b) **Sai**. Toạ độ của điểm N là $(0;1;0)$.

Ta có $\begin{cases} A(0;0;0) \\ A'(0;0;2) \end{cases}$, N là trung điểm $AA' \Rightarrow N(0;0;1)$.

c) **Sai**. Phương trình mặt phẳng (DMN) là $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{1}$.

Phương trình $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{1}$ là một phương trình chính tắc của một đường thẳng nào đó, không phải của mặt phẳng (DMN).

d) **Đúng**. Khoảng cách từ điểm C' đến mặt phẳng (DMN) bằng $\dfrac{8}{3}$.

Ta viết phương trình mặt phẳng (DMN).

Cặp vectơ chỉ phương $\begin{cases} \overrightarrow{DM} = (1;-2;0) \\ \overrightarrow{DN} = (0;-2;1) \end{cases}$

vectơ pháp tuyến $\vec{n} = \left[\overrightarrow{DM}, \overrightarrow{DN}\right] = \left(\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}\right) = (-2; -1; -2)$.

Ta có $(DMN)\colon -2(x-0) - 1(y-2) - 2(z-0) \Leftrightarrow 2x + y + 2z - 2 = 0$.

Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành $\Rightarrow C(2; 2; 0)$.

Hình khối $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương $\Rightarrow C'(2; 2; 2)$.

Khoảng cách $\mathrm{d}(C', (DMN)) = \dfrac{|2 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 - 2|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \dfrac{8}{3}$.

Chọn đáp án | a đúng | b sai | c sai | d đúng | .... □

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P)\colon y = 0$, $(Q)\colon \sqrt{3}x - y - 2024 = 0$. Xét các vectơ $\vec{n}_1 = (0; 1; 0)$, $\vec{n}_2 = \left(\sqrt{3}; -1; 0\right)$.

a) $\vec{n}_1$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).

b) $\vec{n}_2$ không là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (Q).

c) $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = -1$.

d) Góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng 30°.

Lời giải.

a) **Đúng**. $\vec{n}_1$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).

Ta có $(P)\colon y = 0 \Leftrightarrow 0x + 1y + 0z = 0$.

vectơ pháp tuyến $\vec{n}_1 = (0; 1; 0)$.

b) **Sai**. $\vec{n}_2$ không là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (Q).

Ta có $(Q)\colon \sqrt{3}x - y - 2024 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3}x - y + 0z - 2024 = 0$.

vectơ pháp tuyến $\vec{n}_2 = \left(\sqrt{3}; -1; 0\right)$.

c) **Đúng**. $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = -1$.

Ta có $\begin{cases} \vec{n}_1 = (0; 1; 0) \\ \vec{n}_2 = \left(\sqrt{3}; -1; 0\right) \end{cases} \Rightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \cdot \sqrt{3} + 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 = -1$.

d) **Sai**. Góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng 30°.

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q)

$\cos\varphi = |\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2)| = \dfrac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \dfrac{\left|0 \cdot \sqrt{3} + 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 0\right|}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2} \cdot \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2 + 0^2}} = \dfrac{1}{2}$.

Suy ra góc $\varphi = 60^\circ$.

Chọn đáp án | a đúng | b sai | c đúng | d sai | .... □

Câu 22. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x - 2024}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z + 2025}{-2}$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x + 2y - z + 1 = 0$. Xét các vectơ $\vec{u} = (2; 1; -2)$, $\vec{n} = (2; 2; -1)$

a) $\vec{u}$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ.

b) $\vec{n}$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).

c) $\cos(\Delta, (P)) = \dfrac{8}{9}$.

d) Góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) bằng 63° (làm tròn đến hàng đơn vị của độ).

ÔN TẬP KỲ THI THPT QG 2025 - MÔN TOÁN

Lời giải.

a) **Đúng**.

Đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x-2\,024}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+2\,025}{-2}$ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(2;1;-2)$.

b) **Đúng**.

Mặt phẳng $(P)\colon 2x+2y-z+1=0$ có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(2;2;-1)$.

c) **Sai**.

$\sin(\Delta,(P))=\dfrac{|\vec{u}\cdot\vec{n}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{n}|}=\dfrac{|2\cdot 2+1\cdot 2+(-2)\cdot(-1)|}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}}=\dfrac{8}{9}$.

$\cos(\Delta,(P))=\sqrt{1-\left(\dfrac{8}{9}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{17}}{9}$.

d) **Đúng**.

Ta có $\sin(\Delta,(P))=\dfrac{8}{9}\Rightarrow(\Delta,(P))=62^\circ 44'2''$.

Chọn đáp án | a đúng | b đúng | c sai | d đúng | .... □

Câu 23. Trong không gian $Oxyz$ cho hai đường thẳng

$$\Delta_1\colon \frac{x}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+3}{2},\Delta_2\colon \frac{x+4}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-4}{-1}.$$

Xét các vectơ $\vec{u}_1=(1;-1;2)$ và $\vec{u}_2=(2;1;-1)$.

a) Đường thẳng Δ_1 đi qua điểm $M_1(0;3;-3)$ và có $\vec{u}_1=(1;-1;2)$ làm một vectơ chỉ phương.

b) Đường thẳng Δ_2 đi qua điểm $M_2(-4;-2;4)$ và có $\vec{u}_2=(2;1;-1)$ làm một vectơ chỉ phương.

c) $[\vec{u}_1,\vec{u}_2]=(1;-5;3)$.

d) Hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 chéo nhau.

Lời giải.

a) **Đúng**.

Đường thẳng $\Delta_1\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z+3}{2}$ đi qua điểm $M_1(0;3;-3)$ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}_1=(1;-1;2)$.

b) **Đúng**.

Đường thẳng $\Delta_2\colon \dfrac{x+4}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-4}{-1}$ đi qua điểm $M_2(-4;-2;4)$ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}_2=(2;1;-1)$.

c) **Sai**.

Ta có $\begin{cases}\vec{u}_1=(1;-1;2)\\ \vec{u}_2=(2;1;-1)\end{cases}$

Tích có hướng $[\vec{u}_1,\vec{u}_2]=\left(\begin{vmatrix}-1&2\\1&-1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}2&1\\-1&2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1&-1\\2&1\end{vmatrix}\right)=(-1;5;3)$.

d) Sai.

Ta có $\begin{cases} \vec{u}_1 = (1; -1; 2) \\ \vec{u}_2 = (2; 1; -1) \\ \overrightarrow{M_1M_2} = (-4; -5; 7) \end{cases}$

Xét tích vô hướng $[\vec{u}_1, \vec{u}_2] \cdot \overrightarrow{M_1M_2} = -1 \cdot (-4) + 5 \cdot (-5) + 3 \cdot 7 = 0$.

Vậy hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 không chéo nhau.

Chọn đáp án | a đúng | b đúng | c sai | d sai | .... □

Câu 24. Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tính theo mét), một ngọn hải đăng được đặt ở vị trí $I(17; 20; 45)$. Biết rằng ngọn hải đăng đó được thiết kế với bán kính phủ sáng là $4\,\text{km}$.

a) Phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sáng trên biển của hải đăng là $(x - 17)^2 + (y - 20)^2 + (z - 45)^2 = 4000^2$.

b) Nếu người đi biển ở vị trí $M(18; 21; 50)$ thì không thể nhìn thấy được ánh sáng từ ngọn hải đăng.

c) Nếu người đi biển ở vị trí $N(4019; 21; 44)$ thì có thể nhìn thấy được ánh sáng từ ngọn hải đăng.

d) Nếu hai người đi biển ở vị trí đó có thể nhìn thấy được ánh sáng từ ngọn hải đăng thì khoảng cách giữa hai người đó không quá $8\,\text{km}$.

Lời giải.

a) Đúng.

Mặt cầu (S) tâm $I(17; 20; 45)$ bán kính $R = 4000\,\text{m}$

$(S)\colon (x - 17)^2 + (y - 20)^2 + (z - 45)^2 = 4000^2$.

b) Sai.

Ta có $\begin{cases} I(17; 20; 45) \\ M(18; 21; 50) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{IM} = (1; 1; 5) \Rightarrow IM = 3\sqrt{3}$.

Vì $3\sqrt{3} < m < 4\,\text{km}$ nên trong vùng phủ sáng.

c) Sai.

Ta có $\begin{cases} I(17; 20; 45) \\ N(4019; 21; 44) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{IN} = (4002; 1; -1) \Rightarrow IN \approx 4002$.

Ngoài vùng phủ sáng.

d) Đúng.

Vì bán kính phủ sáng $R = 4\,\text{km}$ nên có đường kính $d = 8\,\text{km}$.

Do đó khoảng cách hai người này không quá $d = 8\,\text{km}$.

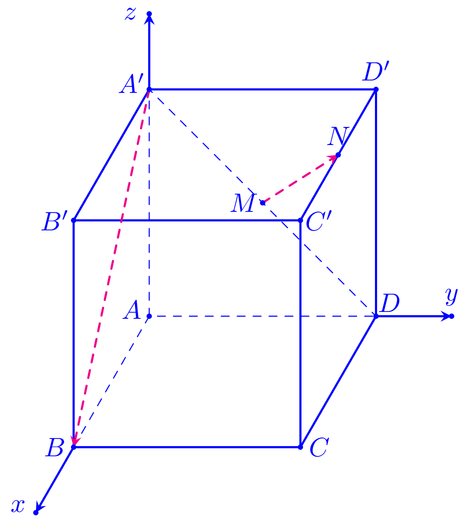
Chọn đáp án | a đúng | b sai | c sai | d đúng | .... □

Dạng III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 25. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $A'D$ và $C'D'$. Gọi φ là góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{A'B}$. Số đo của góc φ bằng bao nhiêu độ?

Đáp án: 90

Lời giải.



Trong không gian $Oxyz$, chọn

$O \equiv A(0;0;0) \Rightarrow A'(0;0;a)$

$B(a;0;0) \Rightarrow B'(a;0;a)$

$C(a;a;0) \Rightarrow C'(a;a;a)$

$D(0;a;0) \Rightarrow D'(0;a;a)$.

Điểm M là trung điểm của $A'D \Rightarrow M\left(0;\dfrac{a}{2};\dfrac{a}{2}\right)$;

Điểm N là trung điểm của $C'D' \Rightarrow N\left(\dfrac{a}{2};a;a\right)$.

Suy ra

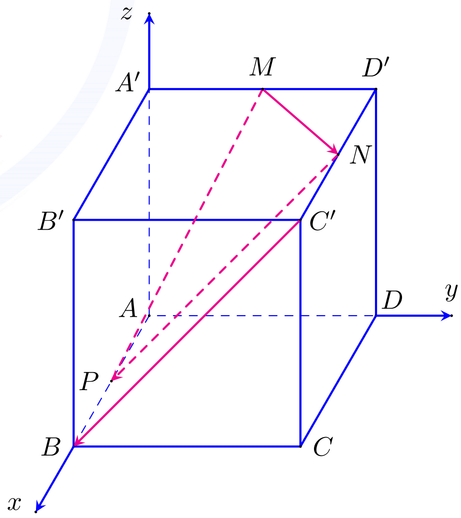
$$\overrightarrow{MN}=\left(\dfrac{a}{2};\dfrac{a}{2};\dfrac{a}{2}\right)$$
$$\overrightarrow{A'B}=(a;0;-a)$$
$$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{A'B}=\dfrac{a}{2}\cdot a+\dfrac{a}{2}\cdot 0+\dfrac{a}{2}\cdot(-a)=0.$$

Suy ra $\overrightarrow{MN}\perp\overrightarrow{A'B}$. Vậy $\varphi=90^\circ$.

Câu 26. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $A'D'$ và $C'D'$. Tích vô hướng $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{C'B}=na^2$ (n là số thập phân). Giá trị của n bằng bao nhiêu?

Đáp án: $-0{,}5$

Lời giải.



Trong không gian $Oxyz$, chọn

$O \equiv A(0;0;0) \Rightarrow A'(0;0;a)$

$B(a;0;0) \Rightarrow B'(a;0;a)$

$C(a;a;0) \Rightarrow C'(a;a;a)$

$D(0;a;0) \Rightarrow D'(0;a;a)$.

Điểm M là trung điểm của $A'D' \Rightarrow M\left(0;\dfrac{a}{2};a\right)$;

Điểm N là trung điểm của $C'D' \Rightarrow N\left(\dfrac{a}{2};a;a\right)$.

Suy ra $\overrightarrow{MN}=\left(\dfrac{a}{2};\dfrac{a}{2};0\right)$

$\overrightarrow{C'B}=(0;-a;-a)$

$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{C'B}=\dfrac{a}{2}\cdot 0+\dfrac{a}{2}\cdot(-a)+0\cdot(-a)=-\dfrac{1}{2}a^2.$

Vậy $n=-\dfrac{1}{2}=-0{,}5$.

Câu 27. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1;3;5)$, $B(1;1;3)$, $C(4;-2;3)$. Số đo của góc $\widehat{ABC}$ bằng bao nhiêu độ?

Đáp án: 128

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{BA}=(0;2;2)$, $BA=\left|\overrightarrow{BA}\right|=\sqrt{0^2+2^2+2^2}=2\sqrt{2}$;

$\overrightarrow{BC}=(3;-3;0)$, $BC=\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{3^2+(-3)^2+0^2}=2\sqrt{3}$.

Do đó $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = 0\cdot 3 + 2\cdot(-3) + 2\cdot 0 = -6$.

Suy ra $\cos\widehat{ABC} = \cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right) = \dfrac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|} = \dfrac{-6}{2\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{3}} = \dfrac{-\sqrt{6}}{4}$.

Vậy $\widehat{ABC} = 127^\circ 45' 41''$.

Câu 28. Một người đứng ở mặt đất điều khiển hai flycam để phục vụ một chương trình của đài truyền hình. Flycam I ở vị trí A cách vị trí điều khiển 150 m về phía nam và 200 m về phía đông, đồng thời cách mặt đất 50 m. Flycam II ở vị trí B cách vị trí điều khiển 180 m về phía bắc và 240 m về phía tây, đồng thời cách mặt đất 60 m.

Chọn hệ trục toạ độ $Oxyz$ với gốc O là vị trí người điều khiển, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, trục Ox có hướng trùng với hướng nam, trục Oy có hướng trùng với hướng đông, trục Oz vuông góc với mặt đất hướng lên bầu trời, đơn vị trên mỗi trục tính theo mét. Khoảng cách giữa hai flycam đó bằng bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)? Đáp án: 550

Lời giải.

Flycam I ở toạ độ $A(150; 200; 50)$.

Flycam II ở toạ độ $B(-180; -240; 60)$.

Khoảng cách gũa hai flycam bằng đoạn AB.

Công thức tính khoảng cách đoạn thẳng. $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

Khoảng cách bằng $AB = \sqrt{(-180-150)^2 + (-240-200)^2 + (60-50)^2} = \sqrt{302600} \approx 550$ m.

Câu 29. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P)\colon 3x + y + 4z - 2024 = 0$ và $(Q)\colon x + 3y - 4z - 2025 = 0$. Góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng bao nhiêu độ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)? Đáp án: 67

Lời giải.

Mặt phẳng $(P)\colon 3x + y + 4z - 2024 = 0$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_P = (3; 1; 4)$.

Mặt phẳng $(Q)\colon x + 3y - 4z - 2025 = 0$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_Q = (1; 3; -4)$.

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q).

Ta có $\cos\varphi = |\cos(\vec{n}_P, \vec{n}_Q)| = \dfrac{|3\cdot 1 + 1\cdot 3 + 4\cdot(-4)|}{\sqrt{3^2+1^2+4^2}\sqrt{1^2+3^2+(-4)^2}} = \dfrac{5}{13}$.

Tìm được góc $\varphi \approx 67^\circ$.

Câu 30. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1\colon \dfrac{x+24}{3} = \dfrac{y-25}{4} = \dfrac{z}{-5}$ và $\Delta_2\colon \dfrac{x-26}{5} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{4}$. Góc giữa hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 bằng bao nhiêu độ (làm tròn đến hàng đơn vị của độ)? Đáp án: 82

Lời giải.

Theo lí thuyết. Cho hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 có vectơ chỉ phương lần lượt là $\vec{u_1} = (a_1; b_1; c_1)$, $\vec{u_2} = (a_2; b_2; c_2)$.

Khi đó, ta có $\cos(\Delta_1, \Delta_2) = \dfrac{|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$.

Theo bài, ta có Δ_1 có vectơ chỉ phương là $\vec{u_1} = (3; 4; -5)$, Δ_2 có vectơ chỉ phương là $\vec{u_2} = (5; 3; 4)$.

Khi đó $\cos(\Delta_1, \Delta_2) = \dfrac{|3\cdot 5 + 4\cdot 3 + (-5)\cdot 4|}{\sqrt{3^2+4^2+(-5)^2}\cdot\sqrt{5^2+3^2+4^2}} = \dfrac{7}{50}$.

Tìm được góc $(\Delta_1, \Delta_2) \approx 82°$.

Câu 31. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y-5}{2} = \dfrac{z}{-2}$ và mặt phẳng $(P)\colon 12y + 5z + 1 = 0$. Góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) bằng bao nhiêu độ (làm tròn đến kết quả hàng đơn vị của độ)? Đáp án: 14

Lời giải.

Theo lí thuyết, cho đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a_1; b_1; c_1)$ và mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (a_2; b_2; c_2)$, khi đó $\sin(\Delta, (P)) = \dfrac{|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$.

Theo bài toán, đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (3; 4; -5)$ và mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (0; 12; 5)$. Khi đó $\sin(\Delta, (P)) \approx 0{,}25$.

Tìm được góc $(\Delta, (P)) \approx 14°$.

Câu 32. Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có $A(5; 3; 6)$, $B(1; 1; 4)$, $C(2; 1; 2)$ và $D(0; 0; 4)$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (BCD) bằng bao nhiêu? Đáp án: 2

Lời giải.

Theo lí thuyết, khoảng cách từ điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ đến mặt phẳng $(P)\colon Ax + By + Cz + D = 0$ với $(A^2 + B^2 + C^2 > 0)$ được tính theo công thức: $\mathrm{d}(M_0; (P)) = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

Theo bài toán, ta có $\overrightarrow{BC} = (1; 0; -2)$ và $\overrightarrow{BD} = (-1; -1; 0)$. Khi đó mặt phẳng (BCD) nhận vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = \left[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}\right] = (-2; 2; -1)$.

Phương trình mặt phẳng (BCD) đi qua $D(0; 0; 4)$ nhận vectơ $\vec{n} = (-2; 2; -1)$ là

$$(BCD):\ (-2)(x-0) + 2(y-0) + (-1)(z-4) = 0 \Leftrightarrow -2x + 2y - z + 4 = 0.$$

Khi đó, $\mathrm{d}(A; (BCD)) = \dfrac{|-2 \cdot 5 + 2 \cdot 3 - 1 \cdot 6 + 4|}{\sqrt{(-2)^2 + 2^2 + (-1)^2}} = 2$.

Câu 33. Khi gắn hệ trục toạ độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tính theo mét) vào một căn nhà sao cho nền nhà thuộc mặt phẳng (Oxy), người ta coi mỗi mái nhà là một phần của mặt phẳng và thấy ba vị trí A, B, C ở mái nhà bên phải lần lượt có toạ độ $(2; 0; 4)$, $(4; 0; 3)$ và $(4; 9; 3)$. Góc giữa mái nhà bên phải và nền nhà bằng bao nhiêu độ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Đáp án: 27

Lời giải.

Ta gọi α là góc giữa mái nhà bên phải và nền nhà. Khi đó $\alpha = ((ABC); (Oxy))$.

Với (ABC) nhận vectơ $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right]$ với $\overrightarrow{AB} = (2; 0; -1)$ và $\overrightarrow{AC} = (2; 9; -1)$.

Khi đó $\vec{n} = (9; 0; 18)$.

Với (Oxy) do $Oz \perp (Oxy)$ nên mặt phẳng (Oxy) nhận $\vec{k} = (0; 0; 1)$ làm vectơ pháp tuyến.

Vậy $\cos\alpha = \dfrac{\vec{n} \cdot \vec{k}}{|\vec{n}| \cdot \left|\vec{k}\right|} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. Suy ra $\alpha \approx 27°$.

Câu 34. Khi gắn hệ trục toạ độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tính theo kilomét) vào một sân bay, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt sân bay. Một máy bay ở vị trí $A(3; 2; -3)$ sẽ hạ cánh tới vị trí $B(8; 8; 0)$. Góc giữa đường bay (một phần của đường thẳng AB) và sân bay (một phần của mặt phẳng (Oxy)) bằng bao nhiêu độ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)? Đáp án: 21

Lời giải.

Gọi α là góc giữa đường bay và sân bay. Khi đó $\alpha = (AB, (Oxy))$.

Với đường thẳng AB, nhận vectơ $\overrightarrow{AB} = (5; 6; 3)$ làm vectơ chỉ phương.

Với (Oxy) do $Oz \perp (Oxy)$ nên mặt phẳng (Oxy) nhận $\overrightarrow{k} = (0; 0; 1)$ làm vectơ pháp tuyến.

Khi đó ta có $\sin\alpha = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{k}}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{k}\right|} = \dfrac{3\sqrt{70}}{70}$.

Vậy $\alpha \approx 21^\circ$.

Câu 35. Khi gắn hệ trục toạ độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tính theo kilomét) vào một sân bay, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt sân bay. Một máy bay bay theo đường thẳng từ vị trí $A\,(5; 0; 5)$ đến vị trí $B\,(10; 10; 3)$ và hạ cánh tại vị trí $C\,(a; b; 0)$. Giá trị của $a + b$ bằng bao nhiêu (viết kết quả dưới dạng số thập phân)? Đáp án: 42,5

Lời giải.

Do A, B, C nằm trên cùng một đường thẳng nên $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương hay $\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{AC}$ $(k \neq 0)$ với $\overrightarrow{AB} = (5; 10; -2)$ và $\overrightarrow{AC} = (a - 5; b; -5)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5 = k \cdot (a-5) \\ 10 = k \cdot b \\ -2 = k \cdot (-5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{35}{2} \\ b = 25 \\ k = \dfrac{2}{5}. \end{cases}$$

Vậy $a + b = \dfrac{35}{2} + 25 = 42{,}5$.

BẢNG ĐÁP ÁN

PHẦN I.

Câu 1. B	Câu 2. B	Câu 3. A	Câu 4. D	Câu 5. A	Câu 6. D
Câu 7. C	Câu 8. C	Câu 9. D	Câu 10. B	Câu 11. D	Câu 12. C
Câu 13. A	Câu 14. A	Câu 15. B	Câu 16. C		

PHẦN II.

Câu 17. a Đ b Đ c S d S	Câu 18. a Đ b S c S d Đ
Câu 19. a Đ b Đ c Đ d S	Câu 20. a Đ b S c S d Đ
Câu 21. a Đ b S c Đ d S	Câu 22. a Đ b Đ c S d Đ
Câu 23. a Đ b Đ c S d S	Câu 24. a Đ b S c S d Đ

PHẦN III.

Câu 25. 90	Câu 26. $-0,5$	Câu 27. 128	Câu 28. 550	Câu 29. 67	Câu 30. 82
Câu 31. 14	Câu 32. 2	Câu 33. 27	Câu 34. 21	Câu 35. 42,5	

CHỦ ĐỀ 7. MỘT SỐ YẾU TỐ THỐNG KÊ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO XU THẾ TRUNG TÂM CHO MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM

1. Số trung bình cộng (số trung bình)

Cho mẫu số liệu nhóm như *Bảng 1.*

- Trung điểm x_i của nửa khoảng (tính bằng trung bình cộng của hai đầu mút) ứng với nhóm i là giá trị đại diện của nhóm đó.

- *Số trung bình cộng* của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu $\overline{x}$, được tính theo công thức

$$\overline{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \cdots + n_mx_m}{n}.$$

Nhóm	Giá trị đại diện	Tần số
$[a_1; a_2)$	x_1	n_1
$[a_2; a_3)$	x_2	n_2
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$[a_m; a_m+1)$	x_m	n_m
		$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_m$

Bảng 1

Ý nghĩa: Số trung bình cộng của mẫu số liệu ghép nhóm có thể làm đại diện cho vị trí trung tâm của mẫu số liệu đó khi các số liệu trong mẫu ít sai lệch với số trung bình cộng.

2. Trung vị

Cho mẫu số liệu ghép nhóm như ở *Bảng 2.* Giả sử nhóm k là nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hơn hoặc bằng $\frac{n}{2}$, tức là $cf_{k-1} < \frac{n}{2}$ nhưng $cf_k \geq \frac{n}{2}$. Ta gọi r, d, n_k lần lượt là đầu mút trái, độ dài, tần số của nhóm k, cf_{k-1} là tần số tích lũy của nhóm $k-1$.

Nhóm	Giá trị đại diện	Tần số tích lũy
$[a_1; a_2)$	x_1	$cf_1 = n_1$
$[a_2; a_3)$	x_2	$cf_2 = n_1 + n_2$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$[a_m; a_m+1)$	x_m	$cf_m = n_1 + n_2 + \cdots n_m$
	n	

Bảng 2

Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu M_e, được tính theo công thức sau

$$M_e = r + \left(\frac{\frac{n}{2} - cf_{k-1}}{n_k}\right) \cdot d.$$

Quy ước: $cf_o = 0$.

Ý nghĩa: Trung vị của mẫu số liệu có thể dùng để đại diện cho mẫu số liệu đó.

3. Tứ phân vị

Cho mẫu số liệu như ở *Bảng 2*.

- Giả sử nhóm p là nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hơn hoặc bằng $\frac{n}{4}$, tức là $cf_{p-1} < \frac{n}{4}$ nhưng $cf_p \geq \frac{n}{4}$. Ta gọi s, n, n_p lần lượt là đầu mút trái, độ dài, tần số của nhóm p, cf_{p-1} là tần số tích lũy của nhóm $p-1$.

  Tứ phân vị thứ nhất Q_1 được tính theo công thức sau
$$Q_1 = s + \left(\frac{\frac{n}{4} - cf_{p-1}}{n_p}\right) \cdot h.$$

- *Tứ phân vị thứ hai* Q_2 bằng trung vị M_e.

- Giả sử nhóm q là nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hơn hoặc bằng $\frac{3n}{4}$, tức là $cf_{q-1} < \frac{3n}{4}$ nhưng $cf_q \geq \frac{3n}{4}$. Ta gọi t, ℓ, n_q lần lượt là đầu mút trái, độ dài, tần số của nhóm q, cf_{q-1} là tần số tích lũy của nhóm $q-1$.

  Tứ phân vị thứ ba Q_3 được tính theo công thức sau
$$Q_3 = t + \left(\frac{\frac{3n}{4} - cf_{q-1}}{n_q}\right) \cdot \ell.$$

Ý nghĩa: Tứ phân vị Q_1, Q_2, Q_3 của mẫu số liệu chia mẫu số liệu đó thành bốn phần, mỗi phần chứa 25% giá trị.

4. Mốt

Cho mẫu số liệu ghép nhóm như *Bảng 2*.

Giả sử nhóm i là nhóm có tần số lớn nhất. Ta gọi u, g, n_i lần lượt là đầu mút trái, độ dài, tần số của nhóm i, n_{i-1}, n_{i+1} lần lượt là tần số của nhóm $i-1$, nhóm $i+1$.

Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu M_o, được tính theo công thức sau:
$$M_o = u + \left(\frac{n_i - n_{i-1}}{2n_i - n_{i-1} - n_{i+1}}\right) \cdot g.$$

Quy ước: $n_o = 0$; $n_{m+1} = 0$.

Ý nghĩa: Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm có thể dùng để đo xu thế trung tâm của mẫu số liệu đó.

II. CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO MỨC ĐỘ PHÂN TÁN CHO MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM

1. Khoảng biến thiên

Cho mẫu số liệu ghép nhóm như ở *Bảng 3*, trong đó n_1 và n_m là các số nguyên dương.

Gọi a_1, a_{m+1} lần lượt là đầu mút trái của nhóm 1, đầu mút phải của nhóm m.

Hiệu $R = a_{m+1} - a_1$ được gọi là *khoảng biến thiên* của mẫu số liệu ghép nhóm đó.

Nhóm	Tần số
$[a_1; a_2)$	n_1
$[a_2; a_3)$	n_2
$\dots$	$\dots$
$[a_m; a_{m+1})$	n_m
	n

Bảng 3

Ý nghĩa:

- Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm đo mức độ phân tán cho mẫu số liệu đó. Khoảng biến thiên càng lớn thì mẫu số liệu càng phân tán.
- Trong các đại lượng đo mức độ phân tán của mẫu số liệu ghép nhóm, khoảng biến thiên là đại lượng dễ hiểu, dễ tính toán. Tuy nhiên, do khoảng biến thiên chỉ sử dụng hai giá trị a_1 và a_{m+1} của mẫu số liệu nên đại lượng đó dễ bị ảnh hưởng bởi các *giá trị bất thường.*

2. Khoảng tứ phân vị

Cho mẫu số liệu như ở *Bảng 2.*

Gọi Q_1, Q_2, Q_3 là tứ phân vị của mẫu số liệu đó. Ta gọi hiệu $\Delta Q = \Delta Q_3 - \Delta Q_1$ là *khoảng tứ phân vị* của mẫu số liệu đó.

Ý nghĩa: Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm giúp xác định các giá trị bất thường của mẫu đó. Khoảng tứ phân vị thường được sử dụng thay cho khoảng biến thiên vì nó loại trừ hầu hết giá trị bất thường của mẫu số liệu và nó không bị ảnh hưởng bởi các giá trị bất thường đó.

3. Phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm

Cho mẫu số liệu ghép nhóm như ở *Bảng 1.*

- Gọi $\overline{x}$ là số trung bình cộng của mẫu số liệu đó.
  Số $s^2 = \dfrac{n_1(x_1 - \overline{x})^2 + n_2(x_2 - \overline{x})^2 + \cdots + n_m(x_m - \overline{x})^2}{n}$ được gọi là *phương sai* của mẫu số liệu đó.
- Căn bậc hai (số học) của phương sai được gọi là *độ lệch chuẩn* của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu là s, nghĩa là $s = \sqrt{s^2}$.

  Ý nghĩa:

  Phương sai (độ lệch chuẩn) của mẫu số liệu ghép nhóm được dùng để đo mức độ phân tán của mẫu số liệu ghép nhóm đó.
- Độ lệch chuẩn có cùng đơn vị với đơn vị của mẫu số liệu.
- Khi hai mẫu số liệu ghép nhóm có cùng đơn vị với đơn vị đo và có số trung bình cộng bằng nhau (hoặc xấp xỉ bằng nhau), mẫu số liệu nào có độ lệch chuẩn nhỏ hơn thì mức độ phân tán (so với số trung bình cộng) của các số liệu trong mẫu đó sẽ thấp hơn.

B. MỘT SỐ VÍ DỤ

Dạng I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ lựa chọn một phương án.

Ví dụ 1. Người ta tiến hành phỏng vấn 40 người về một mẫu quần mới. Người phỏng vấn yêu cầu cho điểm mẫu quần đó theo thang điểm là 100. Kết quả được trình bày theo mẫu số liệu ghép nhóm ở *Bảng 4*. Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm đó là

Nhóm	Tần số	Tần số tích lũy
$[50;60)$	3	3
$[60;70)$	5	8
$[70;80)$	25	33
$[80;90)$	4	37
$[90;100)$	3	40
	$n=40$	

Bảng 4

A. 75. **B.** 70,8. **C.** 78,8. **D.** 74,8.

Lời giải.

Số phần tử của mẫu n là $n=40$. Do đó $\dfrac{n}{2}=\dfrac{40}{2}=20$.

Mà $8<20<33$ nên nhóm 3 là nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hơn hoặc bằng 20.

Xét nhóm 3 là nhóm $[70;80)$ có $r=70$; $d=10$; $n_3=25$.

Xét nhóm 2 là nhóm $[60;70)$ có $cf_2=8$.

Áp dụng công thức, ta có trung vị của mẫu số liệu là

$$M_e=70+\frac{20-8}{25}\cdot 10=74{,}8.$$

Chọn đáp án D .... □

Ví dụ 2. Xét mẫu số liệu ghép nhóm được cho ở *Bảng 4*. Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm đó là

Nhóm	Tần số	Tần số tích lũy
$[50;60)$	3	3
$[60;70)$	5	8
$[70;80)$	25	33
$[80;90)$	4	37
$[90;100)$	3	40
	$n=40$	

Bảng 4

A. 9,08. **B.** 82,4375. **C.** 74,75. **D.** 50.

Lời giải.

Ta có

Nhóm	$[50;60)$	$[60;70)$	$[70;80)$	$[80;90)$	$[90;100)$
Giá trị đại diện	55	65	75	85	95
Tần số	3	5	25	4	3

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$\overline{x} = \frac{1}{40}(3 \cdot 55 + 5 \cdot 65 + 25 \cdot 75 + 4 \cdot 85 + 3 \cdot 95) = 74{,}75.$$

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{40}\left[3 \cdot (55 - 74{,}75)^2 + 5 \cdot (65 - 74{,}75)^2 + 25 \cdot (75 - 74{,}75)^2 \right. \\ &\quad \left. + 4 \cdot (85 - 74{,}75)^2 + 3 \cdot (95 - 74{,}75)^2\right] \\ &= \frac{1\,319}{16} = 82{,}4375. \end{aligned}$$

Chọn đáp án B .... □

Dạng II. Câu trắc nghiệm đúng sai

Trong mỗi ý **a)**, **b)**, **c)**, **d)** *ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.*

Ví dụ 3. *Bảng 5* biểu diễn mẫu số liệu ghép nhóm về số tiền (đơn vị: nghìn đồng) mà 60 khách hàng mua sách ở một cửa hàng trong một ngày

Nhóm	Tần số	Tần số tích lũy
$[40;50)$	5	5
$[50;60)$	8	13
$[60;70)$	25	38
$[70;80)$	20	58
$[80;90)$	2	60
	$n = 60$	

Bảng 5

a) Số trung bình của mẫu số liệu trên là 65 (nghìn đồng).

b Trung vị của mẫu số liệu trên là 66,8 (nghìn đồng).

c Tứ phân vị thứ nhất Q_1 của mẫu số liệu trên là 60,8 (nghìn đồng).

d) Mốt của mẫu số liệu trên là 65 (nghìn đồng).

Lời giải.

Ta có

Nhóm	$[40;50)$	$[50;60)$	$[60;70)$	$[70;80)$	$[80;90)$
Giá trị đại diện	45	55	65	75	85
Tần số	5	8	25	20	2

a) **Sai**.

Số trung bình của mẫu số liệu trên là

$$\overline{x} = \frac{1}{60}(5 \cdot 45 + 8 \cdot 55 + 25 \cdot 65 + 20 \cdot 75 + 2 \cdot 85) = 66\,(\text{nghìn đồng}).$$

b) **Đúng**.

Gọi $x_1; x_2; \ldots; x_{60}$ là số tiền mua sách xếp theo thứ tự không giảm của 60 khách hàng.

Do $x_1; \ldots; x_5 \in [40;50)$; $x_6; \ldots; x_{13} \in [50;60)$; $x_{14}; \ldots; x_{38} \in [60;70)$;

$x_{39}; \ldots; x_{58} \in [70;80)$; $x_{59}; x_{60} \in [80;90)$.

Suy ra trung vị của mẫu số liệu $x_1; \ldots; x_{60}$ là $\frac{1}{2}(x_{30}+x_{31}) \in [60;70)$.

Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$M_e = 60 + \frac{\frac{60}{2} - 13}{25} \cdot (70-60) = 66{,}8\,(\text{nghìn đồng}).$$

c) **Đúng**.

Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu xếp không giảm $x_1; x_2; \ldots; x_{60}$ là

$$\frac{1}{2}(x_{15}+x_{16}) \in [60;70).$$

Tứ phân vị thứ nhất Q_1 của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$Q_1 = 60 + \frac{\frac{60}{4} - 13}{25} \cdot (70-60) = 60{,}8\,(\text{nghìn đồng}).$$

d) **Sai**.

Nhóm chứa mốt của mẫu số liệu ghép nhóm là $[60;70)$.

Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$M_0 = 60 + \frac{25-8}{(25-8)+(25-20)} \cdot (70-60) = \frac{745}{11} \approx 67{,}73\,(\text{nghìn đồng}).$$

Chọn đáp án | a sai | b đúng | c đúng | d sai | .... □

Ví dụ 4. Kết quả kiểm tra môn Tiếng Anh (cùng đề) của học sinh hai lớp 12A và 12B được cho lần lượt bởi mẫu số liệu ghép nhóm ở *Bảng 6*, *Bảng 7*.

a) Số trung bình cộng của hai mẫu số liệu trên bằng nhau.

b) Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu lớp 12A nhỏ hơn 2.

c) Phương sai của mẫu số liệu lớp 12B lớn hơn 3.

d) Điểm thi của học sinh lớp 12B đồng đều hơn lớp 12A.

Nhóm	Tần số
$[0;2)$	3
$[2;4)$	5
$[4;6)$	5
$[6;8)$	25
$[8;10)$	2
	$n=40$

Bảng 6

Nhóm	Tần số
$[0;2)$	1
$[2;4)$	4
$[4;6)$	15
$[6;8)$	16
$[8;10)$	4
	$n=40$

Bảng 7

Lời giải.

a) **Đúng**.

Ta có *Bảng 6*

Nhóm	$[0;2)$	$[2;4)$	$[4;6)$	$[6;8)$	$[8;10)$
Giá trị đại diện	1	3	5	7	9
Tần số	3	5	5	25	2

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm lớp 12A là

$$\overline{x} = \frac{1}{40}(3\cdot 1 + 5\cdot 3 + 5\cdot 5 + 25\cdot 7 + 2\cdot 9) = 5{,}9.$$

Ta có *Bảng 7*

Nhóm	$[0;2)$	$[2;4)$	$[4;6)$	$[6;8)$	$[8;10)$
Giá trị đại diện	1	3	5	7	9
Tần số	1	4	15	16	4

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm lớp 12B là

$$\overline{x} = \frac{1}{40}(1\cdot 1 + 4\cdot 3 + 15\cdot 5 + 16\cdot 7 + 4\cdot 9) = 5{,}9.$$

b) Sai.

Ta có phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm lớp 12A là

$$\begin{aligned} s_A^2 &= \frac{1}{40}\left[3(1-5{,}9)^2 + 5(3-5{,}9)^2 + 5(5-5{,}9)^2 \right.\\ &\left. + 25(7-5{,}9)^2 + 2(9-5{,}9)^2\right] = 4{,}19. \end{aligned}$$

Độ lệch chuẩn mẫu số liệu ghép nhóm lớp 12A là $s_A = \sqrt{s^2} = \sqrt{4{,}19} \approx 2{,}05$.

c) Đúng.

Ta có phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm lớp $12B$ là

$$\begin{aligned} s_B^2 &= \frac{1}{40}\left[1(1-5{,}9)^2 + 4(3-5{,}9)^2 + 15(5-5{,}9)^2 \right.\\ &\left. + 16(7-5{,}9)^2 + 4(9-5{,}9)^2\right] = 3{,}19. \end{aligned}$$

d) Đúng.

Độ lệch chuẩn của lớp 12B là $\sqrt{3{,}19} \approx 1{,}79$. Do độ lệch chuẩn của lớp 12B nhỏ hơn độ lệch chuẩn của lớp 12A nên điểm thi lớp 12B đồng đều hơn.

Chọn đáp án | a đúng | b sai | c đúng | d đúng | .... □

Dạng III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Ví dụ 5. Mẫu số liệu dưới đây ghi lại tốc độ của 40 ô tô khi đi qua một trạm đo tốc độ (đơn vị: km/h).

49	42	51	55	45	60	53	55	44	65
52	62	41	44	57	56	68	48	46	53
63	49	54	61	59	57	47	50	60	62
48	52	58	47	60	55	45	47	48	61

Sau khi ghép nhóm mẫu số liệu trên thành sáu nhóm ứng với sáu nửa khoảng

$$[40;45),\ [45;50),\ [50;55),\ [55;60),\ [60;65),\ [65;70)$$

thì trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm nhận được bằng $\frac{a}{b}$ (km/h), $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Khi đó giá trị của a bằng bao nhiêu? **Đáp án: 375**

Lời giải.

Ta có

Nhóm	$[40;45)$	$[45;50)$	$[50;55)$	$[55;60)$	$[60;65)$	$[65;70)$
Tần số	4	11	7	8	8	2

Gọi $x_1;\ldots;x_{40}$ (km/h) là vận tốc xếp không giảm của 40 ô tô.

Ta có $x_1;\ldots;x_4 \in [40;45)$; $x_5;\ldots;x_{15} \in [45;50)$; $x_{16};\ldots;x_{22} \in [50;55)$;
$x_{23};\ldots;x_{30} \in [55;60)$; $x_{31};\ldots;x_{38} \in [60;65)$; $x_{39};x_{40} \in [65;70)$.

Suy ra trung vị của mẫu số liệu $x_1;\ldots;x_{40}$ là $\frac{1}{2}(x_{20}+x_{21}) \in [50;55)$.

Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$M_e = 50 + \frac{\frac{40}{2}-15}{7}\cdot(55-50) = \frac{375}{7}\ \text{(km/h)}.$$

Ví dụ 6. *Bảng 9* biểu diễn mẫu số liệu ghép nhóm về nhiệt độ không khí trung bình các tháng năm 2011 tại Hà Nội (đơn vị: độ C) (*Nguồn: Niên giám Thống kê* 2021, *NXB Thống kê,* 2022). Phương sai của mẫu số liệu đó bằng bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

Nhóm	Tần số
$[16{,}8;19{,}8)$	2
$[19{,}8;22{,}8)$	3
$[22{,}8;25{,}8)$	2
$[25{,}8;28{,}8)$	1
$[28{,}8;31{,}8)$	4
	$n=12$

Bảng 9

Đáp án: 20,75

Lời giải.

Ta có

Nhóm	$[16{,}8;19{,}8)$	$[19{,}8;22{,}8)$	$[22{,}8;25{,}8)$	$[25{,}8;28{,}8)$	$[28{,}8;31{,}8)$
Giá trị đại diện	18,3	21,3	24,3	27,3	30,3
Tần số	2	3	2	1	4

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$\overline{x} = \frac{1}{12}\left(2 \cdot 18{,}3 + 3 \cdot 21{,}3 + 2 \cdot 24{,}3 + 1 \cdot 27{,}3 + 4 \cdot 30{,}3\right) = 24{,}8.$$

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{12}\left[2(18{,}3-24{,}8)^2 + 3(21{,}3-24{,}8)^2 + 2(24{,}3-24{,}8)^2\right. \\ &\quad \left. + 1(27{,}3-24{,}8)^2 + 4(30{,}3-24{,}8)^2\right] = \frac{83}{4} = 20{,}75. \end{aligned}$$

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Dạng I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ lựa chọn một phương án.

Câu 1. Bảng bên biểu diễn mẫu số liệu ghép nhóm về doanh thu (tỉ USD) của 20 hãng xe ô tô có doanh thu cao nhất thế giới năm 2023.

Nhóm	Tần số
$[50; 100)$	10
$[100; 150)$	3
$[150; 200)$	4
$[200; 250)$	1
$[250; 300)$	1
$[300; 350)$	1
	$n = 20$

(*Nguồn: Business Research Insights, Wiki*)

Tứ phân vị thứ ba Q_3 của mẫu số liệu đó bằng

A. 300. **B.** 100.

C. 275. **D.** 175.

Lời giải.

Ta có bảng sau

Nhóm	Tần số	Tần số tích lũy
$[50; 100)$	10	10
$[100; 150)$	3	13
$[150; 200)$	4	17
$[200; 250)$	1	18
$[250; 300)$	1	19
$[300; 350)$	1	20
	$n = 20$	

Ta lại có $\dfrac{3n}{4} = 15$ mà $13 < 15 < 17$ nên nhóm 3 là nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hơn 15.
Xét nhóm 3 là nhóm $[150; 200)$ có $t = 150$, $l = 50$, $n_3 = 4$ và nhóm 2 là nhóm $[100; 150)$ có $cf_2 = 13$.
Do đó, tứ phân vị thứ ba của bảng số liệu ghép nhóm là

$$Q_3 = 150 + \frac{15-13}{4} \cdot 50 = 175.$$

Chọn đáp án D .... □

Câu 2. Bảng bên biểu diễn mẫu số liệu ghép nhóm về chi tiêu bình quân (đơn vị: USD) của một lượt khách quốc tế đến Việt Nam phân theo 27 quốc tịch năm 2019.

(*Nguồn: https://www.gso.gov.vn*)

Nhóm	Tần số
$[0;500)$	1
$[500;1\,000)$	9
$[1\,000;1\,500)$	14
$[1\,500;2\,000)$	2
$[2\,000;2\,500)$	1

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu đó nằm trong khoảng nào dưới đây?

A. $(200;300)$. **B.** $(300;400)$.

C. $(400;500)$. **D.** $(500;600)$.

Lời giải.

Ta có bảng sau

Nhóm	Giá trị đại diện	Tần số
$[0;500)$	250	1
$[500;1\,000)$	750	9
$[1\,000;1\,500)$	1 250	14
$[1\,500;2\,000)$	1 750	2
$[2\,000;2\,500)$	2 250	1

Ta có giá trị trung bình của mẫu số liệu là

$$\overline{x}=\frac{250\cdot 1+750\cdot 9+1\,250\cdot 14+1\,750\cdot 2+2\,250\cdot 1}{27}=\frac{30\,250}{27}.$$

Suy ra độ lệch chuẩn của mẫu số liệu là

$$s=\sqrt{\frac{1\cdot(250-\overline{x})^2+9\cdot(750-\overline{x})^2+14\cdot(1\,250-\overline{x})^2+2\cdot(1\,750-\overline{x})^2+1\cdot(2\,250-\overline{x})^2}{27}}\approx 398{,}9.$$

Chọn đáp án B .... □

Dạng II. Câu trắc nghiệm đúng sai

Trong mỗi ý **a)**, **b)**, **c)**, **d)** *ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.*

Câu 3. Bảng bên cho ta bảng tần số ghép nhóm về số liệu thống kê tỉ lệ che phủ rừng (đơn vị: %) của 60 tỉnh, thành phố ở Việt Nam (không bao gồm Hưng Yên, Vĩnh Long, Cần Thơ) tính đến ngày 31/12/2 020.

(*Nguồn: https://bandolamnghiep.com*)

Nhóm	Tần số
$[0;10)$	17
$[10;20)$	6
$[20;30)$	3
$[30;40)$	4
$[40;50)$	9
$[50;60)$	15
$[60;70)$	5
$[70;80)$	1

a) Tỉ lệ che phủ rừng trung bình trên một tỉnh, thành phố được thống kê ở trên là lớn hơn 33%.

b) Trung vị của mẫu số liệu trên là 40%.

c) Có 20 tỉnh, thành phố có tỉ lệ che phủ rừng nhỏ hơn 10%.

d) Mốt của mẫu số liệu trên là 5%.

Lời giải.

Ta có bảng sau

Nhóm	[0; 10)	[10; 20)	[20; 30)	[30; 40)	[40; 50)	[50; 60)	[60; 70)	[70; 80)
Giá trị đại diện	5	15	25	35	45	55	65	75
Tần số	17	6	3	4	9	15	5	1
Tần số tích lũy	17	23	26	30	39	54	59	60

a) **Đúng**.

Tỉ lệ che phủ rừng trung bình trên một tỉnh, thành phố là

$$\overline{x} = \frac{17\cdot 5 + 6\cdot 15 + 3\cdot 25 + 4\cdot 35 + 9\cdot 45 + 15\cdot 55 + 5\cdot 65 + 1\cdot 75}{60} = \frac{101}{3}\,(\%) > 33\,(\%).$$

b) **Đúng**.

Ta có $\frac{n}{2} = 30$. Suy ra nhóm $[30; 43)$ là nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hơn hay bằng 30.

Vậy trung vị của mẫu số liệu đã cho bằng $M_e = 30 + \frac{30-26}{4}\cdot 10 = 40$ (%).

c) **Sai**.

Vì có 17 tỉnh thành có tỉ lệ rừng che phủ nhỏ hơn $10\,(\%)$.

d) **Sai**.

Ta có nhóm có tần số lớn nhất là nhóm $[0; 10)$.

Suy ra mốt của mẫu số liệu là $M_0 = 0 + \frac{17-0}{2\cdot 17 - 0 - 6}\cdot 10 \approx 6\,(\%)$.

Chọn đáp án | a đúng | b đúng | c sai | d sai | .... □

Câu 4. Bạn An và bạn Bình làm thí nghiệm trồng cây. Mỗi bạn trồng 40 cây cần tây trong cốc, phần gốc của các cây khi bắt đầu trồng đều dài 4 cm. *Bảng 13* và *Bảng 14* lần lượt biểu diễn mẫu số liệu ghép nhóm về số liệu thống kê chiều cao của các cây (đơn vị: centimét) mà bạn An và bạn Bình trồng sau 5 tuần.

Nhóm	Tần số
[20; 25)	2
[25; 30)	16
[30; 35)	20
[35; 40)	2

Bảng 13

Nhóm	Tần số
[20; 25)	5
[25; 30)	9
[30; 35)	25
[35; 40)	1

Bảng 14

a) Chiều cao trung bình của mỗi cây do hai bạn An và Bình trồng không bằng nhau.

b) Khoảng biến thiên của cả hai mẫu số liệu trên là 20.

c) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ở *Bảng 13* là 5,5.

d) Chiều cao của các cây mà bạn Bình trồng đồng đều hơn các cây mà bạn An trồng.

Lời giải.

Ta có bảng biểu diễn mẫu số liệu ghép nhóm về số liệu thống kê chiều cao của các cây mà bạn An trồng là

Nhóm	Giá trị đại diện	Tần số	Tần số tích lũy
$[20;25)$	22,5	2	2
$[25;30)$	27,5	16	18
$[30;35)$	32,5	20	38
$[35;40)$	37,5	2	40

Suy ra chiều cao trung bình của mỗi cây mà An trồng là

$$\overline{x}_A = \frac{2\cdot 22{,}5 + 16\cdot 27{,}5 + 20\cdot 32{,}5 + 2\cdot 37{,}5}{40} = 30{,}25\,(\mathrm{cm}).$$

Bảng biểu diễn mẫu số liệu ghép nhóm về số liệu thống kê chiều cao của các cây mà bạn Bình trồng là

Nhóm	Giá trị đại diện	Tần số	Tần số tích lũy
$[20;25)$	22,5	5	5
$[25;30)$	27,5	9	14
$[30;35)$	32,5	25	39
$[35;40)$	37,5	1	40

Suy ra chiều cao trung bình của mỗi cây mà Bình trồng là

$$\overline{x}_B = \frac{5\cdot 22{,}5 + 9\cdot 27{,}5 + 25\cdot 32{,}5 + 1\cdot 37{,}5}{40} = 30{,}25\,(\mathrm{cm}).$$

a) **Sai**.

Vì $\overline{x}_A = \overline{x}_B = 30{,}25$ cm.

b) **Đúng**.

Vì khoảng biến thiên của cả hai mẫu số liệu là $40 - 20 = 20$.

c) **Đúng**.

Xét mẫu số liệu ở *Bảng 13*.

Ta có $\frac{n}{4} = 10$.

Suy ra nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hơn hay bằng 10 là $[25;30)$.

Suy ra tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu này là

$$Q_1 = 25 + \frac{10-2}{16}\cdot 5 = 27{,}5.$$

Ta có $\frac{3n}{4} = 30$.

Nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hơn hay bằng 30 là nhóm $[30;35)$.

Suy ra tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu này là

$$Q_3 = 30 + \frac{30-18}{20}\cdot 5 = 33.$$

Vậy khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu này là $Q_3 - Q_1 = 33 - 27{,}5 = 5{,}5$.

d) Sai.

Ta có

$$s_A^2 = \frac{2 \cdot 22{,}5^2 + 16 \cdot 27{,}5^2 + 20 \cdot 32{,}5^2 + 2 \cdot 37{,}5^2}{40} - (30{,}25)^2 = 11{,}1875.$$

$$s_B^2 = \frac{5 \cdot 22{,}5^2 + 9 \cdot 27{,}5^2 + 25 \cdot 32{,}5^2 + 1 \cdot 37{,}5^2}{40} - (30{,}25)^2 = 13{,}6875.$$

Vì $s_A^2 < s_B^2$ nên chiều cao mà các cây bạn An trồng đồng đều hơn các cây mà bạn Bình trồng.

Chọn đáp án | a sai | b đúng | c đúng | d sai | .... □

Dạng III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 5. Bảng bên dưới cho ta bảng tần số ghép nhóm về số liệu thống kê chiều dài đường bờ biển (đơn vị: kilômét) của 28 tỉnh, thành phố có giáp biển ở Việt Nam.

(Nguồn: https://vi.wikipedia.org)

Trung vị của mẫu số liệu đó bằng bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Nhóm	Tần số
$[0;100)$	13
$[100;200)$	11
$[200;300)$	3
$[300;400)$	1
	$n = 28$

Đáp án: 109

Lời giải.

Ta có

Nhóm	Tần số	Tần số tích lũy
$[0;100)$	13	13
$[100;200)$	11	24
$[200;300)$	3	27
$[300;400)$	1	28

Ta có $\frac{n}{2} = 14$.

Nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hơn hay bằng 14 là $[100;200)$.

Suy ra trung vị của mẫu số liệu là

$$M_e = 100 + \frac{14 - 13}{11} \cdot 100 \approx 109\,(\text{km}).$$

Câu 6. Bảng bên dưới cho ta bảng tần số ghép nhóm về số liệu thống kê chiều cao (đơn vị: mét) của 40 núi cao nhất Đông Nam Á.

(Nguồn: https://vi.wikipedia.ong)

Nhóm	Tần số
$[3\,500; 4\,000)$	10
$[4\,000; 4\,500)$	7
$[4\,500; 5\,000)$	16
$[5\,000; 5\,500)$	4
$[5\,500; 6\,000)$	3
	$n = 40$

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu đó bằng bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Đáp án: 590

Lời giải.

Ta có bảng sau

Nhóm	Giá trị đại diện	Tần số
$[3\,500; 4\,000)$	$3\,750$	10
$[4\,000; 4\,500)$	$4\,250$	7
$[4\,500; 5\,000)$	$4\,750$	16
$[5\,000; 5\,500)$	$5\,250$	4
$[5\,500; 6\,000)$	$5\,750$	3

Suy ra $\overline{x} = \dfrac{10 \cdot 3\,750 + 7 \cdot 4\,250 + 16 \cdot 4\,750 + 4 \cdot 5\,250 + 3 \cdot 5\,750}{40} = 4\,537{,}5$.

Suy ra độ lệch chuẩn của mẫu số liệu là

$$s = \sqrt{\dfrac{10 \cdot 3\,750^2 + 7 \cdot 4\,250^2 + 16 \cdot 4\,750^2 + 4 \cdot 5\,250^2 + 3 \cdot 5\,750^2}{40} - (4\,537{,}5)^2} \approx 590\,(\mathrm{m}).$$

BẢNG ĐÁP ÁN

PHẦN I.

Câu 1. D	Câu 2. B

PHẦN II.

Câu 3. a Đ b Đ c S d S	Câu 4. a S b Đ c Đ d S

PHẦN III.

Câu 5. 109	Câu 6. 590

CHỦ ĐỀ 8. MỘT SỐ YẾU TỐ XÁC SUẤT

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. ĐẠI SỐ TỔ HỢP

1. Quy tắc cộng

- Một công việc được hoàn thành bởi một trong hai hành động. Nếu hành động thứ nhất có m cách thực hiện, hành động thứ hai có n cách thực hiện (các cách thực hiện của cả hai hành động là khác nhau đôi một) thì công việc đó có $m+n$ cách hoàn thành.

- Quy tắc cộng có thể mở rộng cho một công việc được hoàn thành bởi một trong k hành động $(k \in \mathbb{N}, k > 2)$.

2. Quy tắc nhân

- Một công việc được hoàn thành bởi hai hành động liên tiếp. Nếu hành động thứ nhất có m cách thực hiện và ứng với mỗi cách thực hiện hành động thứ nhất, có n cách thực hiện hành động thứ hai thì công việc đó có $m \cdot n$ cách hoàn thành.

- Quy tắc nhân có thể mở rộng cho một công việc được hoàn thành bởi k hành động liên tiếp $(k \in \mathbb{N}, k > 2)$.

3. Hoán vị

- Cho tập hợp A gồm n phần tử $(n \in \mathbb{N}^*)$. Mỗi kết quả của sự sắp xếp thứ tự n phần tử của tập hợp A được gọi là một *hoán vị của n phần tử đó.*

- Kí hiệu P_n là số các hoán vị của n phần tử.

- Ta có $\mathrm{P}_n = n(n-1)\cdots 2 \cdot 1 = n!$.

4. Chỉnh hợp

- Cho tập hợp A gồm n phần tử và một số nguyên k với $1 \leq k \leq n$. Mỗi kết quả của việc lấy k phần tử từ n phần tử của tập hợp A và sắp xếp chúng theo một thứ tự nào đó được gọi là một *chỉnh hợp chập k của n phần tử* đã cho.

- Kí hiệu A_n^k là số các chỉnh hợp chập k của n phần tử.

- Ta có $\mathrm{A}_n^k = n(n-1)\cdots(n-k+1)$.

5. Tổ hợp

- Cho tập hợp A gồm n phần tử và một số nguyên k với $1 \leq k \leq n$. Mỗi tập con gồm k phần tử được lấy ra từ n phần tử của A được gọi là một *tổ hợp chập k của n phần tử* đó.

- Kí hiệu C_n^k là số tổ hợp chập k của n phần tử với $1 \leq k \leq n$. Ta có $\mathrm{C}_n^k = \dfrac{\mathrm{A}_n^k}{k!}$.

- Quy ước: $0! = 1, \mathrm{C}_n^0 = 1$. Với những quy ước đó, ta có $\mathrm{C}_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ $(0 \leq k \leq n)$.

II. XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ

1. Một số khái niệm

- *Không gian mẫu* Ω là tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra của một phép thử.
- *Biến cố ngẫu nhiên* (gọi tắt là *biến cố*) là một tập con của không gian mẫu. Tập rỗng $\varnothing$ là *biến cố không thể*, Ω là *biến cố chắc chắn*, $\overline{A} = \Omega \setminus A$ là *biến cố đối* của biến cố A.
- Xét phép thử chỉ có một số hữu hạn kết quả có thể xảy ra và khả năng xảy ra của từng kết quả là giống nhau. Gọi Ω là không gian mẫu của phép thử đó. Khi đó, với mỗi biến cố A, ta có định nghĩa cổ điển của xác suất như sau:
Xác suất của biến cố A, kí kiệu là $\mathrm{P}(A)$, bằng tỉ số $\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}$, ở đó $n(A)$, $n(\Omega)$ lần lượt là số phần tử của hai tập hợp A, Ω. Như vậy: $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)}$.

2. Tính chất của xác suất

Xét phép thử T với không gian mẫu là Ω. Khi đó, ta có các tính chất sau:

- $\mathrm{P}(\varnothing) = 0$; $\mathrm{P}(\Omega) = 1$;
- $0 \leq \mathrm{P}(A) \leq 1$ với mỗi biến cố A;
- $\mathrm{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \mathrm{P}(A)$ với mỗi biến cố A.

3. Biến cố hợp, biến cố giao. Hai biến cố xung khắc, hai biến cố độc lập

Cho hai biến cố A và B cùng liên quan đến phép thử T và các kết quả của T là đồng khả năng. Khi đó A, B là các tập con của không gian mẫu.

- Đặt $C = A \cup B$. Khi đó C là một biến cố và được gọi là *biến cố hợp* của hai biến cố A và B, kí hiệu là $A \cup B$.
- Đặt $D = A \cap B$. Khi đó D là một biến cố và được gọi là *biến cố giao* của hai biến cố A và B, kí hiệu là $A \cap B$ hay AB.
- Nếu $A \cap B = \varnothing$ thì A và B gọi là *hai biến cố xung khắc*.
- Hai biến cố A và B được gọi là *độc lập* nếu việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố này không làm ảnh hưởng đến xác suất xảy ra của biến cố kia.

Chú ý:

- $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$.
- Nếu hai biến cố A và B là độc lập thì $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B)$.

III. XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN

- Cho hai biến cố A và B. Xác suất của biến cố A với điều kiện biến cố B đã xảy ra được gọi là xác suất của A với điều kiện B, kí hiệu là $\mathrm{P}(A \mid B)$.
- Nếu $\mathrm{P}(B) > 0$ thì $\mathrm{P}(A \mid B) = \dfrac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}$.
- Từ định nghĩa của xác suất có điều kiện, ta suy ra nếu $\mathrm{P}(B) > 0$ thì

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(B) \cdot \mathrm{P}(A \mid B).$$

Chú ý:

- Nếu A, B là hai biến cố bất kì thì $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B \mid A) = \mathrm{P}(B) \cdot \mathrm{P}(A \mid B)$.
  Công thức trên được gọi là *công thức nhân xác suất.*
- Cho hai biến cố A và B với $\mathrm{P}(B) > 0$. Khi đó, ta có $\mathrm{P}(A \mid B) = \dfrac{n(A \cap B)}{n(B)}$.
- Cho hai biến cố A, B với $0 < \mathrm{P}(A) < 1$, $0 < \mathrm{P}(B) < 1$. Khi đó, A và B là hai biến cố độc lập khi và chỉ khi $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A \mid B) = \mathrm{P}\left(A \mid \overline{B}\right)$ và $\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(B \mid A) = \mathrm{P}\left(B \mid \overline{A}\right)$.

IV. CÔNG THỨC XÁC SUẤT TOÀN PHẦN. CÔNG THỨC BAYES

1. Công thức xác suất toàn phần

Cho hai biến cố A, B với $0 < \mathrm{P}(B) < 1$, ta có

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A \cap B) + \mathrm{P}\left(A \cap \overline{B}\right) = \mathrm{P}(B) \cdot \mathrm{P}(A \mid B) + \mathrm{P}\left(\overline{B}\right) \cdot \mathrm{P}\left(A \mid \overline{B}\right).$$

2. Công thức Bayes

Cho hai biến cố A, B với $\mathrm{P}(A) > 0$, $\mathrm{P}(B) > 0$, ta có

$$\mathrm{P}(B \mid A) = \frac{\mathrm{P}(B) \cdot \mathrm{P}(A \mid B)}{\mathrm{P}(A)}.$$

Nhận xét: Với $\mathrm{P}(A) > 0$, $0 < \mathrm{P}(B) < 1$ thì công thức Bayes còn có dạng

$$\mathrm{P}(B \mid A) = \frac{\mathrm{P}(B) \cdot \mathrm{P}(A \mid B)}{\mathrm{P}(B) \cdot \mathrm{P}(A \mid B) + \mathrm{P}\left(\overline{B}\right) \cdot \mathrm{P}\left(A \mid \overline{B}\right)}.$$

B. MỘT SỐ VÍ DỤ

Dạng I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ lựa chọn một phương án.

Ví dụ 1. Một lớp có 40 học sinh, trong đó có 20 học sinh nam và 20 học sinh nữ. Số cách chọn một ban cán sự lớp 4 người, trong đó có ít nhất một học sinh nữ là

A. C_{40}^4. **B.** $\mathrm{C}_{20}^2 + \mathrm{C}_{20}^2$. **C.** $\mathrm{C}_{20}^3 + \mathrm{C}_{20}^1$. **D.** $\mathrm{C}_{40}^4 - \mathrm{C}_{20}^4$.

Lời giải.

Số cách chọn 4 học sinh từ 40 học sinh là C_{40}^4.

Số cách chọn 4 học sinh nam từ 20 học sinh nam là C_{20}^4.

Vậy số cách chọn một ban cán sự lớp 4 người, trong đó có ít nhất một học sinh nữ là $C_{40}^4 - C_{20}^4$.

Chọn đáp án D .... □

Ví dụ 2. Cho tập hợp $S = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Số các số tự nhiên có 3 chữ số đôi một khác nhau thuộc tập hợp S và chia hết cho 3 có thể lập được là

A. 48. **B.** 18. **C.** 36. **D.** 24.

Lời giải.

Ta phân hoạch tập S thành 3 tập con như sau $S_1 = \{1; 4\}$, $S_2 = \{2; 5\}$, $S_3 = \{3; 6\}$ lần lượt là các tập mà mỗi phần tử khi chia cho 3 có số dư lần lượt là 1, 2, 0.

Để tạo thành một số có 3 chữ số đôi một khác nhau thuộc tập hợp S và chia hết cho 3 thì phải chọn mỗi tập S_1, S_2, S_3 một phần tử và có số cách chọn là $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

Với mỗi bộ ba số ở trên, có 3! cách lập số có 3 chữ số đôi một khác nhau mà chia hết cho 3.

Vậy số các số tự nhiên có 3 chữ số đôi một khác nhau thuộc tập hợp S và chia hết cho 3 có thể lập được là $8 \cdot 3! = 48$.

Chọn đáp án A .... □

Ví dụ 3. Một hộp đựng 12 viên bi có kích thước và khối lượng giống nhau, trong đó có 7 viên bi màu xanh và 5 viên bi màu vàng. Chọn ngẫu nhiên 5 viên bi từ hộp đó. Xác suất để trong 5 viên bi được chọn có ít nhất 2 viên bi màu vàng là

A. $\dfrac{149}{198}$. **B.** $\dfrac{49}{198}$. **C.** $\dfrac{151}{198}$. **D.** $\dfrac{147}{198}$.

Lời giải.

Không gian mẫu có số phần tử là $n(\Omega) = C_{12}^5 = 792$.

Xét biến cố A: "Trong 5 viên bi được chọn có ít nhất 2 viên bi màu vàng".

Biến cố $\overline{A}$: "Trong 5 viên bi được chọn có không quá 1 viên bi màu vàng".

Ta xét hai khả năng sau:

- Số cách chọn 5 viên bi màu xanh, 0 viên bi màu vàng là C_7^5.
- Số cách chọn 5 viên bi gồm 4 viên bi màu xanh và 1 viên bi màu vàng là $C_7^4 \cdot C_5^1$.

Khi đó $n\left(\overline{A}\right) = C_7^5 + C_7^4 \cdot C_5^1$.

Suy ra số cách chọn 5 viên bi, trong đó có ít nhất 2 viên bi màu vàng là

$$n(A) = n(\Omega) - n\left(\overline{A}\right) = C_{12}^5 - C_7^5 - C_7^4 \cdot C_5^1 = 596.$$

Vậy xác suất của biến cố A là $P(A) = \dfrac{596}{792} = \dfrac{149}{198}$.

Chọn đáp án A .... □

Ví dụ 4. Một nhóm học sinh gồm 5 bạn nam và 5 bạn nữ được xếp theo một hàng dọc. Xác suất để 5 bạn nữ đứng cạnh nhau là

A. $\dfrac{1}{50}$. **B.** $\dfrac{1}{42}$. **C.** $\dfrac{1}{252}$. **D.** $\dfrac{1}{35}$.

Lời giải.

Số phần tử của không gian mẫu $n(\Omega) = 10!$.

Gọi biến cố A là "5 bạn nữ đứng cạnh nhau". Khi đó:

Xếp 5 bạn nữ đứng cạnh nhau ta có 5! cách xếp.

Ta coi 5 bạn nữ đứng cạnh nhau là bạn X đại diện.

Bài toán trở thành xếp X và 5 bạn nam vào thành 1 hàng dọc.

Số cách xếp 6 bạn thành 1 hàng dọc là 6! cách.

Vậy $\mathrm{P}(A) = \dfrac{5! \cdot 6!}{10!} = \dfrac{1}{42}$.

Chọn đáp án B .... □

Ví dụ 5. Một mảnh đất chia thành 2 khu vườn: Khu A có 300 cây ăn quả, khu B có 400 cây ăn quả. Trong đó, số cây cam ở khu A và khu B lần lượt là 200 cây và 250 cây. Chọn ngẫu nhiên 1 cây trong mảnh đất. Xác suất cây được chọn là cây cam, biết rằng cây đó ở khu B, là

A. $\dfrac{5}{14}$. **B.** $\dfrac{5}{9}$. **C.** $\dfrac{5}{8}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Xét các biến cố

- M: "Cây được chọn là cây cam";
- N: "Cây được chọn ở khu B".

Ta có: $\mathrm{P}(M \mid N) = \dfrac{n(M \cap N)}{n(N)} = \dfrac{250}{400} = \dfrac{5}{8}$.

Vậy xác suất cây được chọn là cây cam, biết rằng cây đó ở khu B là $\dfrac{5}{8}$.

Chọn đáp án C .... □

Ví dụ 6. Một thư viện có hai phòng riêng biệt, phòng A và phòng B. Xác suất chọn được một quyển sách về chủ đề Khoa học tự nhiên thuộc phòng A và thuộc phòng B lần lượt là 0,25 và 0,5. Chọn ngẫu nhiên 1 quyển sách của thư viện. Giả sử quyển sách được chọn về chủ đề Khoa học tự nhiên, xác suất quyển sách đó ở phòng A là

A. $\dfrac{2}{3}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{4}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Xét các biến cố

- M: "Quyển sách được chọn ở phòng A";
- N: "Quyển sách được chọn về chủ đề Khoa học tự nhiên";
- Q: "Quyển sách được chọn về chủ đề Khoa học tự nhiên và thuộc phòng A";
- R: "Quyển sách được chọn về chủ đề Khoa học tự nhiên và thuộc phòng B".

Nhận thấy $N = Q \cup R$ và Q, R là hai biến cố xung khắc nên

$$\mathrm{P}(N) = \mathrm{P}(Q) + \mathrm{P}(R) = 0{,}25 + 0{,}5 = 0{,}75.$$

Ta có $\mathrm{P}(M \mid N)=\dfrac{\mathrm{P}(M \cap N)}{\mathrm{P}(N)}=\dfrac{0{,}25}{0{,}75}=\dfrac{1}{3}$.

Vậy xác suất quyển sách được chọn ở phòng A, biết rằng quyển sách đó về chủ đề Khoa học tự nhiên, là $\dfrac{1}{3}$.

Chọn đáp án (C) .... □

Ví dụ 7. Cho hai biến cố A, B với $\mathrm{P}(B)=0{,}6$; $\mathrm{P}(A \mid B)=0{,}7$ và $\mathrm{P}(A \mid \overline{B})=0{,}4$. Khi đó, $\mathrm{P}(A)$ bằng

A. 0,7. **B.** 0,4. **C.** 0,58. **D.** 0,52.

Lời giải.

Ta có $\mathrm{P}(\overline{B})=1-\mathrm{P}(B)=1-0{,}6=0{,}4$.

Theo công thức xác suất toàn phần, ta có

$$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(B)\cdot\mathrm{P}(A \mid B)+\mathrm{P}(\overline{B})\cdot\mathrm{P}(A \mid \overline{B})=0{,}6\cdot 0{,}7+0{,}4\cdot 0{,}4=0{,}58.$$

Chọn đáp án (C) .... □

Ví dụ 8. Cho hai biến cố A, B thoả mãn $\mathrm{P}(A)=0{,}4$; $\mathrm{P}(B)=0{,}3$; $\mathrm{P}(A \mid B)=0{,}25$. Khi đó, $\mathrm{P}(B \mid A)$ bằng

A. 0,1875. **B.** 0,48. **C.** 0,333. **D.** 0,95.

Lời giải.

Theo công thức Bayes, ta có $\mathrm{P}(B \mid A)=\dfrac{\mathrm{P}(B)\cdot\mathrm{P}(A \mid B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{0{,}3\cdot 0{,}25}{0{,}4}=0{,}1875$.

Chọn đáp án (A) .... □

Dạng II. Câu trắc nghiệm đúng sai

Trong mỗi ý **a)**, **b)**, **c)**, **d)** *ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.*

Ví dụ 9. Bạn An có 2 cuốn sách môn Toán, 3 cuốn sách môn Vật lí, 3 cuốn sách môn Hoá học, các cuốn sách đôi một khác nhau. Giá sách của bạn An chỉ có 1 hàng gồm 3 ngăn liền nhau. Bạn An xếp các cuốn sách trên vào giá sách sao cho mỗi ngăn chỉ có một môn.

a) Số cách xếp 2 cuốn sách môn Toán trong một ngăn là $2!$.

b) Số cách xếp 3 cuốn sách môn Vật lí trong một ngăn là 3.

c) Số cách xếp 3 cuốn sách môn Hoá học trong một ngăn là $3!$.

d) Số cách xếp các cuốn sách sao cho mỗi ngăn chỉ có một môn là 432.

Lời giải.

a) **Đúng**.

Số cách xếp 2 cuốn sách môn Toán trong một ngăn là $2!$.

b) **Sai**.

Số cách xếp 3 cuốn sách môn Vật lí trong một ngăn là $3!$.

c) **Đúng**.

Số cách xếp 3 cuốn sách môn Hoá học trong một ngăn là $3!$.

d) **Đúng**.

Vì có 3 ngăn nên số cách xếp các cuốn sách sao cho mỗi ngăn chỉ có một môn là $(2!\cdot 3!\cdot 3!)\cdot 3! = 432$.

Chọn đáp án | a đúng | b sai | c đúng | d đúng | .... □

Ví dụ 10. Một hộp chứa 18 quả cầu có kích thước và khối lượng như nhau, trong đó có 4 quả cầu màu xanh được đánh số từ 1 đến 4, có 6 quả cầu màu đỏ được đánh số từ 1 đến 6, có 8 quả cầu màu vàng được đánh số từ 1 đến 8. Lấy ngẫu nhiên 2 quả cầu từ hộp.

a) Có 20 cách lấy 2 quả cầu khác số, trong đó có 1 quả cầu màu xanh và 1 quả cầu màu đỏ.

b) Có 24 cách lấy 2 quả cầu khác số, trong đó có 1 quả cầu màu xanh và 1 quả cầu màu vàng.

c) Có 42 cách lấy 2 quả cầu khác số, trong đó có 1 quả cầu màu đỏ và 1 quả cầu màu vàng.

d) Xác suất để 2 quả cầu được lấy vừa khác màu vừa khác số là $\dfrac{86}{153}$.

Lời giải.

Không gian mẫu có số phần tử là $\mathrm{C}_{18}^2 = 153$.

Xét biến cố A: "Lấy được 2 quả cầu vừa khác màu vừa khác số".

a) **Đúng**.

Lấy 2 quả cầu khác số, trong đó có 1 quả cầu màu xanh và 1 quả cầu màu đỏ có $4\cdot 5 = 20$ cách.

b) **Sai**.

Lấy 2 quả cầu khác số, trong đó có 1 quả cầu màu xanh và 1 quả cầu màu vàng có $4\cdot 7 = 28$ cách.

c) **Đúng**.

Lấy 2 quả cầu khác số, trong đó có 1 quả cầu màu đỏ và 1 quả cầu màu vàng có $6\cdot 7 = 42$ cách.

d) **Sai**.

Số cách lấy 2 quả cầu vừa khác màu vừa khác số là $20 + 28 + 42 = 90$.

Vậy xác suất của biến cố A là $\mathrm{P}(A) = \dfrac{90}{153} = \dfrac{10}{17}$.

Chọn đáp án | a đúng | b sai | c đúng | d sai | .... □

Ví dụ 11. Để nghiên cứu sự phát triển của một loại cây, người ta trồng hạt giống của loại cây đó trên hai lô đất thí nghiệm M, N khác nhau. Xác suất phát triển bình thường của cây đó trên các lô đất M và N lần lượt là 0,56 và 0,62. Lặp lại thí nghiệm trên với đầy đủ các điều kiện tương đồng. Xét các biến cố

- A: "Cây phát triển bình thường trên lô đất M";
- B: "Cây phát triển bình thường trên lô đất N".

a) Các cặp biến cố $\overline{A}$ và B, A và $\overline{B}$ là độc lập.

b) Hai biến cố $C = \overline{A} \cap B$ và $D = A \cap \overline{B}$ không là hai biến cố xung khắc.

c) $\mathrm{P}(\overline{A}) = 0{,}56$; $\mathrm{P}(\overline{B}) = 0{,}62$.

d) Xác suất để cây chỉ phát triển bình thường trên một lô đất là 0,4856.

Lời giải.

a) Đúng.

Các cặp biến cố $\overline{A}$ và B, A và $\overline{B}$ là độc lập vì hai lô đất khác nhau.

b) Sai.

Hai biến cố $C = \overline{A} \cap B$ và $D = A \cap \overline{B}$ là hai biến cố xung khắc.

c) Sai.

Ta có $\mathrm{P}(\overline{A}) = 1 - \mathrm{P}(A) = 1 - 0{,}56 = 0{,}44$; $\mathrm{P}(\overline{B}) = 1 - \mathrm{P}(B) = 1 - 0{,}62 = 0{,}38$.

d) Đúng.

Xác suất để cây phát triển bình thường trên một lô đất là

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(C \cup D) &= \mathrm{P}(C) + \mathrm{P}(D)\\ &= \mathrm{P}(\overline{A}) \cdot \mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(\overline{B})\\ &= 0{,}44 \cdot 0{,}62 + 0{,}56 \cdot 0{,}38\\ &= 0{,}4856.\end{aligned}$$

Chọn đáp án | a đúng | b sai | c sai | d đúng | .... □

Ví dụ 12. Lớp 12A có 40 học sinh, trong đó có 25 học sinh tham gia câu lạc bộ Tiếng Anh, 16 học sinh tham gia câu lạc bộ Toán, 12 học sinh vừa tham gia câu lạc bộ Tiếng Anh vừa tham gia câu lạc bộ Toán. Chọn ngẫu nhiên 1 học sinh. Xét các biến cố sau:

A: "Học sinh được chọn tham gia câu lạc bộ Tiếng Anh";

B: "Học sinh được chọn tham gia câu lạc bộ Toán".

a) $\mathrm{P}(A) = 0{,}4$. **b)** $\mathrm{P}(B) = 0{,}625$. **c)** $\mathrm{P}(A \mid B) = 0{,}75$. **d)** $\mathrm{P}(B \mid A) = 0{,}48$.

Lời giải.

a) Sai.

Chọn ngẫu nhiên 1 trong 40 học sinh có C_{40}^{1} cách.

Do đó $n(\Omega) = \mathrm{C}_{40}^{1} = 40$.

Vì có 25 học sinh tham gia câu lạc bộ Tiếng Anh nên $n(A) = 25$.

Vậy $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{25}{40} = 0{,}625$.

b) Sai.

Vì có 16 học sinh tham gia câu lạc bộ Toán nên $n(B) = 16$.

Vậy $\mathrm{P}(B) = \dfrac{n(B)}{n(\Omega)} = \dfrac{16}{40} = 0{,}4$.

c) Đúng.

Vì có 12 học sinh vừa tham gia câu lạc bộ Tiếng Anh vừa tham gia câu lạc bộ Toán nên $n(A \cap B) = 12$.

Do đó $\mathrm{P}(A \mid B) = \dfrac{n(A \cap B)}{n(B)} = \dfrac{12}{16} = 0{,}75$.

d) Đúng.

Số học sinh vừa tham gia câu lạc bộ Tiếng Anh vừa tham gia câu lạc bộ Toán là 12, số học sinh tham gia câu lạc bộ Tiếng Anh là 25 nên $\mathrm{P}(B \mid A) = \dfrac{n(A \cap B)}{n(A)} = \dfrac{12}{25} = 0{,}48$.

Chọn đáp án | a sai | b sai | c đúng | d đúng | .... □

Ví dụ 13. Trong một hộp có 18 quả bóng bàn loại I và 2 quả bóng bàn loại II, các quả bóng bàn có hình dạng và kích thước như nhau. Một học sinh lấy ngẫu nhiên lần lượt 2 quả bóng bàn (lấy không hoàn lại) trong hộp.

a) Xác suất để lần thứ nhất lấy được quả bóng bàn loại II là $\dfrac{9}{10}$.

b Xác suất để lần thứ hai lấy được quả bóng bàn loại II, biết lần thứ nhất lấy được quả bóng bàn loại II là $\dfrac{1}{19}$.

c) Xác suất để cả hai lần đều lấy được quả bóng bàn loại II là $\dfrac{9}{190}$.

d Xác suất để ít nhất 1 lần lấy được quả bóng bàn loại I là $\dfrac{189}{190}$.

Lời giải.

a) Sai.

Gọi A là biến cố "Lần thứ nhất lấy được quả bóng bàn loại II".

Khi đó $\mathrm{P}(A) = \dfrac{2}{20} = \dfrac{1}{10}$.

b) Đúng.

Gọi B là biến cố "Lần thứ hai lấy được quả bóng bàn loại II".

Vì lần thứ nhất đã lấy được 1 quả bóng bàn loại II nên chỉ còn 1 quả bóng bàn loại II trong hộp. Do đó xác suất lấy được quả bóng bàn loại II, biết lần thứ nhất đã lấy được quả bóng bàn loại II là $\mathrm{P}(B \mid A) = \dfrac{1}{19}$.

c) Sai.

Gọi C là biến cố "Cả hai lần đều lấy được quả bóng bàn loại II".

Khi đó $C = A \cap B$. Do đó xác suất cần tìm là

$$\mathrm{P}(C) = \mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(B \mid A) \cdot \mathrm{P}(A) = \frac{1}{19} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{190}.$$

d) Đúng.

Ta có biến cố đối của biến cố C là $\overline{C}$: "Có ít nhất 1 lần lấy được quả bóng bàn loại I". Do đó $\mathrm{P}(\overline{C}) = 1 - \mathrm{P}(C) = 1 - \dfrac{1}{190} = \dfrac{189}{190}$.

Chọn đáp án | a sai | b đúng | c sai | d đúng | .... □

Dạng III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Ví dụ 14. Có bao nhiêu số tự nhiên có 9 chữ số, trong đó có bốn chữ số 3, ba chữ số 2 và 2 chữ số 1?

Đáp án: 1 260

Lời giải.

Chọn 4 trong 9 vị trí của các chữ số trong số tự nhiên để đặt bốn chữ số 3 có C_9^4 cách.

Chọn 3 trong 5 vị trí còn lại trong số tự nhiên để đặt ba chữ số 2 có C_5^3 cách.

Chọn 2 trong 2 vị trí còn lại trong số tự nhiên để đặt hai chữ số 1 có C_2^2 cách.

Vậy số các số tự nhiên có 9 chữ số thỏa yêu cầu bài toán là $C_9^4 \cdot C_5^3 \cdot C_2^2 = 1\,260$ số.

Ví dụ 15. Một cuộc thi khoa học có 36 bộ câu hỏi, trong đó có 20 bộ câu hỏi về chủ đề tự nhiên và 16 bộ câu hỏi về chủ đề xã hội. Bạn An lấy ngẫu nhiên 1 bộ câu hỏi (lấy không hoàn lại), sau đó bạn Bình lấy ngẫu nhiên 1 bộ câu hỏi. Xác suất bạn Bình lấy được bộ câu hỏi về chủ đề xã hội bằng $\dfrac{a}{b}$ với $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Giá trị $a+b$ bằng bao nhiêu?

Đáp án: 13

Lời giải.

Gọi A là biến cố "Bạn An lấy được bộ câu hỏi về chủ đề xã hội".
Khi đó $P(A) = \dfrac{16}{36} = \dfrac{4}{9}$ và $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A) = 1 - \dfrac{4}{9} = \dfrac{5}{9}$.
Gọi B là biến cố "Bạn Bình lấy được bộ câu hỏi về chủ đề xã hội".
Nếu bạn An chọn được một bộ câu hỏi về chủ đề tự nhiên thì sau đó còn 35 bộ câu hỏi, trong đó có 16 bộ câu hỏi về chủ đề xã hội, suy ra $P(B \mid A) = \dfrac{16}{35}$.
Nếu bạn An chọn được một bộ câu hỏi về chủ đề xã hội thì sau đó còn 35 bộ câu hỏi, trong đó có 15 bộ câu hỏi về chủ để xã hội, suy ra $P\left(B \mid \overline{A}\right) = \dfrac{15}{35}$.
Theo công thức xác suất toàn phần, ta có

$$P(B) = P(B \mid A) \cdot P(A) + P\left(B \mid \overline{A}\right) \cdot P\left(\overline{A}\right) = \frac{15}{35} \cdot \frac{4}{9} + \frac{16}{35} \cdot \frac{5}{9} = \frac{4}{9}.$$

Suy ra $a = 4$; $b = 9$.

Vậy $a + b = 13$.

Ví dụ 16. Trong một đợt kiểm tra sức khỏe, có một loại bệnh X mà tỉ lệ người mắc bệnh là 0,2% và một loại xét nghiệm Y mà ai mắc bệnh X khi xét nghiệm Y cũng có phản ứng dương tính. Tuy nhiên, có 6% những người không bị bệnh X lại có phản ứng dương tính với xét nghiệm Y. Chọn ngẫu nhiêu 1 người trong đợt kiểm tra sức khỏe đó. Giả sử người đó có phản ứng dương tính với xét nghiệm Y. Xác suất người đó bị mắc bệnh X là bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

Đáp án: 0,03

Lời giải.

Gọi A là biến cố "Người được chọn bị mắc bệnh X".

Khi đó $P(A) = 0{,}02$ và $P\left(\overline{A}\right) = 1 - 0{,}02 = 0{,}998$.

Gọi B là biến cố "Người được chọn có phản ứng dương tính với xét nghiệm Y".

Theo đề bài, ta có $P(B \mid A) = 1$, $P\left(B \mid \overline{A}\right) = 0{,}06$.

Áp dụng công thức Bayes, ta có

$$\mathrm{P}(A \mid B) = \frac{\mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B \mid A)}{\mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B \mid A) + \mathrm{P}\left(\overline{A}\right) \cdot \mathrm{P}\left(B \mid \overline{A}\right)} = \frac{0{,}002 \cdot 1}{0{,}002 \cdot 1 + 0{,}998 \cdot 0{,}06} = 0{,}03.$$

Vậy nếu người đó có phản ứng dương tính với xét nghiệm Y thì xác suất người đó mắc bệnh X xấp xỉ khoảng 0,03.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Dạng I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ lựa chọn một phương án.

Câu 1. Cho các tập hợp

$A = \{M; N; P; Q; R; S\}$;

$B = \{a; b; c; d; e; f; g; h\}$;

$C = \{x \in \mathbb{N} \mid 0 \leq x \leq 9\}$.

Nếu lập một mật khẩu dài 8 kí tự đôi một khác nhau, trong đó 1 kí tự đầu tiên thuộc A, 2 kí tự tiếp theo thuộc B và 5 kí tự cuối cùng thuộc C thì số cách lập mật khẩu đó là

A. $8!$. **B.** $6 \cdot \mathrm{C}_8^2 \cdot \mathrm{C}_{10}^5$. **C.** $6 \cdot \mathrm{A}_8^2 \cdot \mathrm{A}_{10}^5$. **D.** $6 \cdot \mathrm{C}_8^2 \cdot \mathrm{C}_{10}^5 \cdot 8!$.

Lời giải.

Ta có $C = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$.

Chọn 1 trong 6 kí tự của tập A và xếp vào vị trí đầu tiên của mật khẩu có 6 cách.

Chọn 2 trong 8 kí tự của tập B và xếp vào hai vị trí tiếp theo của mật khẩu có A_8^2 cách.

Chọn 5 trong 10 kí tự của tập C và xếp vào năm vị trí cuối cùng của mật khẩu có A_{10}^5 cách.

Vậy số cách lập mật khẩu đó là $6 \cdot \mathrm{A}_8^2 \cdot \mathrm{A}_{10}^5$ cách.

Chọn đáp án C .... □

Câu 2. Một lớp học có 20 bạn nam và 15 bạn nữ. Số cách chọn 10 bạn trực nhật lớp sao cho có cả bạn nam và bạn nữ là

A. C_{35}^{10}. **B.** A_{35}^{10}. **C.** $\mathrm{C}_{15}^{10} + \mathrm{C}_{20}^{10}$. **D.** $\mathrm{C}_{35}^{10} - \mathrm{C}_{15}^{10} - \mathrm{C}_{20}^{10}$.

Lời giải.

Số cách chọn 10 bạn bất kỳ trong lớp đó là C_{35}^{10} cách.

Số cách chọn 10 trong 20 bạn nam của lớp đó là C_{20}^{10} cách.

Số cách chọn 10 trong 15 bạn nữ của lớp đó là C_{15}^{10} cách.

Vậy số cách chọn 10 bạn trực nhật lớp sao cho có cả bạn nam và bạn nữ là $\mathrm{C}_{35}^{10} - \mathrm{C}_{15}^{10} - \mathrm{C}_{20}^{10}$ cách.

Chọn đáp án D .... □

Câu 3. Trường THPT A có tỉ lệ học sinh giỏi môn Tin học là 0,3; tỉ lệ học sinh giỏi môn Tiếng Anh là 0,4; tỉ lệ học sinh giỏi cả hai môn trên là 0,25. Chọn ngẫu nhiên 1 học sinh của trường. Xác suất chọn được học sinh giỏi ít nhất một trong hai môn trên là

A. 0,95. **B.** 0,45. **C.** 0,15. **D.** 0,7.

Lời giải.

Gọi A là biến cố "Học sinh được chọn giỏi môn Tin học".

B là biến cố "Học sinh được chọn giỏi môn Tiếng Anh".

Ta có AB là biến cố "Học sinh được chọn giỏi môn Tin học và môn Tiếng Anh".

$A \cup B$ là biến cố "Học sinh được chọn giỏi ít nhất một trong hai môn trên".

Ta có: $\mathrm{P}(A) = 0{,}3$; $\mathrm{P}(B) = 0{,}4$; $\mathrm{P}(AB) = 0{,}25$.

Vậy $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(AB) = 0{,}3 + 0{,}4 - 0{,}25 = 0{,}45$.

Chọn đáp án B .... □

Câu 4. Gieo một xúc xắc cân đối và đồng chất bốn lần liên tiếp. Xác suất của biến cố "Tổng số chấm xuất hiện ở bốn lần gieo lớn hơn 5" là

A. $1 - \dfrac{4}{6^4}$. **B.** $\dfrac{5}{6^4}$. **C.** $1 - \dfrac{5}{6^4}$. **D.** $\dfrac{4}{6^4}$.

Lời giải.

Ta có $n(\Omega) = 6^4$.

Gọi A là biến cố "Tổng số chấm xuất hiện ở bốn lần gieo lớn hơn 5".

Suy ra, $\overline{A}$ là biến cố "Tổng số chấm xuất hiện ở bốn lần gieo nhỏ hơn hoặc bằng 5".

Trường hợp tổng số chấm bằng 4, nghĩa là cả bốn lần gieo đều xuất hiện mặt 1 chấm. Do đó, số cách là $1^4 = 1$.

Trường hợp tổng số chấm bằng 5, nghĩa là có một lần xuất hiện mặt 2 chấm và ba lần mặt 1 chấm. Do đó, số cách là $\mathrm{C}_4^3 \cdot 1 \cdot 1^3 = 4$.

Suy ra, $n\left(\overline{A}\right) = 1 + 4 = 5$.

Xác suất cần tìm $\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \dfrac{5}{6^4}$.

Chọn đáp án C .... □

Câu 5. Học sinh lớp 12A tham gia các câu lạc bộ bóng bàn và cờ vua của trường. Chọn ngẫu nhiên 1 học sinh. Xác suất chọn được học sinh tham gia cả hai câu lạc bộ trên bằng 0,2, còn xác suất chọn được học sinh tham gia câu lạc bộ bóng bàn bằng 0,25. Xác suất chọn được học sinh tham gia câu lạc bộ cờ vua, biết học sinh đó tham gia câu lạc bộ bóng bàn, là

A. 0,8. **B.** 0,45. **C.** 0,05. **D.** 0,2.

Lời giải.

Gọi A là biến cố "Chọn được học sinh tham gia câu lạc bộ cờ vua", B là biến cố "Chọn được học sinh tham gia câu lạc bộ bóng bàn".

Ta có:

- Xác suất chọn được học sinh tham gia cả hai câu lạc bộ: $\mathrm{P}\big(A \cap B\big) = 0{,}2$.
- Xác suất chọn được học sinh tham gia câu lạc bộ bóng bàn: $\mathrm{P}(B) = 0{,}25$.

Xác suất chọn được học sinh tham gia câu lạc bộ cờ vua, khi biết học sinh đó tham gia câu lạc bộ bóng bàn là

$$\mathrm{P}(A \mid B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{0{,}2}{0{,}25} = 0{,}8.$$

Vậy, xác suất chọn được học sinh tham gia câu lạc bộ cờ vua khi đã biết học sinh đó tham gia câu lạc bộ bóng bàn là 0,8.

Chọn đáp án (A) .... □

Câu 6. Một thành phố có 25% người đàn ông nghiện thuốc lá, trong số những người đàn ông nghiện thuốc lá có 41% người đàn ông bị bệnh viêm phổi. Chọn ngẫu nhiên một người đàn ông trong thành phố. Xác suất người đàn ông được chọn bị bệnh viêm phổi, biết người đó nghiện thuốc lá, là

A. $\dfrac{25}{100}$. **B.** $\dfrac{25}{41}$. **C.** $\dfrac{66}{100}$. **D.** $\dfrac{41}{100}$.

Lời giải.

Gọi A là biến cố "Người đàn ông được chọn bị bệnh bị viêm phổi", B là biến cố "Người đàn ông được chọn nghiện thuốc là".

Ta có:

- Xác suất người đàn ông được chọn vừa nghiện thuốc lá vừa bị viêm phổi:
$$\mathrm{P}\left(A\cap B\right)=0{,}25\cdot 0{,}41=0{,}1025.$$
- Xác suất người đàn ông được chọn nghiện thuốc lá: $\mathrm{P}(B)=0{,}25$.

Xác suất người đàn ông được chọn bị viêm phổi, biết người đó nghiện thuốc lá
$$\mathrm{P}(A\mid B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{0{,}1025}{0{,}25}=0{,}41.$$

Vậy xác suất cần tìm là $\dfrac{41}{100}$.

Chọn đáp án (D) .... □

Câu 7. Khi tìm hiểu về việc học Tiếng Anh của một trường phổ thông, người ta thấy rằng có 70% học sinh tự học Tiếng Anh bằng hình thức trực tuyến. Chọn ngẫu nhiên 1 học sinh. Khi đó, xác suất chọn được học sinh giỏi Tiếng Anh, biết học sinh đó tự học bằng hình thức trực tuyến là 0,8; xác suất chọn được học sinh giỏi Tiếng Anh, biết học sinh đó không tự học bằng hình thức trực tuyến là 0,3. Xác suất chọn được học sinh giỏi Tiếng Anh là

A. 0,24. **B.** 0,56. **C.** 0,7. **D.** 0,65.

Lời giải.

Gọi A là biến cố "Chọn được học sinh giỏi Tiếng Anh", B là biến cố "Chọn được học sinh tự học Tiếng Anh trực tuyến".

Khi đó, $\mathrm{P}(B)=0{,}7$; $\mathrm{P}\left(\overline{B}\right)=1-0{,}7=0{,}3$.

Xác suất học sinh giỏi Tiếng Anh, biết học sinh đó tự học bằng trực tuyến: $\mathrm{P}(A\mid B)=0{,}8$.

Xác suất học sinh giỏi Tiếng Anh, biết học sinh đó không tự học bằng trực tuyến: $\mathrm{P}\left(A\mid \overline{B}\right)=0{,}3$.

Theo công thức xác suất toàn phần, xác suất chọn được học sinh giỏi Tiếng Anh là
$$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(B)\cdot\mathrm{P}(A\mid B)+\mathrm{P}\left(\overline{B}\right)\cdot\mathrm{P}\left(A\mid\overline{B}\right)=0{,}7\cdot 0{,}8+0{,}3\cdot 0{,}3=0{,}65.$$

Chọn đáp án (D) .... □

Câu 8. Một bộ bài tú lơ khơ gồm 52 quân bài, trong đó có 4 quân Át. Bạn Hoa rút ngẫu nhiên 1 quân bài (không hoàn lại), sau đó bạn Dung rút ngẫu nhiên 1 quân bài. Xác suất bạn Dung rút được quân Át là

A. $\frac{1}{51}$. **B.** $\frac{1}{13}$. **C.** $\frac{1}{17}$. **D.** $\frac{4}{51}$.

Lời giải.

Xét các biến cố:

A: "Bạn Hoa rút được quân Át";

B: "Bạn Dung rút được quân Át".

Khi đó, $\mathrm{P}(A)=\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$; $\mathrm{P}\left(\overline{A}\right)=1-\mathrm{P}(A)=1-\frac{1}{13}=\frac{12}{13}$.

- Nếu bạn Hoa rút được lá Át thì còn lại 51 quân bài, trong đó có 3 lá Át, suy ra $\mathrm{P}(B \mid A)=\frac{3}{51}$.
- Nếu bạn Hoa không rút được lá Át thì còn lại 51 quân bài, trong đó có 4 lá Át, suy ra $\mathrm{P}\left(B \mid \overline{A}\right)=\frac{4}{51}$.

Theo công thức xác suất toàn phần, xác suất bạn Dung rút được quân Át là

$$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A)\cdot\mathrm{P}(B \mid A)+\mathrm{P}\left(\overline{A}\right)\cdot\mathrm{P}\left(B \mid \overline{A}\right)=\frac{1}{13}\cdot\frac{3}{51}+\frac{12}{13}\cdot\frac{4}{51}=\frac{1}{13}.$$

Chọn đáp án B .... □

Câu 9. Khi điều tra về hoạt động sử dụng máy tính và tình trạng cận thị của trẻ em ở một tỉnh thì được kết quả:

- Có 10% trẻ em thường xuyên sử dụng máy tính;
- Có 30% trẻ em bị cận thị;
- Trong những trẻ em thường xuyên sử dụng máy tính có 54% trẻ em bị cận thị.

Chọn ngẫu nhiên 1 trẻ em. Xác suất trẻ em được chọn thường xuyên sử dụng máy tính, biết trẻ em đó bị cận thị, là

A. 0,94. **B.** 0,14. **C.** 0,18. **D.** 0,0162.

Lời giải.

Gọi A là biến cố "Trẻ em thường xuyên sử dụng máy tính".

Ta có $\mathrm{P}(A)=0{,}1>0$.

Gọi B là biến cố "Trẻ em bị cận thị".

Ta có $\mathrm{P}(B)=0{,}3>0$.

Xác suất trẻ em bị cận thị, biết thường xuyên sử dụng máy tính là $\mathrm{P}(B \mid A)=0{,}54$.

Ta có $\mathrm{P}(B \mid A)=\frac{\mathrm{P}(BA)}{\mathrm{P}(A)} \Rightarrow \mathrm{P}(BA)=0{,}54\cdot 0{,}1=0{,}054$.

Do đó: $\mathrm{P}(A \mid B)=\frac{\mathrm{P}(BA)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{0{,}054}{0{,}3}=0{,}18$.

Chọn đáp án C .... □

Câu 10. Một động cơ điện có hai van bảo hiểm cùng hoạt động. Xác suất hoạt động tốt của van I là 0,9, của van II là 0,72. Xác suất hoạt động tốt của van I, biết van II hoạt động tốt là 0,96. Giả sử van I hoạt động tốt, xác suất hoạt động tốt của van II là

A. 0,675. **B.** 0,768. **C.** 0,66. **D.** 0,78.

Lời giải.

Gọi A là biến cố "Van I hoạt động tốt". Ta có $\mathrm{P}(A) = 0{,}9$.

Gọi B là biến cố "van II hoạt động tốt". Ta có $\mathrm{P}(B) = 0{,}72$.

Gọi C là biến cố "Van I hoạt động tốt biết van II hoạt động tốt". Ta có $\mathrm{P}(C) = 0{,}96$.

Ta có $\mathrm{P}(B) > 0$ nên

$$\mathrm{P}(C) = \mathrm{P}(A \mid B) = \frac{\mathrm{P}(AB)}{\mathrm{P}(B)} \Rightarrow \mathrm{P}(AB) = \mathrm{P}(A \mid B) \cdot \mathrm{P}(B) = 0{,}96 \cdot 0{,}72 = 0{,}6912.$$

Vậy giả sử van I hoạt động tốt, xác suất van II hoạt động tốt là

$$\mathrm{P}(B \mid A) = \frac{\mathrm{P}(BA)}{\mathrm{P}(A)} = \frac{0{,}6912}{0{,}9} = 0{,}768.$$

Chọn đáp án B .... □

Dạng II. Câu trắc nghiệm đúng sai

Trong mỗi ý **a)**, **b)**, **c)**, **d)** *ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.*

Câu 11. Cho tập hợp A gồm 20 số nguyên dương không vượt quá 20.

a) Số cách chọn 4 số nguyên dương từ tập hợp A là A_{20}^4.

b Tích của 4 số nguyên dương là số lẻ khi và chỉ khi cả 4 số là số lẻ.

c Tập hợp A có 10 số lẻ.

d) Số cách chọn ra 4 số từ tập hợp A sao cho tích của 4 số đó là số chẵn là $\mathrm{A}_{20}^4 - \mathrm{A}_{10}^4$.

Lời giải.

a) **Sai**.

Số cách chọn 4 số nguyên dương từ tập hợp A là C_{20}^4.

b) **Đúng**.

Vì tích giữa các số là số lẻ khi các thừa số đều là số lẻ nên tích của 4 số nguyên dương là số lẻ khi và chỉ khi cả 4 số là số lẻ.

c) **Đúng**.

Trong tập A gồm 20 số nguyên dương không vượt quá 20 có 10 số lẻ.

d) **Sai**.

Vì tập hợp A có 10 số lẻ nên có số cách chọn 4 số lẻ từ tập hợp A là C_{10}^4.

Khi đó, số cách chọn ra 4 số từ tập hợp A sao cho tích của 4 số đó là số chẵn là $\mathrm{C}_{20}^4 - \mathrm{C}_{10}^4$.

Chọn đáp án | a sai | b đúng | c đúng | d sai | .... □

Câu 12. Cho tập hợp A gồm tất cả các chữ số.

a) Tập hợp A có 10 phần tử là $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$.

b) Số các tập con gồm 6 phần tử của A là A_{10}^{6}.

c) Với mỗi tập con gồm 6 phần tử của A thì có đúng một cách sắp xếp các phần tử theo thứ tự giảm dần.

d) Có A_{10}^{6} số gồm 6 chữ số có dạng $\overline{abcdeg}$ thỏa mãn $a > b > c > d > e > g$.

Lời giải.

a) **Đúng**.

Ta có: $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$.

b) **Sai**.

Số tập con gồm 6 phần tử của A là C_{10}^{6}.

c) **Đúng**.

Vì với mỗi tập con gồm 6 phần tử của A thì có đúng một cách sắp xếp các phần tử theo thứ tự giảm dần.

d) **Sai**.

Mỗi cách lấy 6 trong 10 chữ số từ tập A thì chỉ có thể viết được một số duy nhất thỏa mãn nên có C_{10}^{6} số gồm 6 chữ số có dạng $\overline{abcdeg}$ thỏa mãn $a > b > c > d > e > g$.

Chọn đáp án | a đúng | b sai | c đúng | d sai | . . . . □

Câu 13. Lớp 12A có 40 học sinh, trong đó có 30 học sinh giỏi môn Toán, 35 học sinh giỏi môn Tiếng Anh, 25 học sinh giỏi cả hai môn. Chọn ngẫu nhiên 1 học sinh. Xét các biến cố:

A : "Học sinh được chọn giỏi môn Toán";

B : "Học sinh được chọn giỏi môn Tiếng Anh".

a) $\mathrm{P}(A) = 0{,}75$.

b) $\mathrm{P}(B) = 0{,}875$.

c) $\mathrm{P}(A \cap B) = 0{,}625$.

d) $\mathrm{P}(A \cup B) = 1$.

Lời giải.

a) **Đúng**.

Vì $\mathrm{P}(A) = \dfrac{30}{40} = 0{,}75$.

b) **Đúng**.

Vì $\mathrm{P}(B) = \dfrac{35}{40} = 0{,}875$.

c) **Đúng**.

Vì $\mathrm{P}(A \cap B) = \dfrac{25}{40} = 0{,}625$.

d) **Đúng**.

Vì $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}\big(A \cap B\big) = 0{,}75 + 0{,}875 - 0{,}625 = 1$.

Chọn đáp án $\boxed{\text{a đúng}}\boxed{\text{b đúng}}\boxed{\text{c đúng}}\boxed{\text{d đúng}}$ .... □

Câu 14. Hai xạ thủ An và Bình bắn vào cùng một mục tiêu ở hai thời điểm khác nhau với xác suất bắn trúng mục tiêu lần lượt là 0,6 và 0,7. Xét các biến cố:

A : "Xạ thủ An bắn trúng mục tiêu";

B : "Xạ thủ Bình bắn trúng mục tiêu".

a) $\mathrm{P}\big(\overline{A}\big) = 0{,}6; \mathrm{P}\big(\overline{B}\big) = 0{,}7$.

$\boxed{\textbf{b}}$ Hai biến cố $\overline{A}, \overline{B}$ là độc lập.

c) Xác suất cả hai xạ thủ đều không bắn trúng mục tiêu là 0,42.

d) Xác suất cả hai xạ thủ đều bắn trúng mục tiêu là 0,58.

Lời giải.

Ta có: $\mathrm{P}(A) = 0{,}6$; $\mathrm{P}(B) = 0{,}7$; $\mathrm{P}\big(\overline{A}\big) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$; $\mathrm{P}\big(\overline{B}\big) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$.

Vì hai xạ thủ bắn ở hai thời điểm khác nhau nên các cặp biến cố A và B, $\overline{A}$ và $\overline{B}$ là độc lập.

Khi đó $\mathrm{P}\big(A \cap B\big) = 0{,}6 \cdot 0{,}7 = 0{,}42$ và $\mathrm{P}\big(\overline{A} \cap \overline{B}\big) = 0{,}4 \cdot 0{,}3 = 0{,}12$.

Chọn đáp án $\boxed{\text{a sai}}\boxed{\text{b đúng}}\boxed{\text{c sai}}\boxed{\text{d sai}}$ .... □

Câu 15. Một lớp học có 17 học sinh nam và 24 học sinh nữ. Cô giáo gọi ngẫu nhiên lần lượt 2 học sinh (có thứ tự) lên trả lời câu hỏi. Xét các biến cố:

A: "Lần thứ nhất cô giáo gọi 1 học sinh nam";

B: "Lần thứ hai cô giáo gọi 1 học sinh nữ".

a) $\mathrm{P}(B \mid A) = 0{,}575$. **b)** $\mathrm{P}\big(B \mid \overline{A}\big) = 0{,}6$. **c)** $\mathrm{P}\big(\overline{B} \mid A\big) = 0{,}425$. **d)** $\mathrm{P}\big(\overline{B} \mid \overline{A}\big) = 0{,}4$.

Lời giải.

a) **Sai**.

Biến cố $A \cap B$: "Lần thứ nhất cô giáo gọi 1 học sinh nam và lần thứ hai cô giáo gọi 1 học sinh nữ".

Xác suất xảy ra biến cố $A \cap B$ là $\mathrm{P}\big(A \cap B\big) = \dfrac{17 \cdot 24}{\mathrm{C}_{41}^{2}}$.

Xác suất xảy ra biến cố A là $\mathrm{P}\big(A\big) = \dfrac{17 \cdot 16 + 17 \cdot 24}{\mathrm{C}_{41}^{2}}$ (tương ứng với hai trường hợp nam - nam và nam - nữ).

Vậy $\mathrm{P}(B \mid A) = \dfrac{\mathrm{P}\big(A \cap B\big)}{\mathrm{P}(A)} = \dfrac{17 \cdot 24}{17 \cdot 16 + 17 \cdot 24} = \dfrac{3}{5} = 0{,}6$.

b) **Sai**.

Ta có biến cố $\overline{A}$: "Lần thứ nhất cô giáo gọi 1 học sinh nữ".

Vậy biến cố $\overline{A} \cap B$: "Hai học sinh gọi lên đều là nữ".

Ta có $\mathrm{P}\big(\overline{A} \cap B\big) = \dfrac{24 \cdot 23}{\mathrm{C}_{41}^{2}}$.

Xác suất xảy ra biến cố $\overline{A}$ là $\mathrm{P}\big(\overline{A}\big) = \dfrac{24 \cdot 17 + 24 \cdot 23}{\mathrm{C}_{41}^{2}}$ (tương ứng với hai trường hợp nữ - nữ và nữ - nam).

Vậy $\mathrm{P}\left(B \mid \overline{A}\right) = \dfrac{\mathrm{P}\left(\overline{A} \cap B\right)}{\mathrm{P}\left(\overline{A}\right)} = \dfrac{24 \cdot 23}{24 \cdot 17 + 24 \cdot 23} = \dfrac{23}{40} = 0{,}575$.

c) **Sai**.

Ta có biến cố $\overline{B}$: "Lần thứ hai cô giáo gọi 1 học sinh nam".

Vậy biến cố $\overline{B} \cap A$: "Hai học sinh gọi lên đều là nam".

Ta có $\mathrm{P}\left(\overline{B} \cap A\right) = \dfrac{17 \cdot 16}{\mathrm{C}_{41}^2}$.

Vậy $\mathrm{P}\left(\overline{B} \mid A\right) = \dfrac{\mathrm{P}\left(A \cap \overline{B}\right)}{\mathrm{P}(A)} = \dfrac{17 \cdot 16}{17 \cdot 16 + 17 \cdot 24} = \dfrac{2}{5} = 0{,}4$.

d) **Sai**.

Vậy biến cố $\overline{A} \cap \overline{B}$: "Lần thứ nhất cô giáo gọi 1 học sinh nữ và lần thứ hai cô giáo gọi 1 học sinh nam".

Ta có $\mathrm{P}\left(\overline{A} \cap \overline{A}\right) = \dfrac{24 \cdot 17}{\mathrm{C}_{41}^2}$.

Vậy $\mathrm{P}\left(\overline{B} \mid \overline{A}\right) = \dfrac{\mathrm{P}\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right)}{\mathrm{P}\left(\overline{A}\right)} = \dfrac{24 \cdot 17}{24 \cdot 17 + 24 \cdot 23} = \dfrac{17}{40} = 0{,}425$.

Chọn đáp án | a sai | b sai | c sai | d sai | ………………………………………… □

Câu 16. Gieo một xúc xắc cân đối và đồng chất 1 lần. Xét các biến cố:

A: "Mặt xuất hiện của xúc xắc ghi số 5";

B: "Mặt xuất hiện của xúc xắc ghi số lẻ".

a) $\mathrm{P}(A) = \dfrac{5}{6}$. **b** $\mathrm{P}(A \cap B) = \dfrac{1}{6}$. **c** $\mathrm{P}(B \mid A) = 1$. **d)** $\mathrm{P}(A \mid B) = \dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

a) **Sai**.

Không gian mẫu là 6.

Số kết quả thuận lợi cho biến cố A là 1.

Vậy $\mathrm{P}(A) = \dfrac{1}{6}$.

b) **Đúng**.

Số kết quả thuận lợi cho biến cố B là 3.

Số kết quả thuận lợi cho biến cố $A \cap B$ là 1 (ứng với mặt xuất hiện ghi số 5).

Vậy $\mathrm{P}(A \cap B) = \dfrac{1}{6}$.

c) **Đúng**.

Ta có $\mathrm{P}(B \mid A) = \dfrac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(A)} = 1$.

d) **Sai**.

Xác suất xảy ra biến cố B là $\mathrm{P}\left(B\right) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$.

Vậy $\mathrm{P}(A \mid B) = \dfrac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)} = \dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{3}$.

Chọn đáp án | a sai | b đúng | c đúng | d sai | .... □

Câu 17. Trong một hộp có 10 quả bóng màu xanh và 12 quả bóng màu đỏ, các quả bóng có khối lượng và kích thước như nhau. Bạn Tuấn lấy ngẫu nhiên lần lượt 2 quả bóng, mỗi lần lấy 1 quả và không hoàn lại. Xét các biến cố:

A: "Lần thứ nhất lấy được quả bóng màu xanh";

B: "Lần thứ hai lấy được quả bóng màu xanh".

a) $\mathrm{P}(A) = \dfrac{5}{11}$. **b)** $\mathrm{P}(B \mid A) = \dfrac{10}{21}$. **c)** $\mathrm{P}\left(B \mid \overline{A}\right) = \dfrac{3}{7}$. **d)** $\mathrm{P}(B) = \dfrac{5}{11}$.

Lời giải.

a) Đúng.

Số kết quả thuận lợi cho biến cố A là $n(A) = 10 \cdot 9 + 10 \cdot 12$.

Không gian mẫu là $n(\Omega) = 22 \cdot 21$.

Vậy $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{10 \cdot 9 + 10 \cdot 12}{22 \cdot 21} = \dfrac{5}{11}$.

b) Sai.

Ta có biến cố $A \cap B$: "Cả hai lần đều lấy được quả bóng màu xanh".

Số kết quả thuận lợi cho biến cố $A \cap B$ là $n(A \cap B) = 10 \cdot 9$.

Vậy $\mathrm{P}(B \mid A) = \dfrac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(A)} = \dfrac{n(A \cap B)}{n(A)} = \dfrac{10 \cdot 9}{10 \cdot 9 + 10 \cdot 12} = \dfrac{3}{7}$.

c) Sai.

Ta có biến cố $\overline{A} \cap B$: "Lần thứ nhất lấy được quả bóng màu đỏ và lần thứ hai lấy được quả bóng màu xanh".

Số kết quả thuận lợi cho biến cố $\overline{A} \cap B$ là $n\left(\overline{A} \cap B\right) = 12 \cdot 10$.

Số kết quả thuận lợi cho biến cố $\overline{A}$ là $n\left(\overline{A}\right) = 12 \cdot 10 + 12 \cdot 11$ (ứng với hai trường hợp đỏ - xanh và đỏ - đỏ).

Vậy $\mathrm{P}\left(B \mid \overline{A}\right) = \dfrac{\mathrm{P}\left(\overline{A} \cap B\right)}{\mathrm{P}\left(\overline{A}\right)} = \dfrac{n\left(\overline{A} \cap B\right)}{n\left(\overline{A}\right)} = \dfrac{12 \cdot 10}{12 \cdot 10 + 12 \cdot 11} = \dfrac{10}{21}$.

d) Đúng.

Số kết quả thuận lợi cho biến cố B là $n(B) = 12 \cdot 10 + 10 \cdot 9$ (ứng với hai trường hợp đỏ - xanh và xanh - xanh).

Vậy $\mathrm{P}(B) = \dfrac{12 \cdot 10 + 10 \cdot 9}{22 \cdot 21} = \dfrac{5}{11}$.

Chọn đáp án | a đúng | b sai | c sai | d đúng | .... □

Câu 18. Một cửa hàng có hai loại bóng đèn LED, trong đó có 65% bóng đèn LED là màu trắng và 35% bóng đèn LED là màu xanh, các bóng đèn có kích thước như nhau. Các bóng đèn LED màu trắng có tỉ lệ hỏng là 2% và các bóng đèn LED màu xanh có tỉ lệ hỏng là 3%. Một khách hàng chọn mua ngẫu nhiên 1 bóng đèn LED từ cửa hàng. Xét các biến cố:

A: "Khách hàng chọn được bóng đèn LED màu trắng";

B: "Khách hàng chọn được bóng đèn LED không hỏng".

a) $\mathrm{P}\left(\overline{A}\right) = 0{,}65$. **b)** $\mathrm{P}(B \mid A) = 0{,}02$. **c)** $\mathrm{P}\left(B \mid \overline{A}\right) = 0{,}3$. **d)** $\mathrm{P}(B) = 0{,}9765$.

Lời giải.

a) **Sai**.

Xác suất khách hàng chọn được bóng đèn LED màu trắng là $\mathrm{P}(A) = 0{,}65$.

Biến cố $\overline{A}$: "Khách hàng chọn được bóng đèn LED màu trắng".

Xác suất xảy ra biến cố $\overline{A}$ là $\mathrm{P}\left(A\right) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}65 = 0{,}35$.

b) **Sai**.

Ta có $\mathrm{P}(B \mid A) = 1 - \mathrm{P}\left(\overline{B} \mid A\right) = 1 - 0{,}02 = 0{,}98$.

c) **Sai**.

Ta có $\mathrm{P}\left(B \mid \overline{A}\right) = 1 - \mathrm{P}\left(\overline{B} \mid \overline{A}\right) = 1 - 0{,}03 = 0{,}97$.

d) **Đúng**.

Theo công thức xác suất toàn phần ta có

$$\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B \mid A) + \mathrm{P}\left(\overline{A}\right) \cdot \mathrm{P}\left(B \mid \overline{A}\right) = 0{,}65 \cdot 0{,}98 + 0{,}35 \cdot 0{,}97 = 0{,}9765.$$

Chọn đáp án | a sai | b sai | c sai | d đúng | .... □

Câu 19. Một kho hàng có 85% sản phẩm loại I và 15% sản phẩm loại II, trong đó có 1% sản phẩm loại I bị hỏng, 4% sản phẩm loại II bị hỏng. Các sản phẩm có kích thước và hình dạng như nhau. Một khách hàng chọn ngẫu nhiên 1 sản phẩm. Xét các biến cố:

A: "Khách hàng chọn được sản phẩm loại I";

B: "Khách hàng chọn được sản phẩm không bị hỏng".

a) $\mathrm{P}(A) = 0{,}85$. **b)** $\mathrm{P}(B \mid A) = 0{,}99$. **c)** $\mathrm{P}(B) = 0{,}9855$. **d)** $\mathrm{P}(A \mid B) = 0{,}95$.

Lời giải.

a) **Đúng**.

Vì kho hàng có 85% sản phẩm loại I nên $\mathrm{P}(A) = 0{,}85$.

b) **Đúng**.

Vì kho hàng có 1% sản phẩm loại I bị hỏng nên $\mathrm{P}(B \mid A) = 1 - \mathrm{P}\left(\overline{B} \mid A\right) = 1 - 0{,}01 = 0{,}99$.

c) **Đúng**.

Vì $\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B \mid A) + \mathrm{P}\left(\overline{A}\right) \cdot \mathrm{P}\left(B \mid \overline{A}\right) = 0{,}85 \cdot 0{,}99 + 0{,}15 \cdot 0{,}96 = 0{,}9855$.

d) **Sai**.

Theo công thức Bayes ta có

$$\mathrm{P}(A \mid B) = \frac{\mathrm{P}\left(A\right) \cdot \mathrm{P}\left(B \mid A\right)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{0{,}85 \cdot 0{,}99}{0{,}9855} \approx 0{,}854.$$

Chọn đáp án | a đúng | b đúng | c đúng | d sai | .... □

Câu 20. Một xưởng máy sử dụng một loại linh kiện được sản xuất từ hai cơ sở I và II. Số linh kiện do cơ sở I sản xuất chiếm 61%, số linh kiện do cơ sở II sản xuất chiếm 39%. Tỉ lệ linh kiện đạt tiêu chuẩn của cơ sở I, cơ sở II lần lượt là 93%, 82%. Kiểm tra ngẫu nhiên 1 linh kiện ở xưởng máy. Xét các biến cố:

A_1: "Linh kiện được kiểm tra do cơ sở I sản xuất";

A_2: "Linh kiện được kiểm tra do cơ sở II sản xuất";

B: "Linh kiện được kiểm tra đạt tiêu chuẩn".

a) $\mathrm{P}(A_1) = 0{,}39$. **b** $\mathrm{P}(B \mid A_2) = 0{,}82$. **c** $\mathrm{P}(B) = 0{,}8871$. **d)** $\mathrm{P}(A_1 \mid B) = 0{,}55$.

Lời giải.

a) Sai.

Vì số linh kiện do cơ sở I sản xuất chiếm 61% nên $\mathrm{P}(A_1) = 0{,}65$.

b) Đúng.

Vì tỉ lệ linh kiện đạt tiêu chuẩn của cơ sở II là 82% nên $\mathrm{P}(B \mid A_2) = 0{,}82$.

c) Đúng.

Theo công thức xác suất toàn phần ta có

$$\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(A_1)\cdot\mathrm{P}(B \mid A_1) + \mathrm{P}(A_2)\cdot\mathrm{P}(B \mid A_2) = 0{,}61\cdot 0{,}93 + 0{,}39\cdot 0{,}82 = 0{,}8871.$$

d) Sai.

Theo công thức Bayes ta có

$$\mathrm{P}(A_1 \mid B) = \frac{\mathrm{P}(A_1)\cdot\mathrm{P}(B \mid A_1)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{0{,}65\cdot 0{,}93}{0{,}8871} \approx 0{,}64.$$

Chọn đáp án | a sai | b đúng | c đúng | d sai | .... □

Dạng III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 21. Có bao nhiêu cách xếp 4 bạn nam và 4 bạn nữ vào một hàng dọc sao cho 2 bạn nam bất kì không đứng liền nhau và 2 bạn nữ bất kì không đứng liền nhau? Đáp án: 1 152

Lời giải.

Theo yêu cầu bài toán: 2 bạn nam bất kì không đứng liền nhau và 2 bạn nữ bất kì không đứng liền nhau do đó, nam và nữ phải đứng xen kẽ nhau.

Ta xét hai trường hợp:

- **Trường hợp 1.** Bạn nam đứng đầu hàng

  Xếp 4 bạn nam vào 4 vị trí 1; 3; 5; 7 có $4! = 24$ cách xếp 4 bạn nam.

  Có $4! = 24$ cách xếp 4 bạn nữ vào 4 vị trí còn lại.

  Khi đó số cách sắp xếp là $24\cdot 24 = 576$ cách.

- **Trường hợp 2.** Bạn nữ đứng đầu hàng, tương tự **trường hợp 1**, suy ra có 576 cách sắp xếp.

Vậy có $576 + 576 = 1\,152$ cách sắp xếp thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 22. Có bao nhiêu cách lập một mật khẩu là một dãy 8 kí tự, mỗi kí tự là một chữ số mà số 1 xuất hiện 3 lần, số 2 xuất hiện 3 lần, số 3 xuất hiện 2 lần? Đáp án: 560

Lời giải.

Chọn 3 vị trí trong 8 vị trí ban đầu đặt 3 chữ số 1 có C_8^3 cách.

Chọn 3 vị trí trong 5 vị trí còn lại đặt chữ số 2 có C_5^3 cách.

Chọn 2 vị trí còn lại đặt chữ số 3 có 1 cách.

Vậy số cách lập mật khẩu là $\mathrm{C}_8^3 \cdot \mathrm{C}_5^3 \cdot 1 = 560$ mật khẩu.

Câu 23. Một bộ bài tú lơ khơ gồm 52 quân bài, trong đó có 13 tứ quý (mỗi tứ quý là một bộ 4 quân bài cùng giá trị, ví dụ 4 quân Át, 4 quân K, ...). Rút ngẫu nhiên 6 quân bài. Xác suất rút được 6 quân bài bao gồm 1 tứ quý và 2 quân bài còn lại ở 2 tứ quý khác nhau là $\dfrac{a}{b}$ với $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Giá trị của a là bao nhiêu? Đáp án: 132

Lời giải.

Rút ngẫu nhiên 6 quân bài trong 52 quân bài có C_{52}^6.

Suy ra $n(\Omega) = \mathrm{C}_{52}^6 = 195\,755$.

Gọi biến cố A: "Rút được 6 quân bài bao gồm 1 tứ quý và 2 quân bài còn lại ở 2 tứ quý khác nhau".

Khi đó, cần chọn 3 bộ tứ quý cho kết quả thuận lợi của biến cố A có C_{13}^3 cách chọn.

Trong ba bộ tứ quý đó thì chọn 1 bộ để lấy đủ 4 quân bài có 3 cách chọn.

Hai bộ còn lại thì lấy ở mỗi bộ 1 quân bài có $4 \cdot 4 = 16$ cách chọn.

Suy ra, $n(A) = \mathrm{C}_{13}^3 \cdot 3 \cdot 16 = 132$.

Suy ra, $\mathrm{P}(A) = \dfrac{132}{195\,755}$.

Vậy $a = 132$.

Câu 24. Hai bạn Hải và Bình cùng tham dự một kì thi trắc nghiệm, vòng 1 thi Toán, vòng 2 thi Tiếng Anh. Mỗi vòng thi có 8 mã đề được đánh số từ 1 đến 8. Mỗi bạn phải bốc thăm ngẫu nhiên 1 đề Toán và 1 đề Tiếng Anh. Xét biến cố A: "Hai bạn có chung mã đề ở duy nhất một vòng thi". Xác suất của biến cố A là $\dfrac{a}{b}$ với a, b là các số tự nhiên khác 0, $b < 50$. Giá trị của $a + b$ là bao nhiêu?

Đáp án: 39

Lời giải.

Số cách chọn đề ngẫu nhiên của bạn Hải là 8^2.

Sau đó bạn Bình chọn tiếp, có số cách chọn bằng 8^2.

Suy ra không gian mẫu có số phần tử là 8^4.

Xét biến cố A: "Hai bạn có chung mã đề ở duy nhất một vòng thi".

Giả sử hai bạn chung mã đề ở vòng 1, khác mã đề ở vòng 2 thì số cách bốc thăm là $8\mathrm{A}_8^2$.

Nếu hai bạn chung mã đề ở vòng 2, khác mã đề ở vòng 1 thì số cách bốc thăm cũng là $8\mathrm{A}_8^2$.

Khi đó, số kết quả thuận lợi của biến cố A là $16\mathrm{A}_8^2$.

Xác suất của biến cố A là

$$\mathrm{P}(A) = \frac{16\mathrm{A}_8^2}{8^4} = \frac{7}{32}.$$

Suy ra $a = 7$; $b = 32$.

Vậy $a + b = 39$.

Câu 25. Câu lạc bộ văn nghệ của trường Giải Phóng có 40 bạn đều biết chơi ít nhất một trong hai loại đàn là organ và guitar, trong đó có 27 bạn biết chơi đàn organ, 25 bạn biết chơi đàn guitar. Chọn ngẫu nhiên 1 bạn. Xác suất chọn được bạn biết chơi đàn organ, biết bạn đó chơi được đàn guitar, là bao nhiêu? Đáp án: 0,48

Lời giải.

Xét các biến cố sau: biến cố A: "Chọn được bạn biết chơi đàn organ";

Biến cố B: "Chọn được bạn biết chơi đàn guitar".

Khi đó, $\mathrm{P}(A) = \dfrac{27}{40} = 0{,}675$; $\mathrm{P}(B) = \dfrac{25}{40} = 0{,}625$; $\mathrm{P}(A \cup B) = 1$.

Suy ra

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cup B) = 0{,}675 + 0{,}625 - 1 = 0{,}3.$$

Vậy xác suất chọn được bạn biết chơi đàn organ, biết bạn đó chơi được đàn guitar, là

$$\mathrm{P}(A \mid B) = \frac{\mathrm{P}\left(A \cap B\right)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{0{,}3}{0{,}625} = 0{,}48.$$

Câu 26. Lớp 12A có 37 học sinh, trong đó có 15 học sinh thích môn Tin học, 20 học sinh thích môn Tiếng Anh, 10 học sinh không thích môn nào trong hai môn trên. Chọn ngẫu nhiên 1 học sinh. Xác suất chọn được học sinh thích môn Tin học, biết học sinh đó thích môn Tiếng Anh, là bao nhiêu? Đáp án: 0,4

Lời giải.

Xét các biến cố: A: "Chọn được học sinh thích môn Tin học";

B: "Chọn được học sinh thích môn Tiếng Anh".

Khi đó, $\mathrm{P}(A) = \dfrac{15}{37}$; $\mathrm{P}(B) = \dfrac{20}{37}$; $\mathrm{P}(A \cup B) = 1 - \dfrac{10}{37} = \dfrac{27}{37}$.

Suy ra

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cup B) = \frac{15}{37} + \frac{20}{37} - \frac{27}{37} = \frac{8}{37}.$$

Vậy xác suất chọn được học sinh thích môn Tin học, biết học sinh đó thích môn Tiếng Anh, là

$$\mathrm{P}(A \mid B) = \frac{\frac{8}{37}}{\frac{20}{37}} = 0{,}4.$$

Câu 27. Có hai thùng I và II chứa các sản phẩm có khối lượng và hình dạng như nhau. Thùng I có 5 chính phẩm và 4 phế phẩm, thùng 2 có 6 chính phẩm và 8 phế phẩm. Lấy ngẫu nhiên 1 sản phẩm từ thùng I sang thùng II. Sau đó, lấy ngẫu nhiên 1 sản phẩm từ thùng II để sử dụng. Xác suất lấy được chính phẩm từ thùng II là bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)? Đáp án: 0,44

Lời giải.

Xét các biến cố A: "Lấy được 1 chính phẩm từ thùng I sang thùng II"; B: "Lấy được 1 chính phẩm từ thùng II".

Khi đó,

$$\mathrm{P}(A)=\frac{5}{9}; \mathrm{P}(\overline{A})=\frac{4}{9}; \mathrm{P}(B \mid A)=\frac{7}{15}; \mathrm{P}(B \mid \overline{A})=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}.$$

Theo công thức xác suất toàn phần, xác suất của biến cố B là

$$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B \mid A)+\mathrm{P}(\overline{A}) \cdot \mathrm{P}(B \mid \overline{A})=\frac{5}{9} \cdot \frac{7}{15}+\frac{4}{9} \cdot \frac{2}{5} \approx 0{,}44.$$

Câu 28. Tỉ lệ bị bệnh cúm tại một địa phương bằng 0,25. Khi thực hiện xét nghiệm chẩn đoán, nếu người có bệnh cúm thì khả năng phản ứng dương tính là 96%, nếu người không bị bệnh cúm thì khả năng phản ứng dương tính 8%. Chọn ngẫu nhiên 1 người tại địa phương đó. Xác suất người được chọn có phản ứng dương tính là bao nhiêu? Đáp án: 0,3

Lời giải.

Xét các biến cố A: "Chọn được người bị bệnh cúm"; B: "Chọn được người có phản ứng dương tính".
Khi đó, $\mathrm{P}(A)=0{,}25$; $\mathrm{P}(\overline{A})=0{,}75$; $\mathrm{P}(B \mid A)=0{,}96$; $\mathrm{P}(B \mid \overline{A})=0{,}08$.
Theo công thức xác suất toàn phần, xác suất của biến cố B là

$$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B \mid A)+\mathrm{P}(\overline{A}) \cdot \mathrm{P}(B \mid \overline{A})=0{,}25 \cdot 0{,}96+0{,}75 \cdot 0{,}08=0{,}3.$$

Câu 29. Thực hiện khảo sát tại một địa phương mà số trẻ em nam gấp 1,5 lần số trẻ em nữ, có 8% số trẻ em nam bị hen phế quản, 5% số trẻ em nữ bị hen phế quản. Chọn ngẫu nhiên 1 trẻ em. Giả sử trẻ em được chọn bị hen phế quản. Xác suất chọn được trẻ em nam là bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)? Đáp án: 0,7

Lời giải.

Xét các biến cố A: "Chọn được trẻ em nam"; B: "Chọn được trẻ em bị hen phế quản".
Khi đó, $\mathrm{P}(A)=\frac{1{,}5}{1+1{,}5}=0{,}6$; $\mathrm{P}(\overline{A})=0{,}4$; $\mathrm{P}(B \mid A)=0{,}08$; $\mathrm{P}(B \mid \overline{A})=0{,}05$.
Theo công thức xác suất toàn phần, ta có

$$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B \mid A)+\mathrm{P}(\overline{A}) \cdot \mathrm{P}(B \mid \overline{A})=0{,}6 \cdot 0{,}08+0{,}4 \cdot 0{,}05=0{,}068.$$

Theo công thức Bayes, xác suất chọn được trẻ em nam, biết trẻ em đó bị hen phế quản là

$$\mathrm{P}(A \mid B)=\frac{\mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B \mid A)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{0{,}6 \cdot 0{,}08}{0{,}068} \approx 0{,}7.$$

Câu 30. Trường Bình Phúc có 20% học sinh tham gia câu lạc bộ âm nhạc, trong số học sinh đó có 85% học sinh biết chơi đàn guitar. Ngoài ra, có 10% số học sinh không tham gia câu lạc bộ âm nhạc cũng biết chơi đàn guitar. Chọn ngẫu nhiên 1 học sinh của trường. Giả sử học sinh đó biết chơi đàn guitar. Xác suất chọn được học sinh thuộc câu lạc bộ âm nhạc là bao nhiêu?

Đáp án: 0,68

Lời giải.

Xét các biến cố A: "Chọn được học sinh thuộc câu lạc bộ âm nhạc";

B: "Chọn được học sinh biết chơi đàn guitar".

Khi đó, $\mathrm{P}(A) = 0{,}2$; $\mathrm{P}\left(\overline{A}\right) = 0{,}8$; $\mathrm{P}(B \mid A) = 0{,}85$; $\mathrm{P}\left(B \mid \overline{A}\right) = 0{,}1$.

Theo công thức xác suất toàn phần, ta có

$$\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B \mid A) + \mathrm{P}\left(\overline{A}\right) \cdot \mathrm{P}\left(B \mid \overline{A}\right) = 0{,}2 \cdot 0{,}85 + 0{,}8 \cdot 0{,}1 = 0{,}25.$$

Theo công thức Bayes, xác suất chọn được học sinh thuộc câu lạc bộ âm nhạc, biết học sinh đó chơi được đàn guitar, là

$$\mathrm{P}(A \mid B) = \frac{\mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B \mid A)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}85}{0{,}25} = 0{,}68.$$

BẢNG ĐÁP ÁN

PHẦN I.

Câu 1. C	Câu 2. D	Câu 3. B	Câu 4. C	Câu 5. A	Câu 6. D
Câu 7. D	Câu 8. B	Câu 9. C	Câu 10. B		

PHẦN II.

Câu 11. a S b Đ c Đ d S	Câu 12. a Đ b S c Đ d S
Câu 13. a Đ b Đ c Đ d Đ	Câu 14. a S b Đ c S d S
Câu 15. a S b S c S d S	Câu 16. a S b Đ c Đ d S
Câu 17. a Đ b S c S d Đ	Câu 18. a S b S c S d Đ
Câu 19. a Đ b Đ c Đ d S	Câu 20. a S b Đ c Đ d S

PHẦN III.

Câu 21. 1 152	Câu 22. 560	Câu 23. 132	Câu 24. 39	Câu 25. 0,48	Câu 26. 0,4
Câu 27. 0,44	Câu 28. 0,3	Câu 29. 0,7	Câu 30. 0,68		

Phần II

MỘT SỐ ĐỀ MINH HỌA

ĐỀ MINH HỌA

Biên soạn: Nhóm VN-Maths & LATEX

CHƯƠNG TRÌNH GIÁO DỤC THPT 2018

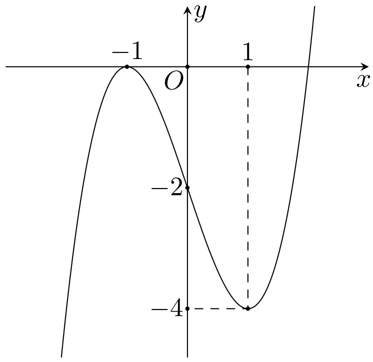
Môn: TOÁN

Thời gian làm bài: 90 phút (không kể phát đề)

Họ và tên thí sinh: .... *Số báo danh:* .... **Mã đề: 001**

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ lựa chọn một phương án.

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho là



A. $(-1; 0)$.

B. $(1; 0)$.

C. $(2; 0)$.

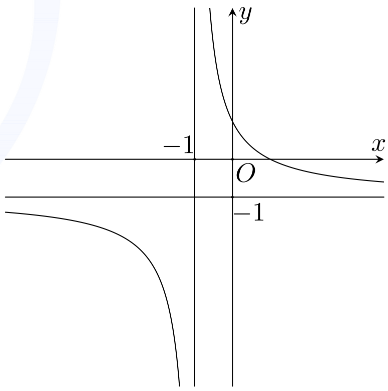
D. $(1; -4)$.

Lời giải.

Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho là $(1; -4)$.

Chọn đáp án D .... □

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như vẽ bên. Đường thẳng nào sau đây là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho?



A. $x = 1$.

B. $x = -1$.

C. $y = 1$.

D. $y = -1$.

Lời giải.

Đường thẳng $y = -1$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.

Chọn đáp án D .... □

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y = x^3$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. $f(x) = \dfrac{x^4}{4} + C$.

B. $f(x) = 3x^2$.

C. $f(x) = 4x^3$.

D. $f(x) = \dfrac{x^4}{4}$.

Lời giải.

Hàm số $f(x) = \dfrac{x^4}{4}$ là một nguyên hàm của hàm số $y = x^3$ vì $f'(x) = x^3$.

Chọn đáp án D .... □

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, phương trình nào sau đây là phương trình tổng quát của mặt phẳng?

A. $2x + y^2 + z + 1 = 0$. **B.** $x^2 + y + z + 2 = 0$.

C. $2x + y + z + 3 = 0$. **D.** $2x + y + z^2 + 4 = 0$.

Lời giải.

Phương trình $2x + y + z + 3 = 0$ là phương trình tổng quát của mặt phẳng.

Chọn đáp án C .... □

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, phương trình nào sau đây là phương trình chính tắc của đường thẳng?

A. $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-1}{z} = \dfrac{z-5}{4}$. **B.** $\dfrac{x-9}{7} = \dfrac{y-8}{-1} = \dfrac{z-6}{-2}$.

C. $\dfrac{x-6}{3} = \dfrac{y-3}{4} = \dfrac{z-5}{z}$. **D.** $\dfrac{x-1}{y} = \dfrac{y-2}{5} = \dfrac{z-3}{4}$.

Lời giải.

Phương trình $\dfrac{x-9}{7} = \dfrac{y-8}{-1} = \dfrac{z-6}{-2}$ là phương trình chính tắc của đường thẳng.

Chọn đáp án B .... □

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, phương trình nào sau đây là phương trình mặt cầu?

A. $(x^2-8)^2 + (y-12)^2 + (z-24)^2 = 9^2$. **B.** $(x-9)^2 + (y^2-10)^2 + (z-11)^2 = 12^2$.

C. $(x-13)^2 + (y-24)^2 - (z-36)^2 = 7^2$. **D.** $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 5^2$.

Lời giải.

Phương trình $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 5^2$ là phương trình mặt cầu.

Chọn đáp án D .... □

Câu 7. Cho hai biến cố A và B. Xác suất của biến cố A với điều kiện biến cố B đã xảy ra được gọi là xác suất của A với điều kiện B, kí hiệu là $\mathrm{P}(A|B)$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. Nếu $\mathrm{P}(A) > 0$ thì $\mathrm{P}(A|B) = \dfrac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(A)}$.

B. Nếu $\mathrm{P}(B) > 0$ thì $\mathrm{P}(A|B) = \dfrac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}$.

C. Nếu $\mathrm{P}(A \cap B) > 0$ thì $\mathrm{P}(A|B) = \dfrac{\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(A \cap B)}$.

D. Nếu $\mathrm{P}(A \cap B) > 0$ thì $\mathrm{P}(A|B) = \dfrac{\mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(A \cap B)}$.

Lời giải.

Phát biểu "Nếu $\mathrm{P}(B) > 0$ thì $\mathrm{P}(A|B) = \dfrac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}$" là đúng.

Chọn đáp án B .... □

Câu 8. Xét mẫu số liệu ghép nhóm cho bởi hình vẽ. Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm đó bằng

Nhóm	Tần số
$[a_1; a_2)$	n_1
$[a_2; a_3)$	n_2
$\ldots$	$\ldots$
$[a_m; a_{m+1})$	n_m
	n

A. $a_{m+1} - a_1$. **B.** $a_{m+1} - a_m$.

C. $n_m - n_1$. **D.** $n - n_m$.

Lời giải.

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm đó là $a_{m+1} - a_1$.

Chọn đáp án (A) .... □

Câu 9. Xét mẫu số liệu ghép nhóm có tứ phân vị thứ nhất, tứ phân vị thứ hai, tứ phân vị thứ ba lần lượt là Q_1, Q_2 và Q_3. Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm đó bằng

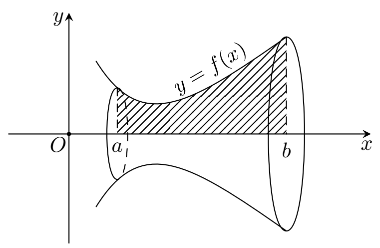
A. $Q_2 - Q_1$. **B.** $Q_3 - Q_2$. **C.** $Q_3 - Q_1$. **D.** $Q_3 - 2Q_2 + Q_1$.

Lời giải.

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm đó là $Q_3 - Q_1$.

Chọn đáp án (C) .... □

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, không âm trên đoạn $[a; b]$ như hình vẽ. Hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ quay quanh trục Ox tạo thành một khối tròn xoay có thể tích bằng



A. $V = \pi \int\limits_b^a f^2(x)\mathrm{d}x$. **B.** $V = \pi \int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

C. $V = \int\limits_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$. **D.** $V = \pi \int\limits_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Khối tròn xoay có thể tích là $V = \pi \int\limits_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án (D) .... □

Câu 11. Xét mẫu số liệu ghép nhóm có phương sai bằng 16. Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu đó bằng

A. 4. **B.** 8. **C.** 256. **D.** 32.

Lời giải.

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu đó là $\sqrt{16} = 4$.

Chọn đáp án (A) .... □

Câu 12. Chỉ số hay độ pH của một dung dịch được tính theo công thức $\mathrm{pH} = -\log[H^+]$ với $[H^+]$ là nồng độ ion hydrogen. Độ pH của một loại sữa có $[H^+] = 10^{-6{,}8}$ là bao nhiêu?

A. $-6{,}8$. **B.** 68. **C.** 6,8. **D.** 0,68.

Lời giải.

Độ pH của một loại sữa có $[H^+] = 10^{-6{,}8}$ là $\mathrm{pH} = -\log 10^{-6{,}8} = 6{,}8$.

Chọn đáp án (C) .... □

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý **a)**, **b)**, **c)**, **d)** ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng

$$\Delta_1\colon \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{-2} \text{ và } \Delta_2\colon \frac{x-4}{-1}=\frac{y-5}{-2}=\frac{z-6}{2}.$$

a) Vectơ có tọa độ $(1;2;3)$ là một vectơ chỉ phương của Δ_1.

b) Vectơ có tọa độ $(4;5;6)$ là một vectơ chỉ phương của Δ_2.

c) Côsin của góc giữa hai vectơ $\vec{u}_1=(2;1;-2)$ và $\vec{u}_2=(-1;-2;2)$ bằng $-\dfrac{8}{9}$.

d) Góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của độ) bằng 48°.

Lời giải.

a) Sai.

$\vec{u}_1=(2;1;-2)$ là một vectơ chỉ phương của Δ_1.

b) Sai.

$\vec{u}_2=(-1;-2;2)$ là một vectơ chỉ phương của Δ_2.

c) Đúng.

Côsin của góc giữa hai vectơ $\vec{u}_1=(2;1;-2)$, $\vec{u}_2=(-1;-2;2)$ là

$$\cos\left(\vec{u}_1,\vec{u}_2\right)=\frac{\vec{u}_1\cdot\vec{u}_2}{|\vec{u}_1|\cdot|\vec{u}_2|}=\frac{-8}{3\cdot 3}=-\frac{8}{9}.$$

d) Sai.

Ta có $\cos\left(\vec{u}_1,\vec{u}_2\right)=-\dfrac{8}{9}$, suy ra $\left(\vec{u}_1,\vec{u}_2\right)\approx 153^\circ$.

Vậy $(\Delta_1,\Delta_2)\approx 180^\circ-153^\circ=27^\circ$.

Chọn đáp án | a sai | b sai | c đúng | d sai | .... □

Câu 2. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2$.

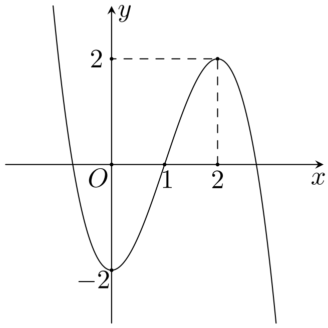
a) Đạo hàm của hàm số đã cho là $y'=3x^2-6x$.

b) Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0;2)$ và nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$.

c) Bảng biến thiên của hàm số đã cho như sau:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	-2	↗	2	↘	$-\infty$

d) Đồ thị hàm số đã cho như là đường cong trong hình sau:



Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 6x$. Phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên của hàm số đã cho như sau:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

a) **Đúng**.

Đạo hàm của hàm số đã cho là $y' = 3x^2 - 6x$.

b) **Sai**.

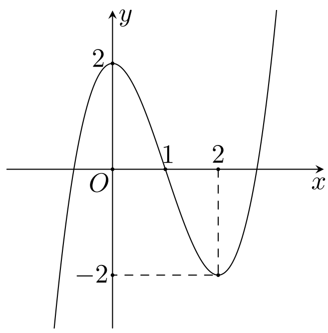
Dựa vào bảng biến thiên, ta có

- Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$, $(2; +\infty)$;
- Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.

c) **Sai**.

d) **Sai**.

Đồ thị hàm số đã cho là



Chọn đáp án | a đúng | b sai | c sai | d sai | .... □

Câu 3. Kết quả kiểm tra cân nặng (đơn vị: kg) của 20 học sinh nam lớp 12A (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị) được cho ở bảng sau:

Nhóm	$[60;64)$	$[64;68)$	$[68;72)$	$[72;76)$	$[76;80)$	
Giá trị đại diện	62	66	70	74	78	
Tần số	8	9	1	1	1	$n=20$

a) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm đã cho là 20.

b) Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm đã cho được tính bằng công thức
$$\overline{x}=\frac{8\cdot 62+9\cdot 66+1\cdot 70+1\cdot 74+1\cdot 78}{20}.$$

c) Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm đã cho là $s^2=\sqrt{\frac{436}{25}}$.

d) Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm đã cho (làm tròn đến hàng phần chục của kilôgam) là 4 kg.

Lời giải.

a) Đúng.

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm trên là
$$R=80-60=20.$$

b) Đúng.

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm đã là
$$\overline{x}=\frac{8\cdot 62+9\cdot 66+1\cdot 70+1\cdot 74+1\cdot 78}{20}.$$

c) Sai.

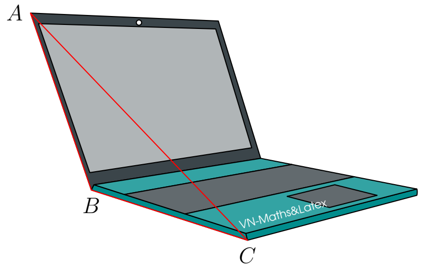
Ta có phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm đã cho là
$$s^2=\frac{1}{20}\left(8\cdot 62^2+9\cdot 66^2+1\cdot 70^2+1\cdot 74^2+1\cdot 78^2\right)-65{,}6^2=\frac{436}{25}.$$

d) Sai.

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm đã cho (làm tròn đến hàng phần mười của kilôgam) là
$$s=\sqrt{s^2}=\sqrt{\frac{436}{25}}\approx 4{,}2.$$

Chọn đáp án | a đúng | b đúng | c sai | d sai | .... □

Câu 4. Hình ảnh máy tính xách tay đang mở ở hình vẽ bên gợi nên góc nhị diện và số đo góc $\widehat{BAC}$ được gọi là độ mở của máy tính.



a) $\cos\widehat{BAC} = -\dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC}$.

b Nếu $AB = AC = 30$ cm và $BC = 30\sqrt{3}$ cm thì $\cos\widehat{BAC} = -\dfrac{1}{2}$.

c) Nếu $\cos\widehat{BAC} = -\dfrac{1}{2}$ thì $\widehat{BAC} = 60^\circ$.

d Độ mở của máy tính là 120° nếu $AB = AC = 30$ cm và $BC = 30\sqrt{3}$ cm.

Lời giải.

a) **Sai**.

Ta có

$$\cos\widehat{BAC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC}.$$

b) **Đúng**.

Nếu $AB = AC = 30$ cm và $BC = 30\sqrt{3}$ cm thì

$$\cos\widehat{BAC} = \frac{30^2 + 30^2 - (30\sqrt{3})^2}{2 \cdot 30 \cdot 30} = -\frac{1}{2}.$$

c) **Sai**.

Nếu $\cos\widehat{BAC} = -\dfrac{1}{2}$ thì $\widehat{BAC} = 120^\circ$.

d) **Đúng**.

Nếu $AB = AC = 30$ cm và $BC = 30\sqrt{3}$ thì

$$\cos\widehat{BAC} = \frac{30^2 + 30^2 - (30\sqrt{3})^2}{2 \cdot 30 \cdot 30} = -\frac{1}{2}.$$

Độ mở máy tính bằng số đo góc $\widehat{BAC} = 120^\circ$.

Chọn đáp án | a sai | b đúng | c sai | d đúng | .... □

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1. Ta coi năm lấy làm mốc để tính dân số của một vùng (hoặc một quốc gia) là năm 0. Khi đó, dân số của quốc gia đó ở năm thứ t là hàm số theo biến t được cho bởi công thức $S = Ae^{rt}$, trong đó A là dân số của vùng (hoặc quốc gia) đó ở năm 0 và r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm. Biết rằng dân số Việt Nam năm 2021 ước tính là 98 564 407 người và tỉ lệ tăng dân số hàng năm của Việt Nam là $r = 0{,}93\%$. Giả sử tỉ lệ tăng dân số hàng năm là như nhau tính từ năm 2021. Hỏi từ năm nào trở đi, dân số nước ta vượt 120 triệu người? Đáp án: 2043

Lời giải.

Coi năm 2021 làm mốc, ta có $A = 98\,564\,407$ và $r = 0{,}93\%$.

Khi đó, dân số Việt Nam tại năm thứ t là $S = A \cdot \mathrm{e}^{rt} = 98\,564\,407 \cdot \mathrm{e}^{0{,}93\% \cdot t}$.

Để dân số Việt Nam vượt 120 triệu người thì

$$98\,564\,407 \cdot \mathrm{e}^{0{,}93\% \cdot t} > 120\,000\,000 \Leftrightarrow t > \frac{\ln \frac{120\,000\,000}{98\,564\,407}}{0{,}93\%} \approx 21{,}16.$$

Suy ra giá trị nhỏ nhất của t là 22.

Vậy, kể từ năm 2043 trở đi, dân số nước ta sẽ vượt 120 triệu người.

Câu 2. Một nguồn âm phát ra sóng âm là sóng cầu. Khi gắn hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là mét). Cường độ âm chuẩn tại điểm $I(3;4;5)$ là tâm của nguồn phát âm với bán kính 10 m. Để kiểm tra một điểm ở vị trí $M(7;10;17)$ có nhận được cường độ âm phát ra tại I hay không người ta sẽ tính khoảng cách giữa hai vị trí I và M. Hỏi khoảng cách giữa hai vị trí I và M là bao nhiêu mét?

Đáp án: 14

Lời giải.

Ta có $I(3;4;5)$, $M(7;10;17)$ nên $IM = \left|\overrightarrow{IM}\right| = \sqrt{(7-3)^2 + (10-4)^2 + (17-5)^2} = 14$.

Vậy, khoảng cách giữa hai vị trí I và M là 14 mét.

Câu 3. Trong một khung lưới ô vuông gồm các hình lập phương, người ta đưa ra một cách kiểm tra bốn nút lưới (đỉnh hình lập phương) bất kì có đồng phẳng hay không bằng cách gắn hệ trục toạ độ $Oxyz$ vào khung lưới ô vuông và lập phương trình mặt phẳng đi qua ba nút lưới trong bốn nút lưới đã cho. Giả sử có ba nút lưới mà toạ độ lần lượt là $(1;1;10)$, $(4;3;1)$, $(3;2;5)$ và mặt phẳng đi qua ba nút lưới đó có phương trình $x + my + nz + p = 0$. Giá trị của $m + n + p$ là bao nhiêu?

Đáp án: -10

Lời giải.

Xét các điểm $A(1;1;10)$, $B(4;3;1)$, $C(3;2;5)$.

Khi đó, ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (3;2;-9) \\ \overrightarrow{AC} = (2;1;-5) \end{cases} \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (-1;-3;-1)$.

Gọi $\vec{n}$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C.

Ta có

$$\begin{cases} \vec{n} \perp \overrightarrow{AB} \\ \vec{n} \perp \overrightarrow{AC} \end{cases} \Rightarrow \vec{n} \text{cùng phương với } \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].$$

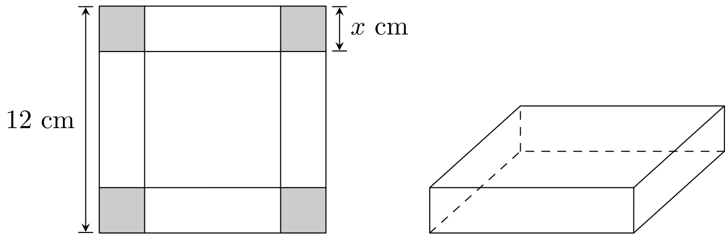
Chọn $\vec{n} = (1;3;1)$.

Suy ra phương trình của mặt phẳng đi qua ba nút lưới là

$$1 \cdot (x-1) + 3 \cdot (y-1) + 1 \cdot (z-10) = 0 \Leftrightarrow x + 3y + z - 14 = 0.$$

Vậy $m = 3$, $n = 1$, $p = -14$ nên $m + n + p = -10$.

Câu 4. Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 12 cm, người ta cắt ở bốn góc bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng x (cm), rồi gập tấm nhôm lại để được một cái hộp có dạng hình hộp chữ nhật không có nắp (tham khảo hình vẽ).



Giá trị của x bằng bao nhiêu centimét để thể tích của khối hộp đó là lớn nhất (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)? **Đáp án: 2**

Lời giải.

Ta thấy độ dài x (cm) của cạnh hình vuông bị cắt phải thoả mãn điều kiện $0 < x < 6$.

Khi đó, thể tích của khối hộp là

$$V(x) = x(12-2x)^2 = 4\left(x^3 - 12x^2 + 36x\right), (0 < x < 6).$$

Ta có $V'(x) = 4\left(3x^2 - 24x + 36\right)$.

Phương trình $V'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 24x + 36 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 6. \end{array}\right.$

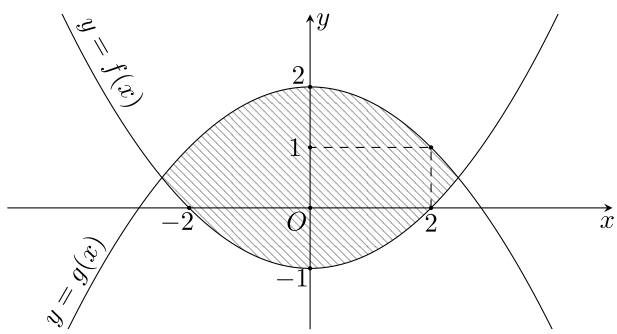
Bảng biến thiên của hàm số $V(x)$ như sau:

x	0		2		6
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$	0	$\nearrow$	128	$\searrow$	0

Từ bảng biến thiên, suy ra $\max\limits_{(0;6)} V(x) = V(2) = 128 \text{ (cm}^3)$.

Vậy để khối hộp tạo thành có thể tích lớn nhất thì $x = 2$ cm.

Câu 5. Bạn Hải nhận thiết kế logo hình con mắt (phần gạch sọc như hình vẽ) cho một cơ sở y tế: Logo là hình phẳng giới hạn bởi hai parabol $y = f(x)$ và $y = g(x)$ như hình vẽ (đơn vị trên mỗi trục toạ độ là decimét).



Bạn Hải cần tính diện tích của logo để báo giá cho cơ sở y tế đó trước khi kí hợp đồng. Diện tích của logo là bao nhiêu decimét vuông (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)? **Đáp án: 9,8**

Lời giải.

Gọi parabol $y=f(x)$ có dạng $f(x)=ax^2+bx+c$.

Parabol $y=f(x)$ nhận Oy làm trục đối xứng nên ta có $\dfrac{-b}{2a}=0 \Leftrightarrow b=0$.

Lại có đồ thị hàm số $y=f(x)$ đi qua điểm $(0;-1)$ và điểm $(2;0)$ nên $\begin{cases} a=\dfrac{1}{4} \\ c=-1. \end{cases}$

Suy ra $y=f(x)=\dfrac{1}{4}x^2-1$.

Tương tự, ta cũng có $y=g(x)=-\dfrac{1}{4}x^2+2$.

Phương trình hoành độ giao điểm của hai parabol là

$$\frac{1}{4}x^2-1=-\frac{1}{4}x^2+2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{6} \\ x=-\sqrt{6}. \end{array}\right.$$

Vậy, diện tích của logo là

$$\begin{aligned} S &= \int\limits_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} \left[\left(-\frac{1}{4}x^2+2\right)-\left(\frac{1}{4}x^2-1\right)\right] \mathrm{d}x \\ &= \int\limits_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} \left(3-\frac{1}{2}x^2\right) \mathrm{d}x = \left(3x-\frac{x^3}{6}\right)\Bigg|_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} = 4\sqrt{6} \approx 9{,}8\left(\mathrm{dm}^2\right). \end{aligned}$$

Câu 6. Một công ty dược phẩm giới thiệu một dụng cụ để kiểm tra sớm bệnh sốt xuất huyết. Về báo cáo kiểm định chất lượng của sản phẩm, họ cho biết như sau: Số người được thử là 8 000, trong số đó có 1 200 người đã bị nhiễm bệnh sốt xuất huyết và có 6 800 người không bị nhiễm bệnh sốt xuất huyết. Nhưng khi kiểm tra lại bằng dụng cụ của công ty, trong 1 200 người đã bị nhiễm bệnh sốt xuất huyết, có 70% số người đó cho kết quả dương tính, còn lại cho kết quả âm tính. Trong 6 800 người không bị nhiễm bệnh sốt xuất huyết, có 5% số người đó cho kết quả dương tính, còn lại cho kết quả âm tính. Xác suất mà một bệnh nhân với kết quả kiểm tra dương tính là bị nhiễm bệnh sốt xuất huyết bằng bao nhiêu (viết kết quả dưới dạng số thập phân và làm tròn đến hàng phần trăm)?

Đáp án: 0,71

Lời giải.

- Khi kiểm tra lại, trong 1 200 người đã bị nhiễm bệnh sốt xuất huyết, có 70% số người cho kết quả dương tính nên ta có $70\% \cdot 1\,200=840$ (người).
  Khi đó, số người bị nhiễm bệnh sốt xuất huyết cho kết quả âm tính trong số 1 200 người đó là $1\,200-840=360$ (người).

- Khi kiểm tra lại, trong 6 800 người không bị nhiễm bệnh sốt xuất huyết, có 5% số người đó cho kết quả dương tính nên ta có là $5\% \cdot 6\,800=340$ (người).
  Khi đó, số người không bị nhiễm bệnh sốt xuất huyết cho kết quả âm tính trong 6 800 người đó là $6\,800-340=6\,460$ (người).
  Từ đó, ta có bảng sau (đơn vị: người):

	Số người nhiễm bệnh	Số người không nhiễm bệnh	Tổng số
	1 200	6 800	8 000
Dương tính	840	340	1 180
Âm tính	360	6 460	6 820

- Xét các biến cố sau:
  - A: "Người được chọn ra trong số những người thử nghiệm là bị nhiễm bệnh sốt xuất huyết";
  - B: "Người được chọn ra trong số những người thử nghiệm là không bị nhiễm bệnh sốt xuất huyết";
  - C: "Người được chọn ra trong số những người thử nghiệm cho kết quả dương tính (khi kiểm tra lại)";
  - D: "Người được chọn ra trong số những người thử nghiệm cho kết quả âm tính (khi kiểm tra lại)".

Suy ra $\mathrm{P}(C) = \dfrac{1\,180}{8\,000} = \dfrac{59}{400}$ và $\mathrm{P}(AC) = \dfrac{840}{8\,000} = \dfrac{21}{200}$.

Vậy $\mathrm{P}(A \mid C) = \dfrac{21}{200} : \dfrac{59}{400} = \dfrac{42}{59} \approx 0{,}71$.

BẢNG ĐÁP ÁN

PHẦN I.

Câu 1. D	Câu 2. D	Câu 3. D	Câu 4. C	Câu 5. B	Câu 6. D
Câu 7. B	Câu 8. A	Câu 9. C	Câu 10. D	Câu 11. A	Câu 12. C

PHẦN II.

Câu 1. a S b S c Đ d S	Câu 2. a Đ b S c S d S
Câu 3. a Đ b Đ c S d S	Câu 4. a S b Đ c S d Đ

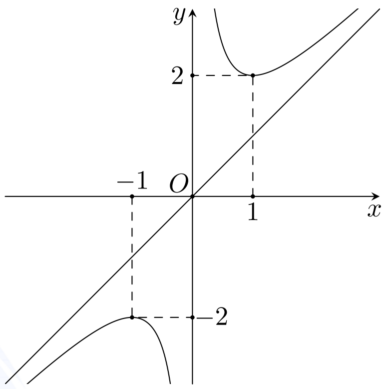
PHẦN III.

Câu 1. 2043	Câu 2. 14	Câu 3. -10	Câu 4. 2	Câu 5. 9,8	Câu 6. 0,71

Họ và tên thí sinh: .... *Số báo danh:* .... **Mã đề: 002**

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ lựa chọn một phương án.

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây?



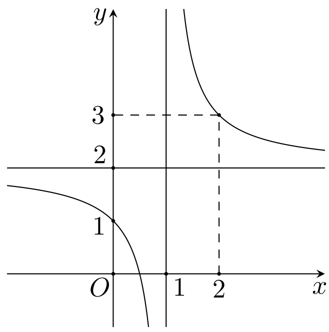
A. $(0; 1)$.
B. $(1; 2)$.
C. $(-1; 0)$.
D. $(-1; 1)$.

Lời giải.

Từ đồ thị hàm số, suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(1; 2)$.

Chọn đáp án B .... □

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Đồ thị hàm số đã cho có đường tiệm cận ngang là



A. $x = 2$.
B. $x = -2$.
C. $y = 2$.
D. $y = -2$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x \to +\infty} y = 2$ và $\lim\limits_{x \to -\infty} y = 2$.
Vậy đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số có phương trình là $y = 2$.

Chọn đáp án C .... □

Câu 3. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin x$ là

A. $-\cos x + C$.
B. $\cos x + C$.
C. $\sin x + C$.
D. $-\sin x + C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int \sin x \, \mathrm{d}x = -\cos x + C$.

Chọn đáp án A .... □

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, vectơ nào sau đây là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(P)\colon 2x - y + z + 3 = 0$?

A. $\vec{n}_1 = (2; -1; 1)$. **B.** $\vec{n}_2 = (2; 1; 1)$. **C.** $\vec{n}_3 = (2; -1; 3)$. **D.** $\vec{n}_4 = (-1; 1; 3)$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_1 = (2; -1; 1)$.

Chọn đáp án A .... □

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, phương trình nào sau đây là phương trình tham số của đường thẳng?

A. $\begin{cases} x = 2 + t^2 \\ y = 3 - t \\ z = 4 + t. \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x = 2 + y \\ y = 3 - t^2 \\ z = -4 + 2t. \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - t \\ z = t^2. \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 4 + 5t \\ z = 5 + 6t. \end{cases}$

Lời giải.

Phương trình đường thẳng có dạng $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$ với $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$.

Chọn đáp án D .... □

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-6)^2 + (y+7)^2 + (z-8)^2 = 9^2$. Tâm của mặt cầu (S) có tọa độ là

A. $(6; -7; 8)$. **B.** $(-6; 7; 8)$. **C.** $(6; 7; -8)$. **D.** $(6; 7; 8)$.

Lời giải.

Tâm của mặt cầu (S) có tọa độ là $(6; -7; 8)$.

Chọn đáp án A .... □

Câu 7. Cho hai biến cố A, B với $0 < \mathrm{P}(B) < 1$. Phát biểu nào sau đây đúng?

A. $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}\left(\overline{B}\right) \cdot \mathrm{P}(A|B) + \mathrm{P}(B) \cdot \mathrm{P}\left(A|\overline{B}\right)$. **B.** $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(B) \cdot \mathrm{P}(A|B) - \mathrm{P}\left(\overline{B}\right) \cdot \mathrm{P}\left(A|\overline{B}\right)$.

C. $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}\left(\overline{B}\right) \cdot \mathrm{P}\left(A|\overline{B}\right) - \mathrm{P}(B) \cdot \mathrm{P}(A|B)$. **D.** $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(B) \cdot \mathrm{P}(A|B) + \mathrm{P}\left(\overline{B}\right) \cdot \mathrm{P}\left(A|\overline{B}\right)$.

Lời giải.

Theo công thức xác suất toàn phần, ta có $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(B) \cdot \mathrm{P}(A|B) + \mathrm{P}\left(\overline{B}\right) \cdot \mathrm{P}\left(A|\overline{B}\right)$.

Chọn đáp án D .... □

Câu 8. Xét mẫu số liệu ghép nhóm cho ở bảng sau:

Nhóm	Giá trị đại diện	Tần số
$[a_1;\, a_2)$	x_1	n_1
$[a_2;\, a_3)$	x_2	n_2
...	...	...
$[a_m;\, a_{m+1})$	x_m	n_m
		n

Gọi $\overline{x}$ là số trung bình cộng của mẫu số liệu ghép nhóm. Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm đó được tính bằng công thức nào trong các công thức sau?

A. $s^2 = \dfrac{n_1\left(x_1 - \overline{x}\right)^2 + n_2\left(x_2 - \overline{x}\right)^2 + \cdots + n_m\left(x_m - \overline{x}\right)^2}{n}$.

B. $s=\sqrt{\dfrac{n_1\left(x_1-\overline{x}\right)^2+n_2\left(x_2-\overline{x}\right)^2+\cdots+n_m\left(x_m-\overline{x}\right)^2}{m}}$.

C. $s=\sqrt{\dfrac{n_1\left(x_1-\overline{x}\right)^2+n_2\left(x_2-\overline{x}\right)^2+\cdots+n_m\left(x_m-\overline{x}\right)^2}{n}}$.

D. $s^2=\dfrac{n_1\left(x_1-\overline{x}\right)^2+n_2\left(x_2-\overline{x}\right)^2+\cdots+n_m\left(x_m-\overline{x}\right)^2}{m}$.

Lời giải.

Công thức tính độ lệch chuẩn là

$$s=\sqrt{\frac{n_1\left(x_1-\overline{x}\right)^2+n_2\left(x_2-\overline{x}\right)^2+\cdots+n_m\left(x_m-\overline{x}\right)^2}{n}}.$$

Chọn đáp án C .... □

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, tọa độ của vectơ $\overrightarrow{k}$ là

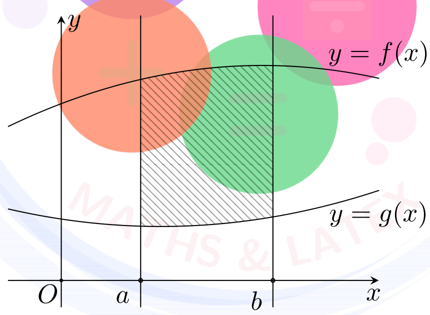
A. $(1;1;1)$. **B.** $(1;0;0)$. **C.** $(0;1;0)$. **D.** $(0;0;1)$.

Lời giải.

Trong không gian $Oxyz$, tọa độ của vectơ $\overrightarrow{k}$ là $(0;0;1)$.

Chọn đáp án D .... □

Câu 10. Cho các hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và có đồ thị như hình bên dưới. Khi đó, diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)$ và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ là



A. $S=\displaystyle\int_b^a\left|f(x)-g(x)\right|\mathrm{d}x$. **B.** $S=\displaystyle\int_a^b\left(g(x)-f(x)\right)\mathrm{d}x$.

C. $S=\displaystyle\int_b^a\left(f(x)-g(x)\right)\mathrm{d}x$. **D.** $S=\displaystyle\int_a^b\left|f(x)-g(x)\right|\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Từ hình vẽ, ta có $f(x)>g(x)$, $\forall x\in[a;b]$. Do đó $f(x)-g(x)>0$, $\forall x\in[a;b]$.

Suy ra diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)$ và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ là

$$S=\int_a^b\left|f(x)-g(x)\right|\mathrm{d}x=\int_a^b\left(f(x)-g(x)\right)\mathrm{d}x.$$

Chọn đáp án D .... □

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có một nguyên hàm là $F(x)$. Biết rằng $F(1) = 9$, $F(2) = 5$. Giá trị của biểu thức $\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. -4. **B.** 14. **C.** 4. **D.** 45.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_1^2 = F(2) - F(1) = 5 - 9 = -4$.

Chọn đáp án A .... □

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách từ điểm $I(-1;1;1)$ đến mặt phẳng $(P)\colon 2x - y + z - 16 = 0$ bằng

A. -6. **B.** 18. **C.** $3\sqrt{6}$. **D.** -18.

Lời giải.

Ta có $\mathrm{d}\big(I,(P)\big) = \dfrac{|2\cdot(-1) - 1 + 1 - 16|}{\sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 1^2}} = 3\sqrt{6}$.

Chọn đáp án C .... □

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý **a)**, **b)**, **c)**, **d)** ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x-2}{5} = \dfrac{y-1}{12} = \dfrac{z-6}{-13}$ và mặt phẳng $(P)\colon x - 2y - 2z - 2\,025 = 0$.

a) Vectơ có tọa độ $(2;1;6)$ là một vectơ chỉ phương của Δ.

b) Vectơ có toạ độ $(1;2;-2)$ là một vectơ pháp tuyến của (P).

c) Côsin của góc giữa hai vectơ $\vec{u} = (5;12;-13)$ và $\vec{n} = (1;-2;-2)$ bằng $\dfrac{7}{39\sqrt{2}}$.

d) Góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) (làm tròn đến hàng đơn vị của độ) bằng 83°.

Lời giải.

a) Sai.

Vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ là $\vec{a} = (5;12;-13)$, vectơ có tọa độ $(2;1;6)$ không cùng phương với vectơ $\vec{a}$ nên không là vectơ chỉ phương của Δ.

b) Sai.

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{b} = (1;-2;-2)$, vectơ có tọa độ $(1;2;-2)$ không cùng phương với vectơ $\vec{b}$ nên không là vectơ pháp tuyến của (P).

c) Đúng.

Côsin của góc giữa hai vectơ là

$$\cos(\vec{u},\vec{n}) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{n}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{n}|} = \frac{5\cdot1 + 12\cdot(-2) + (-13)\cdot(-2)}{\sqrt{5^2 + 12^2 + (-13)^2}\cdot\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-2)^2}} = \frac{7}{39\sqrt{2}}.$$

d) Sai.

Gọi φ là góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (P). Ta có

$$\sin\varphi = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{n}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{n}|} = \frac{|5\cdot 1 + 12\cdot(-2) + (-13)\cdot(-2)|}{\sqrt{5^2+12^2+(-13)^2}\cdot\sqrt{1^2+(-2)^2+(-2)^2}} = \frac{7}{39\sqrt{2}}.$$

Suy ra góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) là $\varphi \approx 7^\circ$.

Chọn đáp án | a sai | b sai | c đúng | d sai | .... □

Câu 2. Cho hàm số $y = x + \dfrac{4}{x}$.

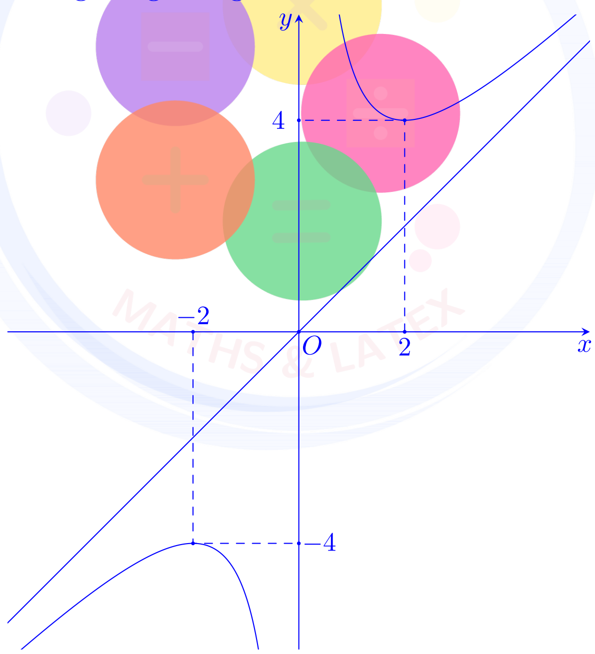
a) Đạo hàm của hàm số đã cho là $y' = 1 + \dfrac{4}{x^2}$.

b Đạo hàm của hàm số đã cho nhận giá trị âm trên $(-2;0)\cup(0;2)$ và nhận giá trị dương trên $(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$.

c) Bảng biến thiên của hàm số đã cho như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$ ↗		4	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	-4	↗	$+\infty$

d Đồ thị hàm số đã cho là đường cong trong hình sau:



Lời giải.

a) **Sai**.

Đạo hàm của hàm số là $y' = 1 - \dfrac{4}{x^2}$.

b) **Sai**.

Ta có $y' = 1 - \dfrac{4}{x^2}$ $(x \neq 0)$.

Phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow 1 - \dfrac{4}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -2. \end{array}\right.$

Bảng xét dấu của hàm số đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu, suy ra đạo hàm của hàm số nhận giá trị âm trên $(-2;0)\cup(0;2)$ và nhận giá trị dương trên $(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$.

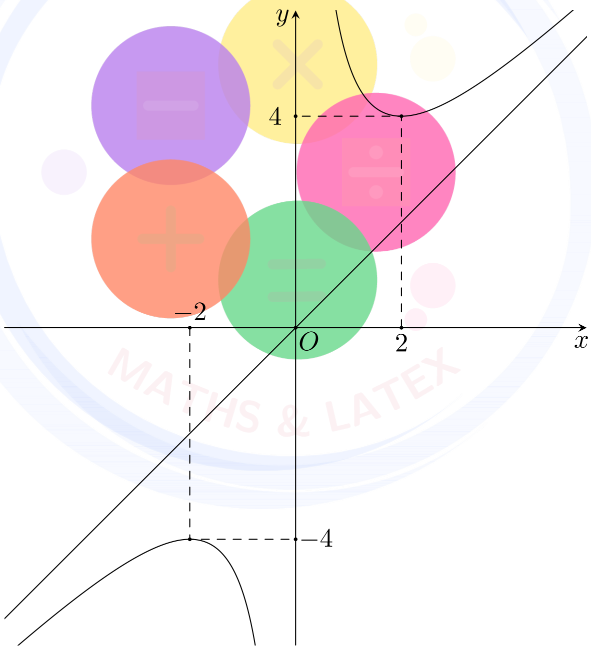
c) **Đúng**.

Bảng biến thiên của hàm số là

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-4	$\searrow$	$-\infty \;\|\; +\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

d) **Đúng**.

Đồ thị của hàm số như sau:



Chọn đáp án | a sai | b đúng | c sai | d đúng | .... □

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(0;4;5)$, $B(0;5;4)$, $C(1;3;3)$ và $D(1;-1;3)$. Điểm $M(a;b;c)$ trong không gian, biết khoảng cách từ các điểm A, B, C, D đến điểm M lần lượt là $AM=5$, $BM=5$, $CM=3$ và $DM=3$.

a) $a^2+(b-4)^2+(c-5)^2=a^2+(b-5)^2+(c-4)^2=25$.

b) $(a-1)^2+(b-3)^2+(c-3)^2=(a-1)^2+(b+1)^2+(c-3)^2=9$.

c) $b=c$.

d) $M(1;1;1)$.

Lời giải.

a) **Đúng**.

Theo giả thiết, ta có

$$\begin{aligned} & AM = BM = 5 \\ \Leftrightarrow\ & AM^2 = BM^2 = 25 \\ \Leftrightarrow\ & a^2 + (b-4)^2 + (c-5)^2 = a^2 + (b-5)^2 + (c-4)^2 = 25. \quad (1) \end{aligned}$$

b) **Đúng**.

Theo giả thiết, ta có

$$\begin{aligned} & CM = DM = 3 \\ \Leftrightarrow\ & CM^2 = DM^2 = 9 \\ \Leftrightarrow\ & (a-1)^2 + (b-3)^2 + (c-3)^2 = (a-1)^2 + (b+1)^2 + (c-3)^2 = 9. \quad (2) \end{aligned}$$

c) **Đúng**.

Từ (1) suy ra $b = c$. Từ (2) suy ra $b = 1$.

d) **Sai**.

Ta có $b = c = 1$ và $a = 0$. Do đó $M(0;1;1)$.

Chọn đáp án | a đúng | b đúng | c đúng | d sai | .... □

Câu 4. Một xe ô tô đang chạy với tốc độ 65 km/h thì người lái xe bất ngờ phát hiện chướng ngại vật trên đường cách đó 50 m. Người lái xe phản ứng một giây, sau đó đạp phanh khẩn cấp. Kể từ thời điểm này, ô tô chuyển động chậm dần đều với tốc độ $v(t) = -10t + 20$ (m/s), trong đó t là thời gian tính bằng giây kể từ lúc đạp phanh, $s(t)$ là quãng đường xe ô tô đi được trong t (giây) kể từ lúc đạp phanh.

a) Quãng đường $s(t)$ mà xe ô tô đi được trong thời gian t (giây) là một nguyên hàm của hàm số $v(t)$.

b) $s(t) = -5t^2 + 20t$.

c) Thời gian kể từ lúc đạp phanh đến khi xe ô tô dừng hẳn là 20 giây.

d) Xe ô tô đó không va vào chướng ngại vật ở trên đường.

Lời giải.

a) **Đúng**.

Quãng đường $s(t)$ mà xe ô tô đi được trong thời gian t (giây) là một nguyên hàm của hàm số $v(t)$.

b) **Đúng**.

Ta có $\displaystyle\int v(t)\,\mathrm{d}t = \int (-10t + 20)\,\mathrm{d}t = -5t^2 + 20t + C$.

Suy ra $s(t) = -5t^2 + 20t + C$.

Tại thời điểm $t = 0$, quãng đường $s(0) = 0$ nên $C = 0$.

Suy ra $s(t) = -5t^2 + 20t$.

c) **Sai**.

Khi ô tô dừng lại, ta có $v(t) = 0 \Leftrightarrow -10t + 20 = 0 \Leftrightarrow t = 2$ giây.

d) **Đúng**.

Vận tốc trước khi ô tô gặp chướng ngại vật là $65\,\text{km/h} = \dfrac{325}{18}$ m/s.

Trong thời gian 1 giây trước khi đạp phanh thì ô tô di chuyển được quãng đường là $s = 1 \cdot \dfrac{325}{18} = \dfrac{325}{18}$ m.

Quãng đường ô tô di chuyển được trong quãng thời gian 2 giây kể từ lúc đạp phanh đến khi xe dừng hẳn là $s(2) = -5 \cdot 2^2 + 20 \cdot 2 = 20$ (m).

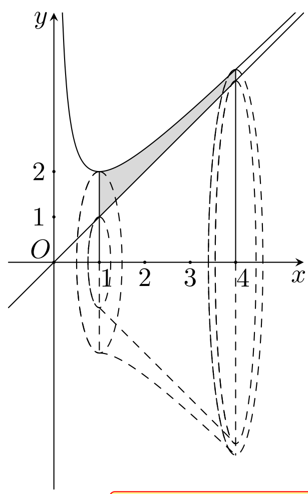
Quãng đường ô tô di chuyển được sau thời gian 3 giây là $\dfrac{325}{18} + 20 \approx 38{,}1$ (m).

Vậy xe ô tô đó không va vào chướng ngại vật ở trên đường.

Chọn đáp án | a đúng | b đúng | c sai | d đúng | .... □

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1. Một chiếc bát thuỷ tinh có bề dày của phần xung quanh là một khối tròn xoay, khi xoay hình phẳng D quanh một đường thẳng a bất kì nào đó mà khi gắn hệ trục tọa độ Oxy (đơn vị trên trục là decimét) vào hình phẳng D tại một vị trí thích hợp, thì đường thẳng a sẽ trùng với trục Ox. Khi đó, hình phẳng D được giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = x + \dfrac{1}{x}$, $y = x$ và hai đường thẳng $x = 1$, $x = 4$. Thể tích của bề dày chiếc bát thuỷ tinh đó bằng bao nhiêu decimét khối (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?



Đáp án: 21,2

Lời giải.

Gọi V_1 là thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x + \dfrac{1}{x}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1$, $x = 4$ quay quanh trục Ox.

Khi đó

$$V_1 = \pi \int_1^4 \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{111\pi}{4}\,(\mathrm{dm}^3).$$

Gọi V_2 là thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1$, $x = 4$ quay quanh trục Ox.

Khi đó

$$V_2 = \pi \int_1^4 x^2\,\mathrm{d}x = 21\pi\,(\mathrm{dm}^3).$$

Vậy thể tích của bề dày chiếc bát thuỷ tinh là

$$V = V_1 - V_2 = \frac{111\pi}{4} - 21\pi = \frac{27\pi}{4} \approx 21{,}2\,(\mathrm{dm}^3).$$

Câu 2. Một người gửi 60 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất 0,5%/ tháng. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu (hay gọi là lãi kép). Giả sử trong nhiều tháng liên tiếp kể từ khi gửi tiền, người đó không rút tiền ra và lãi suất không thay đổi. Hỏi từ tháng thứ mấy trở đi, người đó có hơn 66 triệu đồng? Đáp án: 20

Lời giải.

Đặt $u_0 = 60$ triệu đồng.

Gọi u_n (triệu đồng) là số tiền mà người đó có được sau n tháng gửi tiết kiệm. Điều kiện $n \in \mathbb{N}^*$.

Khi đó, ta có

$$u_{n+1} = u_n + \frac{0{,}5}{100} u_n = 1{,}005 u_n.$$

Suy ra dãy số (u_n) lập thành cấp số nhân với công bội $q = 1{,}005$, có số hạng tổng quát là

$$u_n = 60 \cdot 1{,}005^n.$$

Xét bất phương trình $u_n > 66 \Leftrightarrow 60 \cdot 1{,}005^n > 66 \Leftrightarrow 1{,}005^n > 1{,}1 \Leftrightarrow n > \log_{1{,}005} 1{,}1$.

Vì $\log_{1{,}005} 1{,}1 \approx 19{,}1$ và $n \in \mathbb{N}^*$ nên bắt đầu từ tháng thứ 20 (đủ 20 tháng) trở đi thì người đó có hơn 66 triệu đồng.

Câu 3. Trong một khung lưới ô vuông gồm các hình lập phương, xét các đường thẳng đi qua hai nút lưới (mỗi nút lưới là đỉnh của hình lập phương), người ta đưa ra một cách kiểm tra độ lệch về phương của hai đường thẳng bằng cách gắn hệ tọa độ $Oxyz$ vào khung lưới ô vuông và tìm vectơ chỉ phương của hai đường thẳng đó. Giả sử, đường thẳng a đi qua hai nút lưới $M(1;1;2)$ và $N(0;3;0)$, đường thẳng b đi qua hai nút lưới $P(1;0;3)$ và $Q(3;3;9)$. Sau khi làm tròn đến hàng đơn vị của độ thì góc giữa hai đường thẳng a và b bằng n° (n là số tự nhiên). Giá trị của n bằng bao nhiêu?

Đáp án: 68

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{MN} = (-1;2;-2)$, $\overrightarrow{PQ} = (2;3;6)$ lần lượt là các vectơ chỉ phương của hai đường thẳng a và b.

Khi đó $\cos(a,b) = \dfrac{\left|\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{PQ}\right|}{\left|\overrightarrow{MN}\right| \cdot \left|\overrightarrow{PQ}\right|} = \dfrac{|(-1)\cdot 2 + 2 \cdot 3 + (-2) \cdot 6|}{\sqrt{1+4+4} \cdot \sqrt{4+9+36}} = \dfrac{8}{21}$.

Suy ra $(a,b) \approx 68^\circ$.

Câu 4. Để nghiên cứu xác suất của một loại cây trồng mới phát triển bình thường, người ta trồng hạt giống của loại cây đó trên hai ô thí nghiệm A, B khác nhau. Xác suất phát triển bình thường của hạt giống đó trên các ô đất A, B lần lượt là 0,61 và 0,7. Lặp lại thí nghiệm trên với đầy đủ các điều kiện tương đồng. Xác suất của biến cố hạt giống chỉ phát triển bình thường trên một ô đất là bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)? Đáp án: 0,46

Lời giải.

Ta lần lượt gọi:

- A là biến cố "Hạt giống phát triển bình thường trên lô đất thí nghiệm A"
  $\Rightarrow \mathrm{P}(A) = 0{,}61$.

- $\overline{A}$ là biến cố "Hạt giống phát triển không bình thường trên lô đất thí nghiệm A"
  $\Rightarrow \mathrm{P}(\overline{A}) = 1 - \mathrm{P}(A) = 1 - 0{,}61 = 0{,}39$.
- B là biến cố "Hạt giống phát triển bình thường trên lô đất thí nghiệm B"
  $\Rightarrow \mathrm{P}(B) = 0{,}7$.
- $\overline{B}$ là biến cố "Hạt giống không phát triển bình thường trên lô đất thí nghiệm B"
  $\Rightarrow \mathrm{P}(\overline{B}) = 1 - \mathrm{P}(B) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$.

Ta có các cặp biến cố $\overline{A}$ và B, A và $\overline{B}$ độc lập.
Hai biến cố $\overline{A}B$ và $A\overline{B}$ xung khắc.
Gọi C là biến cố "Hạt giống chỉ phát triển bình thường trên một lô đất".
Khi đó, ta có

$$\mathrm{P}(C) = \mathrm{P}\left(\overline{A}B \cup A\overline{B}\right) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}\left(\overline{B}\right) + \mathrm{P}(B) \cdot \mathrm{P}\left(\overline{A}\right) = 0{,}61 \cdot 0{,}3 + 0{,}7 \cdot 0{,}39 \approx 0{,}46.$$

Vậy xác suất hạt giống chỉ phát triển bình thường trên một lô đất bằng 0,46.

Câu 5. Một xe ô tô chở khách du lịch có sức chứa tối đa là 16 hành khách. Trong một khu du lịch, một đoàn khách gồm 22 người đang đi bộ và muốn thuê xe về khách sạn. Lái xe đưa ra thỏa thuận với đoàn khách du lịch như sau: Nếu một chuyến xe chở x (người) thì giá tiền cho mỗi người là $\dfrac{(40-x)^2}{2}$ (nghìn đồng). Với thoả thuận như trên thì lái xe có thể thu được nhiều nhất bao nhiêu triệu đồng từ một chuyến chở khách (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)? **Đáp án: 4,74**

Lời giải.

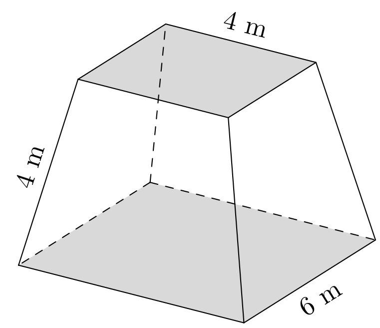
Theo giả thiết, số tiền thu được của một chuyến xe chở khách có công thức $\dfrac{x(40-x)^2}{2}$ (nghìn đồng) với x là số người thỏa mãn $\begin{cases} x \in \mathbb{Z} \\ 0 < x \leq 16. \end{cases}$

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{x(40-x)^2}{2}$ trên $(0;16]$.
Ta có $f'(x) = \dfrac{3}{2}x^2 - 80x + 800$.
Phương trình $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 40 \notin (0;16] \\ x = \dfrac{40}{3} \notin \mathbb{Z}. \end{array}\right.$
Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như sau:

x	0	13	$\frac{40}{3}$	14	16
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0 $\nearrow$	4738,5 $\nearrow$	$f\left(\dfrac{40}{3}\right)$	$\searrow$ 4732	$\searrow$ 4608

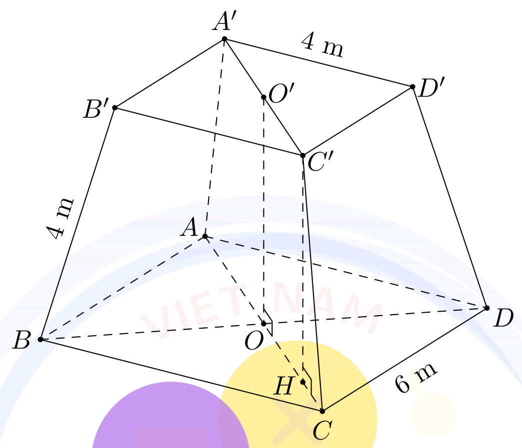
Ta có $f(13) = 4\,738{,}5$, $f(14) = 4\,732$ và $f(16) = 4\,608$.
Từ bảng biến thiên, ta suy ra $\max\limits_{(0;16]} f(x) = 4\,738{,}5$ nghìn đồng.
Vậy người lái xe đó có thể thu được nhiều nhất khoảng 4,74 triệu đồng từ một chuyến chở khách.

Câu 6. Người ta xây dựng một chân tháp bằng bê tông có dạng khối chóp cụt tứ giác đều. Cạnh đáy dưới dài 6 m, cạnh đáy trên dài 4 m, cạnh bên dài 4 m. Biết rằng chân tháp được làm bằng bê tông tươi với giá tiền là 1 500 000 đồng/m^3. Số tiền để mua bê tông tươi làm chân tháp là bao nhiêu triệu đồng (làm tròn đến hàng đơn vị của triệu đồng)?



Đáp án: 142

Lời giải.



Chân tháp hình chóp cụt tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ với O, O' là tâm của hai đáy, $AB = 6$, $A'B' = 4$, $CC' = 4$.

Vì $ABCD$ là hình vuông nên $AC = AB\sqrt{2} = 6\sqrt{2} \Rightarrow CO = \frac{1}{2}AC = 3\sqrt{2}$.

Vì $A'B'C'D'$ là hình vuông nên $A'C' = A'B'\sqrt{2} = 4\sqrt{2} \Rightarrow C'O' = \frac{1}{2}A'C' = 2\sqrt{2}$.

Kẻ $C'H \perp OC$, với $H \in OC$.

Ta có $OHC'O'$ là hình chữ nhật $\Rightarrow \begin{cases} OH = O'C' = 2\sqrt{2} \\ OO' = C'H. \end{cases}$

Do đó $CH = OC - OH = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$.

Xét $\triangle CC'H$ vuông tại H, ta có

$$C'H = \sqrt{CC'^2 - CH^2} = \sqrt{4^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{14} \Rightarrow OO' = C'H = \sqrt{14}.$$

Diện tích đáy lớn khối chóp là $S = AB^2 = 6^2 = 36$ (m^2).

Diện tích đáy bé khối chóp là $S' = A'B'^2 = 4^2 = 16$ (m^2).

Suy ra thể tích khối chóp cụt là

$$V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot \left(S + \sqrt{SS'} + S'\right) = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{14}\left(36 + \sqrt{36 \cdot 16} + 16\right) = \frac{76\sqrt{14}}{3}\left(\mathrm{m}^3\right).$$

Vậy, số tiền để mua bê tông tươi làm chân tháp là $\frac{76\sqrt{14}}{3} \cdot 1{,}5 \approx 142$ (triệu đồng).

BẢNG ĐÁP ÁN

PHẦN I.

Câu 1. B	Câu 2. C	Câu 3. A	Câu 4. A	Câu 5. D	Câu 6. A
Câu 7. D	Câu 8. C	Câu 9. D	Câu 10. D	Câu 11. A	Câu 12. C

PHẦN II.

Câu 1. a S b S c Đ d S	Câu 2. a S b Đ c S d Đ
Câu 3. a Đ b Đ c Đ d S	Câu 4. a Đ b Đ c S d Đ

PHẦN III.

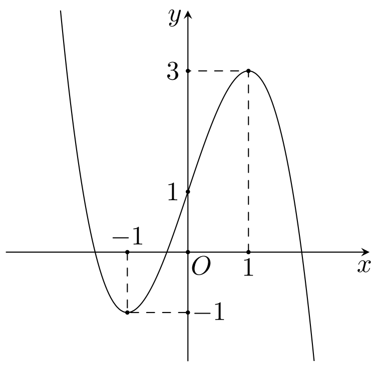
Câu 1. 21,2	Câu 2. 20	Câu 3. 68	Câu 4. 0,46	Câu 5. 4,74	Câu 6. 142

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ lựa chọn một phương án.

Câu 1. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Tọa độ tâm đối xứng của đồ thị hàm số đã cho là

A. $(-1; 0)$. **B.** $(0; 1)$.

C. $(-1; 1)$. **D.** $(1; -3)$.



Lời giải.

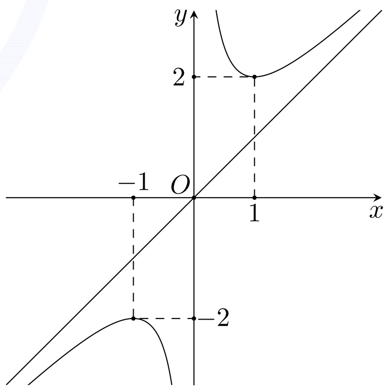
Do đồ thị hàm số bậc ba có hai điểm cực trị là $A(-1; -1)$ và $B(1; 3)$ nên tâm đối xứng của đồ thị là trung điểm $I(0; 1)$ của AB.

Chọn đáp án B .... □

Câu 2. Cho hàm số $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$, $(am \neq 0)$ có đồ thị như hình bên. Phương trình đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho là

A. $y = 2x$. **B.** $y = -x$.

C. $y = x$. **D.** $y = -2x$.



Lời giải.

Đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x = 0$ làm tiệm cận đứng nên $n = 0$.

Hàm số được viết lại là $y = \dfrac{a}{m}x + \dfrac{b}{m} + \dfrac{c}{mx}$.

Khi đó, đường tiệm cận xiên của hàm số có phương trình là $y = \dfrac{a}{m}x + \dfrac{b}{m}$.

Do đường tiệm cận xiên đi qua gốc tọa độ nên $b = 0$.

Suy ra hàm số có dạng $y = \dfrac{a}{m}x + \dfrac{c}{mx}$.

Ta có $y' = \dfrac{a}{m} - \dfrac{c}{mx^2}$.

Vì đồ thị hàm số có điểm cực trị $(1; 2)$ nên $\begin{cases} \dfrac{a}{m} + \dfrac{c}{m} = 2 \\ \dfrac{a}{m} - \dfrac{c}{m} = 0 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{a}{m} = \dfrac{c}{m} = 1$.

Vậy đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho là $y = x$.

Chọn đáp án (C) .... □

Câu 3. Hàm số nào sau đây là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 15^x$?

A. $F_1(x) = 15^x$. **B.** $F_2(x) = 15^x \ln 15$. **C.** $F_3(x) = \dfrac{15^x}{\log 15}$. **D.** $F_4(x) = \dfrac{15^x}{\ln 15}$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int 15^x\,\mathrm{d}x = \frac{15^x}{\ln 15} + C,\ C \in \mathbb{R}$.

Suy ra hàm số $F_4(x) = \dfrac{15^x}{\ln 15}$ là một nguyên hàm của hàm số $y = f(x)$ (tương ứng $C = 0$).

Chọn đáp án (D) .... □

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, phương trình nào sau đây là phương trình tổng quát của mặt phẳng?

A. $2x + 3y + z - 1 = 0$. **B.** $x^2 + y - z + 3 = 0$.

C. $x - y^2 + 3z - 6 = 0$. **D.** $x + y + z^2 - 7 = 0$.

Lời giải.

Phương trình tổng quát của mặt phẳng có dạng $Ax + By + Cz + D = 0$ $(A^2 + B^2 + C^2 > 0)$.

Suy ra phương trình $2x + 3y + z - 1 = 0$ là phương trình tổng quát của một mặt phẳng.

Chọn đáp án (A) .... □

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $\Delta\colon \begin{cases} x = -4 + 2t \\ y = 7 - 3t \\ z = 8 - 9t \end{cases}$ có một vectơ chỉ phương là

A. $\vec{u}_1 = (4;7;8)$. **B.** $\vec{u}_2 = (-4;7;8)$. **C.** $\vec{u}_3 = (2;3;9)$. **D.** $\vec{u}_4 = (2;-3;-9)$.

Lời giải.

Một vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ là $\vec{u} = (2;-3;-9)$.

Chọn đáp án (D) .... □

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $(S)\colon (x+3)^2 + (y-9)^2 + (z+12)^2 = 5^2$ có bán kính là

A. $R = 5^4$. **B.** $R = 5$. **C.** $R = \sqrt{5}$. **D.** $R = 25$.

Lời giải.

Bán kính mặt cầu (S) là $R = 5$.

Chọn đáp án (B) .... □

Câu 7. Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thoả mãn $f(x) < f(2), \forall x \in (1;3) \setminus \{2\}$ thì

A. 2 là điểm cực tiểu của hàm số. **B.** 2 là điểm cực đại của hàm số.

C. Giá trị lớn nhất của hàm số bằng $f(2)$. **D.** Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng $f(2)$.

Lời giải.

Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thoả mãn $f(x) < f(2), \forall x \in (1;3) \setminus \{2\}$ nên $x = 2$ là điểm cực đại của hàm số.

Chọn đáp án (B) .... □

Câu 8. Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ trong không gian được tính bằng

A. $|\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right|$.

B. $|\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$.

C. $|\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$.

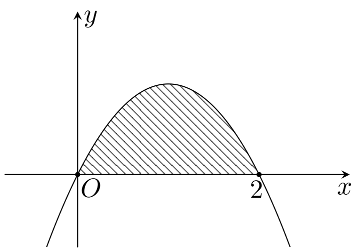
D. $|\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \left(\vec{a}, \vec{b}\right)$.

Lời giải.

Ta có $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$.

Chọn đáp án C .... □

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi H là phần diện tích hình phẳng được gạch sọc. Thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi cho hình phẳng H quay quanh trục Ox là



A. $V = \pi \int\limits_2^0 [f(x)]^2 \, dx$.

B. $V = \int\limits_2^0 [f(x)]^2 \, dx$.

C. $V = \int\limits_0^2 [f(x)]^2 \, dx$.

D. $V = \pi \int\limits_0^2 [f(x)]^2 \, dx$.

Lời giải.

Thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi cho hình phẳng H quay quanh trục Ox là

$$V = \pi \int\limits_0^2 [f(x)]^2 \, dx.$$

Chọn đáp án D .... □

Câu 10. Xét mẫu số liệu ghép nhóm cho bởi bảng sau:

Nhóm	Giá trị đại diện	Tần số
$[a_1; a_2)$	x_1	n_1
$[a_2; a_3)$	x_2	n_2
...	...	...
$[a_m; a_{m+1})$	x_m	n_m
		n

Gọi $\overline{x}$ là số trung bình cộng của mẫu số liệu ghép nhóm. Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm đó được tính bằng công thức nào dưới đây?

A. $s^2 = \dfrac{n_1(x_1 - \overline{x})^2 + n_2(x_2 - \overline{x})^2 + \cdots + n_m(x_m - \overline{x})^2}{n}$.

B. $s = \sqrt{\dfrac{n_1(x_1 - \overline{x})^2 + n_2(x_2 - \overline{x})^2 + \cdots + n_m(x_m - \overline{x})^2}{m}}$.

C. $s = \sqrt{\dfrac{n_1(x_1 - \overline{x})^2 + n_2(x_2 - \overline{x})^2 + \cdots + n_m(x_m - \overline{x})^2}{n}}$.

D. $s^2 = \dfrac{n_1(x_1 - \overline{x})^2 + n_2(x_2 - \overline{x})^2 + \cdots + n_m(x_m - \overline{x})^2}{m}$.

Lời giải.

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm đó được tính bằng công thức

$$s^2 = \frac{n_1(x_1 - \overline{x})^2 + n_2(x_2 - \overline{x})^2 + \cdots + n_m(x_m - \overline{x})^2}{n}.$$

Chọn đáp án (A) .... □

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu (S) có tâm $I(2;1;-1)$ và đường kính bằng 6 có phương trình là

A. $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=36$. **B.** $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=9$.

C. $(x+2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=9$. **D.** $(x+2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=36$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(2;1;-1)$ và bán kính $R=\dfrac{6}{2}=3$ nên phương trình mặt cầu là

$$(x-2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=9.$$

Chọn đáp án (B) .... □

Câu 12. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=4$, $\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x=3$. Giá trị của biểu thức $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 7. **B.** 1. **C.** 12. **D.** 0,75.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow \int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x-\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x=1$.

Chọn đáp án (B) .... □

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý **a)**, **b)**, **c)**, **d)** ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P)\colon 2x+y+2z-1=0$ và $(Q)\colon x-2y-2z-7=0$.

a) Vectơ có tọa độ $(2;2;1)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).

b Vectơ có tọa độ $(1;-2;-2)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (Q).

c Côsin của góc giữa hai vectơ $\vec{n}_1=(2;1;2)$ và $\vec{n}_2=(1;-2;-2)$ bằng $-\dfrac{4}{9}$.

d Góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) (làm tròn đến hàng đơn vị của độ) bằng 64°.

Lời giải.

a) Sai.

Mặt phẳng $(P)\colon 2x+y+2z-1=0$ có một vectơ pháp tuyến có tọa độ là $(2;1;2)$ và vectơ có tọa độ $(2;2;1)$ không cùng phương với vectơ pháp tuyến của (P).

b) Đúng.

Mặt phẳng $(Q)\colon x-2y-2z-7=0$ có một vectơ pháp tuyến có tọa độ là là $(1;-2;-2)$.

c) Đúng.

Ta có

$$\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \frac{2 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) + 2 \cdot (-2)}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-2)^2}} = -\frac{4}{9}.$$

d) Đúng.

Gọi góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) là α.

Vì hai vectơ $\vec{n}_1 = (2; 1; 2)$ và $\vec{n}_2 = (1; -2; -2)$ lần lượt là các vectơ pháp tuyến của (P) và (Q) nên

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|2 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) + 2 \cdot (-2)|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-2)^2}} = \frac{4}{9}.$$

Vậy $\alpha \approx 64^\circ$ (vì $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$).

Chọn đáp án | a sai | b đúng | c đúng | d đúng | .... □

Câu 2. Cho hàm số $y = \dfrac{2x - 1}{x - 1}$.

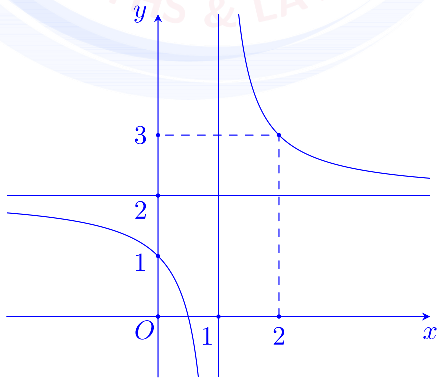
a) Đạo hàm của hàm số đã cho là $y' = -\dfrac{1}{(x-1)^2}$.

b) Đạo hàm của hàm số đã cho nhận giá trị âm với mọi $x \neq 1$.

c) Bảng biến thiên của hàm số đã cho như sau:

x	$-\infty$		$+\infty$
y'		$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

d) Đồ thị của hàm số đã cho là đường cong trong hình sau:



Lời giải.

a) Đúng.

Đạo hàm $y' = \dfrac{(2x-1)'(x-1) - (2x-1)(x-1)'}{(x-1)^2} = -\dfrac{1}{(x-1)^2}$, $\forall x \neq 1$.

b) Đúng.

Ta có $y' = -\dfrac{1}{(x-1)^2} < 0$, $\forall x \neq 1$.

Vậy đạo hàm của hàm số đã cho nhận giá trị âm với mọi $x \neq 1$.

c) **Sai**.

Bảng biến thiên của hàm số đã cho như sau:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y	2	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	2

d) **Đúng**.

Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

Đồ thị của hàm số có tiệm cận đứng $x = 1$, tiệm cận ngang $y = 2$, nhận điểm $I(1; 2)$ là giao điểm của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng.

Đồ thị hàm số cắt trục Oy tại điểm $(0; 1)$ và đi qua điểm có tọa độ $(2; 3)$.

Chọn đáp án | a đúng | b đúng | c sai | d đúng | .... □

Câu 3. Một ô tô đang chạy đều với vận tốc x m/s thì người lái xe đạp phanh. Từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc thay đổi theo hàm số $v(t) = -5t + 20$ m/s, trong đó t là thời gian tính bằng giây kể từ lúc đạp phanh.

a) Khi xe dừng hẳn thì vận tốc bằng 0 m/s.

b) Thời gian từ lúc người lái xe đạp phanh cho đến khi xe dừng hẳn là 5 s.

c) $\displaystyle\int (-5t + 20)\,\mathrm{d}t = \frac{-5t^2}{2} + 20t + C$.

d) Quãng đường từ lúc đạp phanh cho đến khi xe dừng hẳn là 400 m.

Lời giải.

a) **Đúng**.

Khi xe dừng hẳn thì vận tốc bằng 0 m/s.

b) **Sai**.

Khi xe dừng hẳn thì $v(t) = 0$ m/s nên $0 = -5t + 20 \Rightarrow t = 4$ s.

Thời gian từ lúc người lái xe đạp phanh cho đến khi xe dừng hẳn là 4 s.

c) **Đúng**.

Nguyên hàm của hàm số vận tốc

$$\int (-5t + 20)\,\mathrm{d}t = \frac{-5t^2}{2} + 20t + C, C \in \mathbb{R}.$$

d) **Sai**.

Quãng đường từ lúc đạp phanh cho đến khi xe dừng hẳn là

$$\int_0^4 (-5t + 20)\,\mathrm{d}t = \left(\frac{-5t^2}{2} + 20t\right)\Bigg|_0^4 = \frac{-5 \cdot 4^2}{2} + 20 \cdot 4 = 40 \text{ (m)}.$$

Chọn đáp án | a đúng | b sai | c đúng | d sai | .... □

Câu 4. Năm 2001, Cộng đồng Châu Âu có làm một đợt kiểm tra rất rộng rãi các con bò để phát hiện những con bị bệnh bò điên. Người ta tiến hành một loại xét nghiệm và cho kết quả như sau: Khi con bò bị bệnh bò điên thì xác suất để ra phản ứng dương tính trong xét nghiệm là 70%; còn khi con bò không bị bệnh thì xác suất để xảy ra phản ứng dương tính trong xét nghiệm đó là 10%. Biết rằng tỉ lệ bò bị mắc bệnh bò điên ở Hà Lan là 1,3 con trên 100 000 con. Gọi X là biến cố một con bò bị bệnh bò điên, Y là biến cố một con bò phản ứng dương tính với xét nghiệm.

a) $\mathrm{P}(X) = 13 \cdot 10^{-6}$.

b) $\mathrm{P}(Y \mid X) = 0{,}07$.

c) $\mathrm{P}\left(Y \mid \overline{X}\right) = 0{,}1$.

d) $\mathrm{P}(Y \cap X) = 91 \cdot 10^{-8}$.

Lời giải.

a) **Đúng**.

Tỉ lệ bò bị mắc bệnh bò điên ở Hà Lan là 1,3 con trên 100 000 con nghĩa là xác suất của biến cố X là $\mathrm{P}(X) = 13 \cdot 10^{-6}$.

b) **Sai**.

Khi con bò bị bệnh bò điên, thì xác suất để ra phản ứng dương tính trong xét nghiệm là 70%, nghĩa là $\mathrm{P}(Y \mid X) = 0{,}7$.

c) **Đúng**.

Khi con bò không bị bệnh, thì xác suất để xảy ra phản ứng dương tính trong xét nghiệm đó là 10%, nghĩa là $\mathrm{P}\left(Y \mid \overline{X}\right) = 0{,}1$.

d) **Sai**.

Ta có $\mathrm{P}(Y \cap X) = \mathrm{P}(Y \mid X) \cdot \mathrm{P}(X) = 0{,}7 \cdot 13 \cdot 10^{-6} = 91 \cdot 10^{-7}$.

Chọn đáp án | a đúng | b sai | c đúng | d sai | .... □

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1. Giả sử $\displaystyle\int (0{,}1)^x \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{\ln a} \cdot b^x + C$. Với a, b là các hằng số dương. Giá trị của biểu thức $\dfrac{a}{b}$ bằng bao nhiêu?

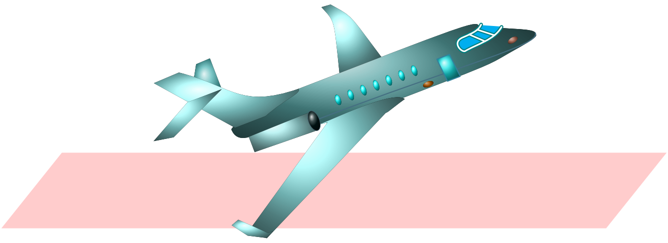
Đáp án: 100

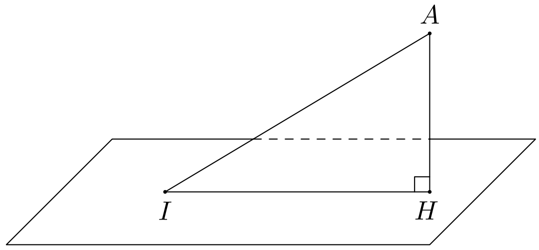
Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int (0{,}1)^x \, \mathrm{d}x = \frac{(0{,}1)^x}{\ln 0{,}1} + C = \frac{1}{\ln 10^{-1}} \cdot (0{,}1)^x + C = -\frac{1}{\ln 10} \cdot (0{,}1)^x + C$.

Suy ra $\begin{cases} a = 10 \\ b = 0{,}1 \end{cases}$. Vậy $\dfrac{a}{b} = \dfrac{10}{0{,}1} = 100$.

Câu 2. Giả sử ở những giây đầu tiên, máy bay cất cánh bay theo một đường thẳng tạo với mặt đất một góc 21° với vận tốc 240 km/h. Mô tả mặt đất là một phần mặt phẳng và máy bay bay ở vị trí I đến vị trí A như hình vẽ. Độ cao AH của máy bay so với mặt đất sau khi máy bay rời khỏi mặt đất 3 giây là bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?





Đáp án: 72

Lời giải.

Máy bay bay với vận tốc là 240 km/h $= \dfrac{200}{3}$ m/s nên quãng đường đi được sau 3 giây là

$$s = v \cdot t = \frac{200}{3} \cdot 3 = 200 \text{ (m)}.$$

Suy ra $IA = 200$ m.

Vậy độ cao của máy bay so với mặt đất là

$$AH = IA \cdot \sin \widehat{AIH} = 200 \cdot \sin 21^\circ \approx 72 \text{ (m)}.$$

Câu 3. Một doanh nghiệp hỗ trợ cho bốn người dân bị thất nghiệp ở một khu phố là 5 triệu đồng/người với điều kiện như sau:

- Người thất nghiệp của khu phố làm việc tạp vụ cho doanh nghiệp trong nhiều ngày liên tiếp.
- Sau ngày đầu tiên, doanh nghiệp cho 110 nghìn đồng/người.
- Bắt đầu từ ngày thứ hai, mỗi ngày tăng thêm 20 nghìn đồng/người so với ngày hôm trước.

Mỗi người thất nghiệp phải làm cho doanh nghiệp đó ít nhất bao nhiêu ngày để có được hơn 5 triệu đồng (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Đáp án: 18

Lời giải.

Gọi u_n (nghìn đồng) là số tiền mà mỗi người lao động có được sau ngày đi làm thứ n ($n \in \mathbb{N}^*$).

Ta có $u_1 = 110$ và $u_{n+1} = u_n + 20$, với n là số nguyên dương.

Do đó, (u_n) là cấp số cộng với $u_1 = 110$ và công sai $d = 20$.

Suy ra tổng số tiền mà mỗi người lao động có được sau n ngày đi làm là

$$S_n = \frac{(u_1 + u_n)n}{2} = \frac{\left[110 + 110 + (n-1) \cdot 20\right]n}{2} = 10\left(n^2 + 10n\right).$$

Theo yêu cầu bài toán, ta có

$$S_n > 5\,000 \Leftrightarrow 10\left(n^2 + 10n\right) > 5\,000 \Leftrightarrow n^2 + 10n - 500 > 0 \Rightarrow n > -5 + 5\sqrt{21}.$$

Vì $-5 + 5\sqrt{21} \approx 17{,}9$ và $n \in \mathbb{N}^*$ nên mỗi người lao động phải làm cho công ty ít nhất 18 ngày để có nhiều hơn 5 triệu đồng.

Câu 4. Bác Hà lập lại mật khẩu cho tài khoản thanh toán trực tuyến. Khi lập mật khẩu, hệ thống báo về số điện thoại của bác mã OTP là một dãy 4 kí tự, mỗi kí tự là một chữ số, chữ số 0 có thể đứng đầu. Xác suất của biến cố: Mã OTP là dãy kí tự $abcd$ với $a < b < c < d$ là bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)? Đáp án: 0,02

Lời giải.

Có 10 chữ số là 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Khi đó, dãy kí tự $\overline{abcd}$ với mỗi kí tự là một chữ số và chữ số 0 có thể đứng đầu nên mỗi vị trí a, b, c, d đều có 10 cách chọn.

Số phần tử của không gian mẫu là $10^4 = 10\,000$.

Số các bộ bốn chữ số $\overline{abcd}$ thỏa mãn $a < b < c < d$ bằng số tập con gồm 4 phần tử của tập hợp 10 chữ số và bằng $\mathrm{C}_{10}^4 = 210$.

Vậy xác suất cần tìm là $\dfrac{210}{10\,000} \approx 0{,}02$.

Câu 5. Một xí nghiệp mỗi ngày sản xuất ra 2 000 sản phẩm, trong đó có 39 sản phẩm lỗi. Lần lượt lấy ra ngẫu nhiên hai sản phẩm không hoàn lại để kiểm tra. Tính xác suất của biến cố: Sản phẩm lấy ra lần thứ hai bị lỗi (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm). Đáp án: 0,02

Lời giải.

Gọi A_1 là biến cố "Sản phẩm lấy ra lần thứ nhất bị lỗi".

Khi đó, ta có $\mathrm{P}(A_1) = \dfrac{39}{2\,000}$, $\mathrm{P}\left(\overline{A}_1\right) = \dfrac{1961}{2\,000}$.

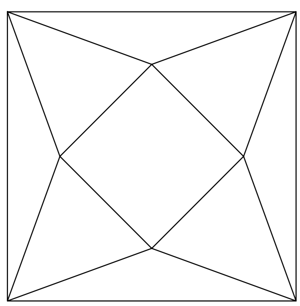
Gọi A_2 là biến cố "Sản phẩm lấy ra lần thứ hai bị lỗi".

- Nếu sản phẩm lấy ra lần thứ nhất bị lỗi thì còn 1 999 sản phẩm, trong đó có 38 sản phẩm lỗi nên ta có $\mathrm{P}(A_2 \mid A_1) = \dfrac{38}{1999}$.
- Khi sản phẩm lấy ra lần thứ nhất không bị lỗi thì còn 1999 sản phẩm trong đó có 39 sản phẩm lỗi nên ta có $\mathrm{P}\left(A_2 \mid \overline{A}_1\right) = \dfrac{39}{1999}$.

Vậy xác suất để sản phẩm lấy ra lần thứ hai bị lỗi là

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A_2) &= \mathrm{P}(A_2 \mid A_1) \cdot \mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}\left(A_2 \mid \overline{A}_1\right) \cdot \mathrm{P}\left(\overline{A}_1\right) \\ &= \frac{38}{1999} \cdot \frac{39}{2000} + \frac{39}{1999} \cdot \frac{1961}{2000} \approx 0{,}02.\end{aligned}$$

Câu 6. Từ một tấm bìa mỏng hình vuông cạnh 6 dm, bạn Hoa cắt bỏ bốn tam giác cân bằng nhau có cạnh đáy là cạnh của hình vuông ban đầu và đỉnh là đỉnh của một hình vuông nhỏ phía trong rồi gập lên, ghép lại tạo thành một khối chóp tứ giác đều như hình bên. Thể tích của khối chóp có giá trị lớn nhất bằng bao nhiêu decimét khối (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

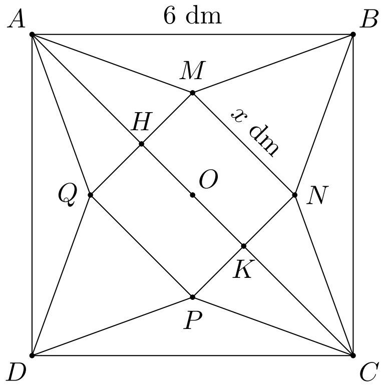


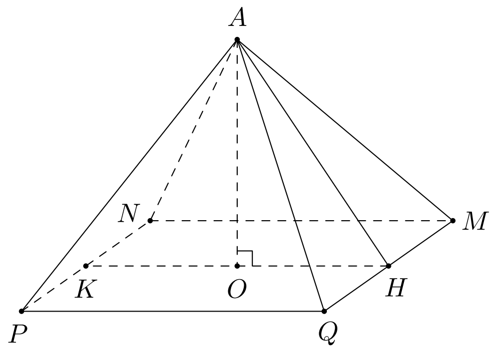
6 dm

Đáp án: 7,3

Lời giải.

Giả sử miếng bìa là hình vuông $ABCD$, đáy của hình chóp tứ giác đều là hình vuông $MNPQ$ tâm O có cạnh bằng x dm $(0 < x < 6\sqrt{2})$ như hình vẽ. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của MQ và NP.





Vì $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 6 dm nên $AC = 6\sqrt{2}$ dm, $HK = x$ dm.
Ta có $AH = \dfrac{AC - HK}{2} = 3\sqrt{2} - \dfrac{x}{2}$ dm.
Đường cao của hình chóp tứ giác đều là

$$h = AO = \sqrt{AH^2 - OH^2} = \sqrt{\left(3\sqrt{2} - \frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{18 - 3\sqrt{2}x}.$$

Thể tích khối chóp là

$$V = \frac{1}{3}hx^2 = \frac{1}{3}x^2\sqrt{18 - 3\sqrt{2}x} = \frac{1}{3}\sqrt{x^4\left(18 - 3\sqrt{2}x\right)}.$$

Để tìm giá trị lớn nhất của V ta đi tìm giá trị lớn nhất của hàm số

$$f(x) = x^4\left(18 - 3\sqrt{2}x\right) \text{ với } 0 < x \leq 3\sqrt{2}.$$

Ta có $f'(x) = x^3\left(-15\sqrt{2}x + 72\right)$, $f'(x) = 0$ khi $x = 0$ hoặc $x = \dfrac{12\sqrt{2}}{5}$.
Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như sau:

x	0		$\frac{12\sqrt{2}}{5}$		$3\sqrt{2}$
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f\left(\frac{12\sqrt{2}}{5}\right)$	$\searrow$	0

Từ bảng biến thiên ta có $\max\limits_{(0;3\sqrt{2}]} f(x) = f\left(\dfrac{12\sqrt{2}}{5}\right) \approx 477{,}76$.
Vậy thể tích của khối chóp có giá trị lớn nhất bằng

$$V_{\max} \approx \frac{1}{3}\sqrt{477{,}76} \approx 7{,}3 \ \left(\text{dm}^3\right).$$

BẢNG ĐÁP ÁN

PHẦN I.

Câu 1. B	Câu 2. C	Câu 3. D	Câu 4. A	Câu 5. D	Câu 6. B
Câu 7. B	Câu 8. C	Câu 9. D	Câu 10. A	Câu 11. B	Câu 12. B

PHẦN II.

Câu 1. a S b Đ c Đ d Đ	Câu 2. a Đ b Đ c S d Đ
Câu 3. a Đ b S c Đ d S	Câu 4. a Đ b S c Đ d S

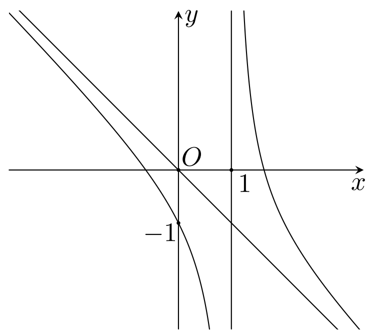
PHẦN III.

Câu 1. 100	Câu 2. 72	Câu 3. 18	Câu 4. 0,02	Câu 5. 0,02	Câu 6. 7,3

Họ và tên thí sinh: .... *Số báo danh:* .... **Mã đề: 004**

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ lựa chọn một phương án.

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$ có đồ thị như hình bên. Phát biểu nào sau đây đúng?



A. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

B. Hàm số $y = f(x)$ đồng trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

C. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

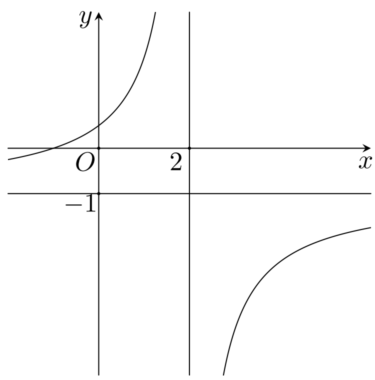
D. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

Lời giải.

Dựa vào hình vẽ, trên khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$, đồ thị đi xuống từ trái sang phải, do đó hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

Chọn đáp án A .... □

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ có đồ thị như hình bên. Phương trình đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là



A. $x = -1$.

B. $x = 2$.

C. $y = -1$.

D. $y = 2$.

Lời giải.

Từ hình vẽ, ta có $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = +\infty$ nên suy ra đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đường tiệm cận đứng $x = 2$.

Chọn đáp án B .... □

Câu 3. Hàm số nào sau đây là một nguyên hàm của hàm số $y = 10^x$?

A. $y = 10^x \ln 10$.

B. $y = 10^x$.

C. $y = \dfrac{10^{x+1}}{x+1}$.

D. $y = \dfrac{10^x}{\ln 10}$.

Lời giải.

Theo công thức nguyên hàm, $\displaystyle\int 10^x \, dx = \frac{10^x}{\ln 10} + C$.

Với $C = 0$, ta có một nguyên hàm của $y = 10^x$ là $y = \dfrac{10^x}{\ln 10}$.

Chọn đáp án D .... □

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách giữa hai điểm $A(x_1; y_1; z_1)$ và $B(x_2; y_2; z_2)$ bằng

A. $|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1| + |z_2 - z_1|$.

B. $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_2)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

C. $\dfrac{|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1| + |z_2 - z_1|}{3}$.

D. $\sqrt{\dfrac{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_2)^2 + (z_2 - z_1)^2}{3}}$.

Lời giải.

Theo công thức tính khoảng cách giữa hai điểm, ta có $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_2)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

Chọn đáp án B .... □

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng đi qua điểm $I(x_0; y_0; z_0)$ và nhận $\vec{n} = (a; b; c)$ (trong đó a, b, c không đồng thời bằng 0) làm vectơ pháp tuyến có phương trình là

A. $c(x - x_0) + b(y - y_0) + a(z - z_0) = 0$.

B. $b(x - x_0) + a(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$.

C. $c(x - x_0) + a(y - y_0) + b(z - z_0) = 0$.

D. $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$.

Lời giải.

Phương trình mặt phẳng đi qua điểm $I(x_0; y_0; z_0)$ và nhận $\vec{n} = (a; b; c)$ làm vectơ pháp tuyến có phương trình là $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$.

Chọn đáp án D .... □

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu tâm $I(x_0; y_0; z_0)$ có bán kính R có phương trình là

A. $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$.

B. $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - (z - z_0)^2 = R^2$.

C. $(x - x_0)^2 - (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$.

D. $-(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$.

Lời giải.

Mặt cầu tâm $I(x_0; y_0; z_0)$ và có bán kính R có phương trình là $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$.

Chọn đáp án A .... □

Câu 7. Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) \geq m$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và tồn tại $a \in \mathbb{R}$ sao cho $f(a) = m$ thì

A. Hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị lớn nhất bằng m.

B. Hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị cực tiểu bằng m.

C. Hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng m.

D. Hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị cực đại bằng m.

Lời giải.

Theo định nghĩa giá trị nhỏ nhất của hàm số, suy ra hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng m.

Chọn đáp án C .... □

Câu 8. Đạo hàm của hàm số $y = \cos x$ là

A. $y' = \sin x$.

B. $y' = -\sin x$.

C. $y' = \cos x$.

D. $y' = -\cos x$.

Lời giải.

Đạo hàm của $y = \cos x$ là $y' = (\cos x)' = -\sin x$.

Chọn đáp án B .... □

Câu 9. Xét mẫu số liệu ghép nhóm cho bởi bảng sau:

Nhóm	Giá trị đại diện	Tần số
$[a_1; a_2)$	x_1	n_1
$[a_2; a_3)$	x_2	n_2
$\dots$	$\dots$	$\dots$
$[a_m; a_{m+1})$	x_m	n_m
		n

Số trung bình cộng của mẫu số liệu ghép nhóm đó bằng

A. $\overline{x} = \sqrt{\dfrac{n_1x_1^2 + n_2x_2^2 + \cdots + n_mx_m^2}{m}}$.

B. $\overline{x} = \sqrt{\dfrac{n_1x_1^2 + n_2x_2^2 + \cdots + n_mx_m^2}{n}}$.

C. $\overline{x} = \dfrac{n_1x_1 + n_2x_2 + \cdots + n_mx_m}{m}$.

D. $\overline{x} = \dfrac{n_1x_1 + n_2x_2 + \cdots + n_mx_m}{n}$.

Lời giải.

Theo công thức số trung bình cộng, ta có $\overline{x} = \dfrac{n_1x_1 + n_2x_2 + \cdots + x_mx_m}{n}$.

Chọn đáp án D .... $\square$

Câu 10. Cho các biến cố A và B thỏa mãn $\mathrm{P}(A) > 0$, $\mathrm{P}(B) > 0$. Khi đó $\mathrm{P}(A|B)$ bằng biểu thức nào dưới đây?

A. $\dfrac{\mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B|A)}{\mathrm{P}(B)}$.

B. $\dfrac{\mathrm{P}(B) \cdot \mathrm{P}(B|A)}{\mathrm{P}(A)}$.

C. $\dfrac{\mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B|A)}$.

D. $\dfrac{\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(B) \cdot \mathrm{P}(B|A)}$.

Lời giải.

Theo công thức xác suất có điều kiện, ta có $\mathrm{P}(A|B) = \dfrac{\mathrm{P}(AB)}{\mathrm{P}(B)}$.

Theo công thức nhân xác suất, ta có $\mathrm{P}(AB) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B|A)$.

Do đó $\mathrm{P}(A|B) = \dfrac{\mathrm{P}(AB)}{\mathrm{P}(B)} = \dfrac{\mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B|A)}{\mathrm{P}(B)}$.

Chọn đáp án A .... $\square$

Câu 11. Độ cao các bậc cầu thang so với mặt sàn tầng 1 của một căn nhà theo thứ tự lập thành một cấp số cộng với công sai $d = 16$ cm, bậc thứ nhất có độ cao $u_1 = 16$ cm. Bậc thứ năm có độ cao so với mặt sàn tầng 1 bằng

A. 21 cm. **B.** 80 cm. **C.** 96 cm. **D.** 64 cm.

Lời giải.

Gọi u_n $(n \in \mathbb{N}, n \geq 1)$ là độ cao của bậc thứ n so với mặt sàn tầng 1.

Khi đó (u_n) là một cấp số cộng với $u_1 = 16$, $d = 16$.

Độ cao của bậc thứ năm bằng $u_5 = u_1 + 4d = 16 + 4 \cdot 16 = 80$ cm.

Chọn đáp án B .... $\square$

Câu 12. Một đồ chơi có dạng khối chóp cụt tứ giác đều với độ dài hai cạnh đáy lần lượt là 2 cm và 12 cm, chiều cao là 18 cm. Thể tích của đồ chơi đó bằng

A. $9\,288$ cm^3. **B.** $1\,048$ cm^3. **C.** $3\,096$ cm^3. **D.** $1\,032$ cm^3.

Lời giải.

Thể tích khối chóp cụt đều có công thức $V = \dfrac{1}{3} \cdot h \cdot \left(S + S' + \sqrt{SS'}\right)$, trong đó

- Chiều cao khối chóp là $h = 18$ cm.

- Diện tích đáy lớn $S = 12^2 = 144\ \text{cm}^2$.
- Diện tích đáy nhỏ $S' = 2^2 = 4\ \text{cm}^2$.

Do đó thể tích của đồ chơi là $V = \dfrac{1}{3} \cdot 18 \cdot \left(144 + 4 + \sqrt{144 \cdot 4}\right) = 1\,032\ \text{cm}^3$.

Chọn đáp án (D) .... □

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý **a)**, **b)**, **c)**, **d)** ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Cho hàm số $f(x) = 2\sin x - x$.

a $f'(x) = 2\cos x - 1$.

b $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.

c Tập hợp nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$ trên đoạn $[0;\pi]$ là $\left\{\dfrac{\pi}{3}\right\}$.

d) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = 2\sin x - x$ trên đoạn $[0;\pi]$ là $\sqrt{3} - \dfrac{\pi}{3}$.

Lời giải.

a) Đúng.

Ta có $f(x) = 2\sin x - x$ nên $f'(x) = 2\cos x - 1$. (1)

b) Đúng.

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$. (2)

c) Đúng.

Theo (2), trên đoạn $[0;\pi]$, phương trình $f'(x) = 0$ có nghiệm duy nhất là $x = \dfrac{\pi}{3}$.

d) Sai.

Ta có $f(0) = 0$, $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} - \dfrac{\pi}{3}$, $f(\pi) = -\pi$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = 2\sin x - x$ trên đoạn $[0;\pi]$ là $-\pi$.

Chọn đáp án | a đúng | b đúng | c đúng | d sai | .... □

Câu 2. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$, $y = \dfrac{1}{2}\sqrt{x}$ và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 4$.

a Gọi V_1 là thể tích của khối tròn xoay được tạo khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 0$, $y = \sqrt{x}$, $x = 0$, $x = 4$ quanh trục Ox. Khi đó, $V_1 = \pi \displaystyle\int_0^4 x\,\mathrm{d}x$.

b) Gọi V_2 là thể tích của khối tròn xoay được tạo khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 0$, $y = \dfrac{1}{2}\sqrt{x}$, $x = 0$, $x = 4$ quanh trục Ox. Khi đó, $V_2 = \displaystyle\int_0^4 \dfrac{1}{4}x\,\mathrm{d}x$.

c) Giá trị của biểu thức $V_1 - V_2$ bằng 12π.

d) Một vật thể $\mathscr{A}$ có hình dạng được tạo khi quay hình phẳng D quanh trục Ox (đơn vị tính trên hai trục tính theo centimét). Thể tích của vật thể đó (làm tròn đến hàng phần mười theo đơn vị centimét khối) là $37{,}7\ \text{cm}^3$.

Lời giải.

a) Đúng.

Ta có $V_1 = \pi \displaystyle\int_0^4 \left(\sqrt{x}\right)^2 \mathrm{d}x = \pi \int_0^4 x \,\mathrm{d}x = 8\pi.$ (1)

b) Sai.

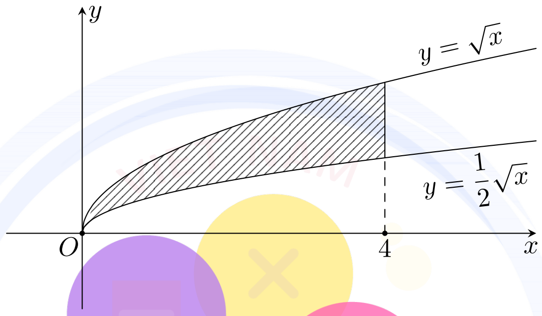
Ta có $V_2 = \pi \displaystyle\int_0^4 \left(\frac{1}{2}\sqrt{x}\right)^2 \mathrm{d}x = \pi \int_0^4 \frac{1}{4} x \,\mathrm{d}x = 2\pi.$ (2)

c) Sai.

Từ (1) và (2), ta được $V_1 - V_2 = 6\pi$.

d) Sai.

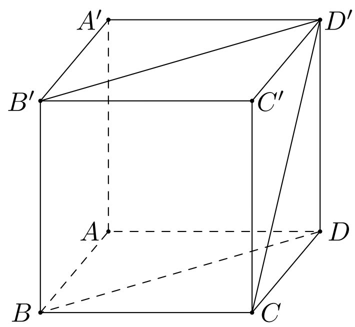
Hình phẳng D được minh họa như hình vẽ dưới đây.



Thể tích của vật thể $\mathscr{A}$ là $V_1 - V_2 = 6\pi \approx 18{,}8\ \mathrm{cm}^3$.

Chọn đáp án | a đúng | b sai | c sai | d sai | .... □

Câu 3. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$.



a) Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và $B'C'$ bằng a.

b) Góc giữa hai đường thẳng AB và $B'D'$ bằng 45°.

c) Góc giữa đường thẳng CD' và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60°.

d) Góc nhị diện $[(BCC'B'), BB', (BDD'B')]$ có số đo bằng 45°.

Lời giải.

a) Đúng.

Theo tính chất hình lập phương, ta có $AB \perp BB'$ tại B, $B'C' \perp BB'$ tại B'.

Do đó, BB' là đoạn vuông góc chung của AB và $B'C'$.

Suy ra $\mathrm{d}(AB, B'C') = BB' = a$.

b) Đúng.

Theo tính chất hình lập phương, ta có $AB \parallel A'B'$.

Do đó $\left(AB, B'D'\right) = \left(A'B', B'D'\right) = \widehat{A'B'D'} = 45^\circ$.

c) Sai.

Theo tính chất hình lập phương, ta có $DD' \perp (ABCD)$ tại D

Do đó, CD là hình chiếu vuông góc của CD' lên mặt phẳng $(ABCD)$.

Suy ra góc giữa đường thẳng CD' và mặt phẳng $(ABCD)$ cũng chính là góc $\widehat{D'CD} = 45^\circ$ (vì $\triangle CD'D$ vuông cân tại D).

d) Đúng.

Ta có $(BCC'B') \cap (BDD'B') = BB'$ và $BC \perp BB'$ (trong mặt phẳng $(BCC'B')$), $BD \perp BB'$ (trong mặt phẳng $(BDD'B')$).

Do đó, góc nhị diện $[(BCC'B'), BB', (BDD'B')]$ bằng góc $\widehat{CBD} = 45^\circ$.

Chọn đáp án | a đúng | b đúng | c sai | d đúng | .... □

Câu 4. Một két nước ngọt đựng 24 chai nước có khối lượng và hình thức bề ngoài như nhau, trong đó có 16 chai loại I và 8 chai loại II. Bác Tùng lần lượt lấy ra ngẫu nhiên hai chai (lấy không hoàn lại). Xét các biến cố A: "Lần thứ nhất lấy ra chai nước loại I"; B: "Lần thứ hai lấy ra chai nước loại I".

a) $\mathrm{P}(B \mid A) = \dfrac{16}{23}$. **b)** $\mathrm{P}\left(B \mid \overline{A}\right) = \dfrac{15}{23}$. **c** $\mathrm{P}\left(\overline{B} \mid A\right) = \dfrac{8}{23}$. **d** $\mathrm{P}\left(\overline{B} \mid \overline{A}\right) = \dfrac{7}{23}$.

Lời giải.

Số cách lấy 1 chai ở lần 1 là 24.

Số cách lấy ra được chai nước loại I ở lần 1 là 16.

Suy ra xác suất lấy ra được chai nước loại I ở lần 1 là $\mathrm{P}(A) = \dfrac{16}{24} = \dfrac{2}{3}$.

Do đó, xác suất lấy ra được chai nước loại II ở lần 1 là $\mathrm{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \mathrm{P}(A) = 1 - \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}$.

a) Sai.

Nếu lần thứ nhất lấy ra chai loại I thì két còn 23 chai nước, trong đó có 15 chai loại I, 8 chai loại II. Suy ra $\mathrm{P}(B \mid A) = \dfrac{15}{23}$.

b) Sai.

Nếu lần thứ nhất lấy ra chai loại II thì két còn 23 chai nước, trong đó có 16 chai loại I, 7 chai loại II. Suy ra $\mathrm{P}\left(B \mid \overline{A}\right) = \dfrac{16}{23}$.

c) Đúng.

Nếu lần thứ nhất lấy ra chai loại I thì két còn 23 chai nước, trong đó có 15 chai loại I, 8 chai loại II. Suy ra $\mathrm{P}\left(\overline{B} \mid A\right) = \dfrac{8}{23}$.

d) Đúng.

Nếu lần thứ nhất lấy ra chai loại II thì két còn 23 chai nước, trong đó có 16 chai loại I, 7 chai loại II. Suy ra $\mathrm{P}\left(\overline{B} \mid \overline{A}\right) = \dfrac{7}{23}$.

Chọn đáp án | a sai | b sai | c đúng | d đúng | .... □

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1. Trong điều kiện nuôi cấy thích hợp, cứ 20 phút vi khuẩn *E. coli* lại phân đôi một lần. Giả sử lúc đầu có 5 vi khuẩn và sau n phút ($n \in \mathbb{Z}$) có hơn 2 000 vi khuẩn. Giá trị nhỏ nhất của n là bao nhiêu?

Đáp án: 173

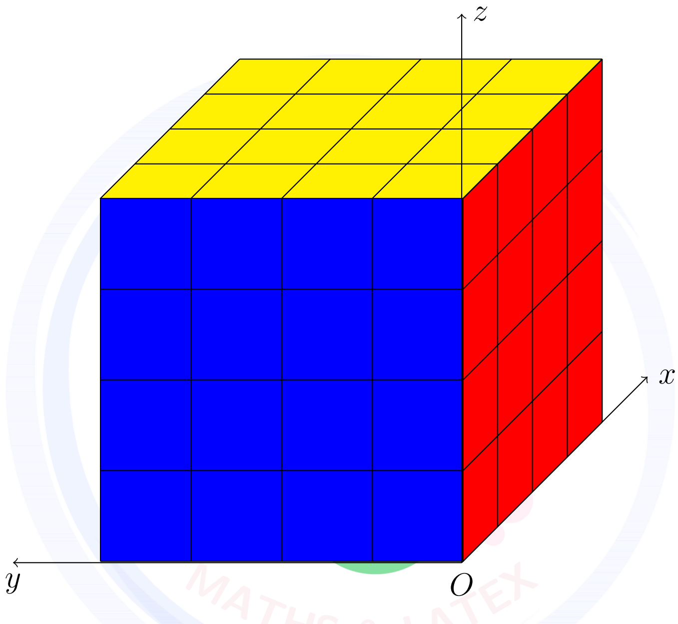
Lời giải.

Sau n phút số vi khuẩn *E. coli* là $5 \cdot 2^{\frac{n}{20}}$. Để sau n phút có hơn 2 000 vi khuẩn thì

$$5 \cdot 2^{\frac{n}{20}} > 2\,000 \Leftrightarrow n > 40 \cdot \log_2 20 \approx 172{,}88.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của n thoả mãn bài toán là 173.

Câu 2. Một khối rubik 4×4 được gắn với hệ toạ độ $Oxyz$ có đơn vị trên mỗi trục bằng độ dài cạnh của hình lập phương nhỏ (xem hình bên dưới). Xét mặt phẳng (P) đi qua ba điểm $A(0;3;4)$, $B(2;1;4)$, $C(1;0;0)$. Góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Oxy) bằng bao nhiêu độ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?



Đáp án: 71

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (2;-2;0)$, $\overrightarrow{AC} = (1;-3;-4)$, $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (8;8;-4)$.

Suy ra mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n}_1 = (2;2;-1)$.

Mặt phẳng (Oxy) có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{k} = (0;0;1)$.

Khi đó

$$\cos\left((P),(Oxy)\right) = \frac{\left|\overrightarrow{n}_1 \cdot \overrightarrow{k}\right|}{\left|\overrightarrow{n}_1\right| \cdot \left|\overrightarrow{k}\right|} = \frac{|2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + (-1) \cdot 1|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{1}{3}.$$

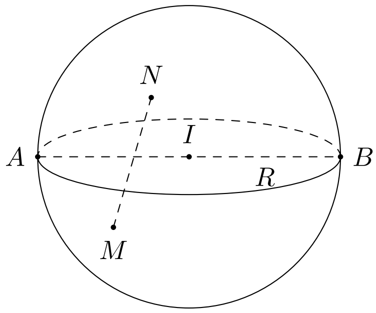
Suy ra $((P),(Oxy)) \approx 71^\circ$.

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Oxy) bằng khoảng 71°.

Câu 3. Khi đặt hệ toạ độ $Oxyz$ vào không gian với đơn vị trên trục tính theo kilômét, người ta thấy rằng một không gian phủ sóng điện thoại có dạng một hình cầu (S) (tập hợp những điểm nằm trong và nằm trên mặt cầu tương ứng). Biết mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+5=0$. Khoảng cách xa nhất giữa hai điểm thuộc vùng phủ sóng là bao nhiêu kilômét?

Đáp án: 6

Lời giải.



Ta có

$$x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+5=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=3^2.$$

Suy ra mặt cầu (S) có tâm là $I(1;2;3)$ và bán kính $R=3$.

Gọi M, N là hai điểm bất kì nằm trên hoặc nằm trong mặt cầu (S).

Ta có $MN \leq IM+IN=2R=6$, suy ra MN đạt giá trị lớn nhất bằng 6, đạt được khi MN là đường kính của mặt cầu (S).

Vậy khoảng cách xa nhất giữa hai điểm thuộc vùng phủ sóng là 6 kilômét.

Câu 4. Một hãng điện thoại đưa ra một quy luật bán buôn cho từng đại lí, đó là đại lí nhập càng nhiều điện thoại của hãng thì giá bán buôn một chiếc điện thoại càng giảm. Cụ thể, nếu đại lí mua x điện thoại thì giá tiền của mỗi điện thoại là $6\,000-3x$ (nghìn đồng), $x\in\mathbb{N}^*$, $x<2\,000$. Đại lí nhập cùng một lúc bao nhiêu chiếc điện thoại thì hãng có thể thu về nhiều tiền nhất từ đại lí đó?

Đáp án: $1\,000$

Lời giải.

Số tiền hãng thu được khi đại lí nhập x chiếc điện thoại là $f(x)=x(6\,000-3x)$.

Ta có $f'(x)=-6x+6\,000$.

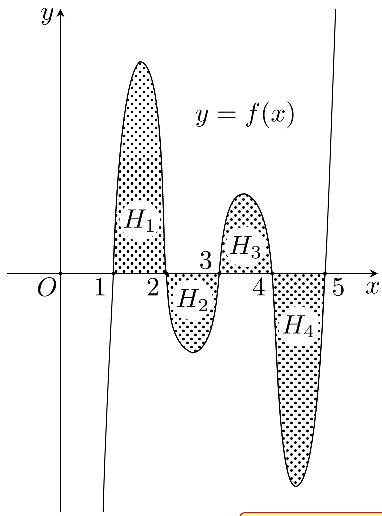
Khi đó $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1\,000$.

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như sau:

x	0		$1\,000$		$2\,000$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$3\,000\,000$	$\searrow$	0

Vậy đại lí nhập cùng lúc $1\,000$ chiếc điện thoại thì hãng có thể thu nhiều tiền nhất từ đại lí đó với $3\,000\,000\,000$ (đồng).

Câu 5. Gọi H_1, H_2, H_3, H_4 là các hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số liên tục $y = f(x)$ và trục hoành với x lần lượt thuộc các đoạn $[1;2]$, $[2;3]$, $[3;4]$, $[4;5]$ (tham khảo hình vẽ bên). Biết rằng, các hình H_1, H_2, H_3, H_4 lần lượt có diện tích bằng $\frac{9}{4}$, $\frac{11}{12}$, $\frac{11}{12}$ và $\frac{9}{4}$. Giá trị $\int\limits_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng bao nhiêu?



Đáp án: 0

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\int\limits_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x &= \int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_3^4 f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_4^5 f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int\limits_1^2 |f(x)|\,\mathrm{d}x - \int\limits_2^3 |f(x)|\,\mathrm{d}x + \int\limits_3^4 |f(x)|\,\mathrm{d}x - \int\limits_4^5 |f(x)|\,\mathrm{d}x \\ &= S_{H_1} - S_{H_2} + S_{H_3} - S_{H_4} \\ &= \frac{9}{4} - \frac{11}{12} + \frac{11}{12} - \frac{9}{4} = 0.\end{aligned}$$

Câu 6. Tất cả các học sinh của trường Hạnh Phúc đều tham gia câu lạc bộ bóng chuyền hoặc bóng rổ, mỗi học sinh chỉ tham gia đúng 1 câu lạc bộ. Có 60% học sinh của trường tham gia câu lạc bộ bóng chuyền và 40% học sinh của trường tham gia câu lạc bộ bóng rổ. Số học sinh nữ chiếm 65% trong câu lạc bộ bóng chuyền và 25% trong câu lạc bộ bóng rổ. Chọn ngẫu nhiên 1 học sinh. Xác suất chọn được học sinh nữ là bao nhiêu?

Đáp án: 0,49

Lời giải.

Xét các biến cố:

- A: "Chọn được học sinh thuộc câu lạc bộ bóng chuyền".
- B: "Chọn được học sinh nữ".

Theo giả thiết, ta có

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(A) = 0{,}6 \\ &\mathrm{P}\left(\overline{A}\right) = 0{,}4 \\ &\mathrm{P}(B \mid A) = 0{,}65 \\ &\mathrm{P}\left(B \mid \overline{A}\right) = 0{,}25.\end{aligned}$$

Theo công thức xác suất toàn phần, xác suất chọn được học sinh nữ là

$$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A)\cdot\mathrm{P}(B\mid A)+\mathrm{P}\left(\overline{A}\right)\cdot\mathrm{P}\left(B\mid\overline{A}\right)=0{,}6\cdot 0{,}65+0,4\cdot 0{,}25=0{,}49.$$

BẢNG ĐÁP ÁN

PHẦN I.

Câu 1. A	Câu 2. B	Câu 3. D	Câu 4. B	Câu 5. D	Câu 6. A
Câu 7. C	Câu 8. B	Câu 9. D	Câu 10. A	Câu 11. B	Câu 12. D

PHẦN II.

Câu 1. a Đ b Đ c Đ d S	Câu 2. a Đ b S c S d S
Câu 3. a Đ b Đ c S d Đ	Câu 4. a S b S c Đ d Đ

PHẦN III.

Câu 1. 173	Câu 2. 71	Câu 3. 6	Câu 4. 1 000	Câu 5. 0	Câu 6. 0,49

CHƯƠNG TRÌNH GIÁO DỤC THPT 2018

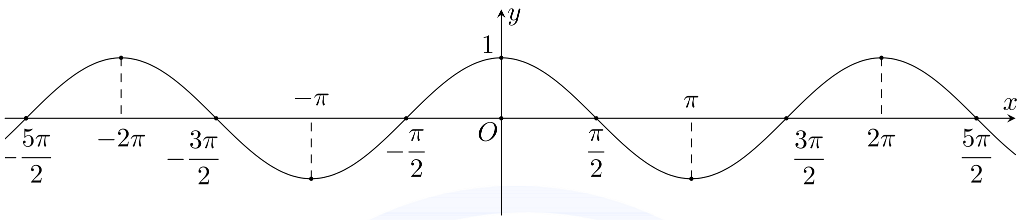
Môn: TOÁN

Thời gian làm bài: 90 phút (không kể phát đề)

Họ và tên thí sinh: .... *Số báo danh:* .... **Mã đề: 005**

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ lựa chọn một phương án.

Câu 1. Hàm số nào dưới đây có đồ thị như hình vẽ?



A. $y = \sin x$. **B.** $y = \cos x$. **C.** $y = \tan x$. **D.** $y = \cot x$.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị, ta thấy:

- Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.
- Đồ thị hàm số đi qua các điểm $(0;1)$, $\left(\frac{\pi}{2};0\right)$.

Suy ra đồ thị ở hình vẽ là đồ thị của hàm số $y = \cos x$.

Chọn đáp án B .... □

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		3		$+\infty$
y'		$+$	‖	$+$	
y	1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	1

Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt là

A. $x = 1$, $y = 1$. **B.** $x = 1$, $y = 3$. **C.** $x = 3$, $y = 3$. **D.** $x = 3$, $y = 1$.

Lời giải.

Quan sát bảng biến thiên, ta thấy:

- $\lim\limits_{x \to 3^-} y = +\infty$;
- $\lim\limits_{x \to -\infty} y = 1$;
- $\lim\limits_{x \to 3^+} y = +\infty$;
- $\lim\limits_{x \to +\infty} y = 1$.

Suy ra đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đường tiệm cận đứng là $x = 3$ và đường tiệm cận ngang là $y = 1$.

Chọn đáp án D .... □

Câu 3. Hàm số nào sau đây là một nguyên hàm của hàm số $y = \dfrac{1}{x \ln 3}$?

A. $y = \ln x$. **B.** $y = \ln(3x)$. **C.** $y = \log_3 x$. **D.** $y = \ln \dfrac{x}{3}$.

Lời giải.

Vì $\left(\log_3 x\right)' = \dfrac{1}{x \ln 3}$ nên $\log_3 x$ là một nguyên hàm của hàm số $y = \dfrac{1}{x \ln 3}$.

Chọn đáp án C .... □

Câu 4. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. $\displaystyle\int (\sin x + \cos x)\mathrm{d}x = \int \sin x\,\mathrm{d}x + \int \cos x\,\mathrm{d}x$.

B. $\displaystyle\int (\sin x + \cos x)\mathrm{d}x = \int \sin x\,\mathrm{d}x - \int \cos x\,\mathrm{d}x$.

C. $\displaystyle\int (\sin x + \cos x)\mathrm{d}x = -\int \sin x\,\mathrm{d}x + \int \cos x\,\mathrm{d}x$.

D. $\displaystyle\int (\sin x + \cos x)\mathrm{d}x = -\int \sin x\,\mathrm{d}x - \int \cos x\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Áp dụng tính chất $\displaystyle\int \left[f(x) + g(x)\right]\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x$, ta có

$$\int (\sin x + \cos x)\mathrm{d}x = \int \sin x\,\mathrm{d}x + \int \cos x\,\mathrm{d}x.$$

Chọn đáp án A .... □

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{z-3}{4}$ có một vectơ chỉ phương là

A. $\vec{u}_1 = (1; -2; 3)$. **B.** $\vec{u}_2 = (2; 3; 4)$. **C.** $\vec{u}_3 = (1; 2; 3)$. **D.** $\vec{u}_4 = (-1; 2; -3)$.

Lời giải.

Đường thẳng $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{z-3}{4}$ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}_3 = (2; 3; 4)$.

Chọn đáp án B .... □

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, phương trình nào sau đây là phương trình của mặt cầu có tâm $I(7; 6; -5)$ và bán kính $R = 9$?

A. $(x+7)^2 + (y+6)^2 + (z-5)^2 = 81$. **B.** $(x+7)^2 + (y+6)^2 + (z-5)^2 = 9$.

C. $(x-7)^2 + (y-6)^2 + (z+5)^2 = 81$. **D.** $(x-7)^2 + (y-6)^2 + (z+5)^2 = 9$.

Lời giải.

Mặt cầu có tâm $I(7; 6; -5)$ và bán kính $R = 9$ có phương trình là

$$(x-7)^2 + (y-6)^2 + (z+5)^2 = 81.$$

Chọn đáp án C .... □

Câu 7. Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thoả mãn $f(x) \leq M$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và tồn tại $a \in \mathbb{R}$ sao cho $f(a) = M$ thì

A. Hàm số đạt giá trị lớn nhất bằng M. **B.** Hàm số đạt giá trị cực tiểu bằng M.

C. Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng M. **D.** Hàm số đạt giá trị cực đại bằng M.

Lời giải.

Theo lí thuyết, ta có M là giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$.

Chọn đáp án (A) .... □

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, tọa độ của vectơ $\vec{u} = 2\vec{k} - 3\vec{j} + 4\vec{i}$ là

A. $(2; -3; 4)$. **B.** $(2; 3; 4)$. **C.** $(4; 3; 2)$. **D.** $(4; -3; 2)$.

Lời giải.

Ta có $\vec{u} = 2\vec{k} - 3\vec{j} + 4\vec{i} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$. Suy ra $\vec{u} = (4; -3; 2)$.

Chọn đáp án (D) .... □

Câu 9. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{0,5} x > 3$ là

A. $\left(\log_{0,5} 3; +\infty\right)$. **B.** $\left(-\infty; \log_{0,5} 3\right)$. **C.** $(0; 0{,}125)$. **D.** $(0; 3^{0,5})$.

Lời giải.

Điều kiện $x > 0$.

Ta có $\log_{0,5} x > 3 \Leftrightarrow x < 0{,}5^3 \Leftrightarrow x < 0{,}125$.

Kết hợp điều kiện, ta có tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = (0; 0{,}125)$.

Chọn đáp án (C) .... □

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u}_1 = (x_1; y_1; z_1)$, $\vec{u}_2 = (x_2; y_2; z_2)$. Vectơ $\vec{u}_1 + \vec{u}_2$ có tọa độ là

A. $(x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2)$. **B.** $(x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2)$.

C. $(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$. **D.** $(x_1 - x_2; y_1 + y_2; z_1 - z_2)$.

Lời giải.

Theo biểu thức tọa độ của phép toán cộng hai vectơ, ta có $\vec{u}_1 + \vec{u}_2 = (x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2)$.

Chọn đáp án (B) .... □

Câu 11. Một mẫu số liệu ghép nhóm về chiều cao của một lớp (đơn vị là centimét) có phương sai là 6,25. Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu đó bằng

A. 2,5 cm. **B.** 12,5 cm. **C.** 3,125 cm. **D.** 42,25 cm.

Lời giải.

Ta có độ lệch chuẩn là $s = \sqrt{6{,}25} = 2{,}5$.

Chọn đáp án (A) .... □

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(-1) = 1$ và $f'(-1) = -4$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $M(-1; 1)$ là

A. $y = -4x - 5$. **B.** $y = -4x + 3$. **C.** $y = 4x + 5$. **D.** $y = -4x - 3$.

Lời giải.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $M(-1; 1)$ có dạng

$$y = f'(-1)(x + 1) + f(-1).$$

Theo giả thiết, ta có $f'(-1) = -4$ và $f(-1) = 1$.

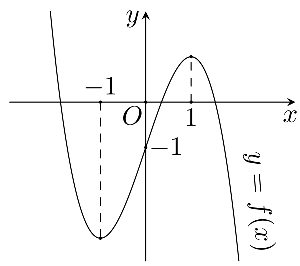
Suy ra phương trình tiếp tuyến cần tìm là

$$y = -4(x+1) + 1 \Leftrightarrow y = -4x - 3.$$

Chọn đáp án D ☐

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý **a)**, **b)**, **c)**, **d)** ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và đồ thị như hình bên.



a) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.

b) Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x_0 = -1$.

c) Đạo hàm của hàm số nhận giá trị không âm trên khoảng $(-1; 1)$.

d) Giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-1; 0]$ bằng 1.

Lời giải.

a) **Đúng**.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.

b) **Đúng**.

Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x_0 = -1$.

c) **Đúng**.

Vì hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$ nên đạo hàm của hàm số nhận giá trị không âm trên khoảng đó.

d) **Sai**.

Giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-1; 0]$ bằng -1.

Chọn đáp án

a đúng	b đúng	c đúng	d sai

☐

Câu 2. Vào năm 2014, dân số nước ta khoảng 90,7 triệu người. Giả sử, dân số nước ta sau t năm được xác định bởi hàm số $S(t)$ (đơn vị: triệu người), trong đó tốc độ gia tăng dân số được cho bởi $S'(t) = 1{,}2698 \cdot \mathrm{e}^{0{,}014t}$, với t là số năm kể từ năm 2014, $S'(t)$ tính bằng triệu người/năm.

a) $S(t)$ là một nguyên hàm của $S'(t)$.

b) $S(t) = 90{,}7 \cdot \mathrm{e}^{0{,}014t} + 90{,}7$.

c) Theo công thức trên, tốc độ tăng dân số nước ta năm 2034 (làm tròn đến hàng phần mười của triệu người/năm) khoảng 1,7 triệu người/năm.

d) Theo công thức trên, dân số nước ta năm 2034 (làm tròn đến hàng đơn vị của triệu người) là khoảng 120 triệu người.

Lời giải.

a) **Đúng**.

Ta có $S(t)$ là một nguyên hàm của $S'(t)$.

b) **Sai**.

Ta có

$$\begin{aligned}\int S'(t)\,\mathrm{d}t &= \int 1{,}2698\cdot \mathrm{e}^{0{,}014t}\,\mathrm{d}t\\ &= 1{,}2698\int \left(\mathrm{e}^{0{,}014}\right)^t\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1{,}2698\cdot \mathrm{e}^{0{,}014t}}{0{,}014}+C\\ &= 90{,}7\cdot \mathrm{e}^{0{,}014t}+C.\end{aligned}$$

Vì $S(0)=90{,}7$ nên $C=0$. Suy ra $S(t)=90{,}7\cdot \mathrm{e}^{0{,}014t}$.

c) **Đúng**.

Tốc độ tăng dân số ở nước ta năm 2 034 là $S'(20)=1{,}2698\cdot \mathrm{e}^{0{,}014\cdot 20}\approx 1{,}7$ (triệu người).

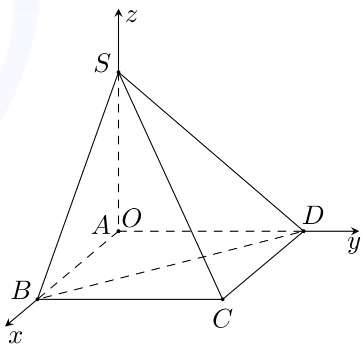
d) **Đúng**.

Dân số nước ta năm 2 034 là $S(20)=90{,}7\cdot \mathrm{e}^{0{,}014\cdot 20}\approx 120$ (triệu người).

Chọn đáp án

a đúng	b sai	c đúng	d đúng

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho hình chóp $S.ABCD$ có $S(0;0;3{,}5)$, $ABCD$ là hình chữ nhật với $A(0;0;0)$, $B(4;0;0)$, $D(0;10;0)$ như hình bên.



a) Tọa độ của điểm C là $(4;10;0)$.

b) Phương trình mặt phẳng (SBD) là $\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{10}-\dfrac{z}{3{,}5}=1$.

c) Tọa độ của vectơ $\overrightarrow{SC}$ là $(4;10;-3{,}5)$.

d) Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SBD) (làm tròn đến hàng đơn vị của độ) là 20°.

Lời giải.

a) **Đúng**.

Gọi $C(x_C;y_C;z_C)$.

Ta có $\overrightarrow{AD}=(0;10;0)$, $\overrightarrow{BC}=(x_C-4;y_C;z_C)$.

Vì $ABCD$ là hình chữ nhật nên $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$.

Suy ra $C(4;10;0)$.

b) **Sai**.

Ta có $B(4;0;0)$, $D(0;10;0)$, $S(0;0;3{,}5)$ lần lượt thuộc các trục tọa độ Ox, Oy, Oz.

Phương trình mặt phẳng (SBD) là $\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{10}+\dfrac{z}{3{,}5}=1$.

c) **Đúng**.

Ta có $\overrightarrow{SC} = (x_C - x_S; y_C - y_S; z_C - z_S) = (4; 10; -3{,}5)$.

d) **Sai**.

Mặt phẳng (SBD) có phương trình là

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{10} + \frac{z}{3{,}5} = 1 \Leftrightarrow 35x + 14y + 40z - 140 = 0.$$

Suy ra $\vec{n} = (35; 14; 40)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (SBD).

Khi đó

$$\sin\left(SC, (SBD)\right) = \frac{\left|\overrightarrow{SC} \cdot \vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{SC}\right| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|4 \cdot 35 + 10 \cdot 14 + (-3{,}5) \cdot 40|}{\sqrt{4^2 + 10^2 + (-3{,}5)^2} \cdot \sqrt{35^2 + 14^2 + 40^2}} = \frac{280\sqrt{53}}{9063}.$$

Vậy góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SBD) là khoảng $13°$.

Chọn đáp án | a đúng | b sai | c đúng | d sai | .... □

Câu 4. Khi điều tra sức khoẻ nhiều người cao tuổi ở một địa phương, người ta thấy rằng có 40% người cao tuổi bị bệnh tiểu đường. Bên cạnh đó, số người bị bệnh huyết áp cao trong những người bị bệnh tiểu đường là 70%, trong những người không bị bệnh tiểu đường là 25%. Chọn ngẫu nhiên 1 người cao tuổi để kiểm tra sức khỏe.

a) Xác suất chọn được người bị bệnh tiểu đường là 0,4.

b) Xác suất chọn được người bị bệnh huyết áp cao, biết người đó bị bệnh tiểu đường, là 0,7.

c) Xác suất chọn được người bị bệnh huyết áp cao, biết người đó không bị bệnh tiểu đường, là 0,75.

d) Xác suất chọn được người bị bệnh huyết áp cao là 0,8.

Lời giải.

Xét các biến cố:

- A: "Chọn được người bị bệnh tiểu đường";
- B: "Chọn được người bị bệnh huyết áp cao".

a) **Đúng**.

Xác suất chọn được người bị bệnh tiểu đường là $\mathrm{P}(A) = 0{,}4$.

b) **Đúng**.

Xác suất chọn được người bị bệnh huyết áp cao, biết người đó bị bệnh tiểu đường là

$$\mathrm{P}(B|A) = 0{,}7.$$

c) **Sai**.

Xác suất chọn được người bị bệnh huyết áp cao, biết người đó không bị bệnh tiểu đường là

$$\mathrm{P}(B|\overline{A}) = 0{,}25.$$

d) Sai.

Xác suất chọn được người bị bệnh huyết áp cao là

$$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A)\cdot\mathrm{P}(B|A)+\mathrm{P}\left(\overline{A}\right)\cdot\mathrm{P}\left(B|\overline{A}\right)=0{,}4\cdot 0{,}7+0{,}6\cdot 0{,}25=0{,}43.$$

Chọn đáp án | a đúng | b đúng | c sai | d sai | .... □

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1. Chỉ số hay độ pH của một dung dịch được tính theo công thức $\mathrm{pH}=-\log[H^+]$ với $[H^+]$ là nồng độ ion hydrogen. Độ pH của một loại sữa chua có $[H^+]=10^{-4{,}5}$ là bao nhiêu?

Đáp án: 4,5

Lời giải.

Độ pH của loại sữa chua có $[H^+]=10^{-4{,}5}$ là $-\log 10^{-4{,}5}=4{,}5$.

Câu 2. Trong một đợt khám sức khỏe của 50 học sinh nam lớp 12, ta được kết quả như bảng sau:

Nhóm	[160; 164)	[164; 168)	[168; 172)	[172; 176)	[176; 180)	
Tần số	3	8	18	12	9	$n=50$

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm cho ở bảng trên bằng bao nhiêu centimét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

Đáp án: 4,5

Lời giải.

Ta có bảng sau:

Nhóm	Giá trị đại diện	Tần số
[160; 164)	162	3
[164; 168)	166	8
[168; 172)	170	18
[172; 176)	174	12
[176; 180)	178	9
		$n=50$

Chiều cao trung bình là

$$\overline{x}=\frac{1}{50}(162\cdot 3+166\cdot 8+170\cdot 18+174\cdot 12+178\cdot 9)\approx 171{,}28\text{ (cm)}.$$

Phương sai của mẫu số liệu là

$$\begin{aligned}s_x^2&=\frac{1}{n}\left[f_1(c_1-\overline{x})^2+f_2(c_2-\overline{x})^2+\ldots+f_k(c_k-\overline{x})^2\right]\\&=\frac{1}{50}\Big[3(162-171{,}28)^2+8(166-171{,}28)^2+18(170-171{,}28)^2+12(174-171{,}28)^2\\&\quad+9(178-171{,}28)^2\Big]\\&\approx 20{,}1216.\end{aligned}$$

Suy ra độ lệch chuẩn $s_x=\sqrt{s_x^2}=\sqrt{20{,}1216}\approx 4{,}5$ (cm).

Câu 3. Một người gửi tiết kiệm một khoản tiền cố định theo thể thức lãi kép 0,5%/tháng. Giả sử, trong nhiều tháng lãi suất không đổi và người đó không rút tiền ra. Sau ít nhất bao nhiêu tháng gửi tiết kiệm số tiền có được vượt quá 1,1 lần số tiền gửi ban đầu? **Đáp án: 20**

Lời giải.

Giả sử số tiền người đó gửi là A (đồng).
Sau n tháng ($n \in \mathbb{N}^*$) thì số tiền người đó nhận được là $A(1+0{,}5\%)^n$.
Vì số tiền tiết kiệm được vượt quá 1,1 lần số tiền gửi ban đầu nên ta có

$$A(1+0{,}5\%)^n > 1{,}1A \Leftrightarrow (1+0{,}5\%)^n > 1{,}1 \Leftrightarrow n > \log_{1{,}005} 1{,}1 \Leftrightarrow n > 19{,}11.$$

Mà $n \in \mathbb{N}^*$ suy ra $n = 20$.
Vậy sau ít nhất 20 tháng thì số tiền gửi tiết kiệm có được vượt quá 1,1 lần số tiền gửi ban đầu.

Câu 4. Bạn Hoa cần gấp một hộp quà có dạng hình lăng trụ tứ giác đều với diện tích toàn phần là 200 cm^2. Hộp quà mà bạn Hoa gấp được có thể tích lớn nhất bằng bao nhiêu centimét khối (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)? **Đáp án: 192**

Lời giải.

Gọi độ dài cạnh đáy và chiều cao hộp quà lần lượt là x cm và y cm, $(x > 0,\ y > 0)$.
Theo giả thiết, ta có $2x^2 + 4xy = 200 \Rightarrow y = \dfrac{50}{x} - \dfrac{x}{2}$ và $0 < x < 10$ (vì $y > 0$).
Xét hàm số $V(x) = x^2\left(\dfrac{50}{x} - \dfrac{x}{2}\right) = 50x - \dfrac{1}{2}x^3$ $(0 < x < 10)$ là thể tích của hộp quà mà bạn Hoa gấp được.

Ta có $V'(x) = 50 - \dfrac{3}{2}x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = \sqrt{\dfrac{100}{3}} & \text{(nhận)} \\ x = -\sqrt{\dfrac{100}{3}} & \text{(loại).} \end{array}\right.$

Bảng biến thiên của hàm số $V(x)$ như sau:

x	0		$\sqrt{\frac{100}{3}}$		$+\infty$
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$	0	$\nearrow$	$V\left(\sqrt{\frac{100}{3}}\right)$	$\searrow$	$-\infty$

Vậy bạn Hoa có thể gấp hộp quà có thể tích lớn nhất là $V\left(\sqrt{\dfrac{100}{3}}\right) \approx 192$ cm^3.

Câu 5. Một người cần lập một mật khẩu là một dãy gồm 6 kí tự theo thứ tự lần lượt như sau: ký tự đầu tiên là 1 kí tự thuộc tập hợp $\{@; \#\}$, ký tự thứ hai là 1 kí tự thuộc tập hợp $\{a; b; c\}$, ký tự thứ ba là 1 kí tự thuộc tập hợp $\{M; N\}$ và 3 kí tự còn lại là 3 chữ số đôi một khác nhau. Số cách tạo một mật khẩu như vậy là bao nhiêu? **Đáp án: 8 640**

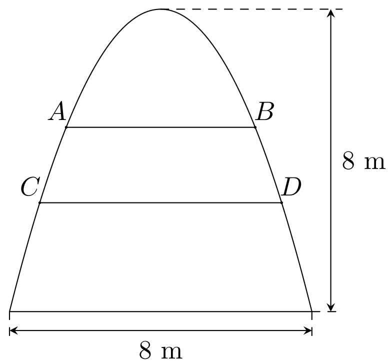
Lời giải.

Chọn các ký tự theo thứ tự cho trước và sắp xếp chúng.

- Số cách chọn 1 ký tự từ $\{@, \#\}$ là 2 cách.
- Số cách chọn 1 ký tự từ $\{a, b, c\}$ là 3 cách.
- Số cách chọn 1 ký tự từ $\{M; N\}$ là 2 cách.
- Số cách chọn 3 chữ số đôi một khác nhau từ 10 chữ số là $\mathrm{A}_{10}^3 = 720$ cách.

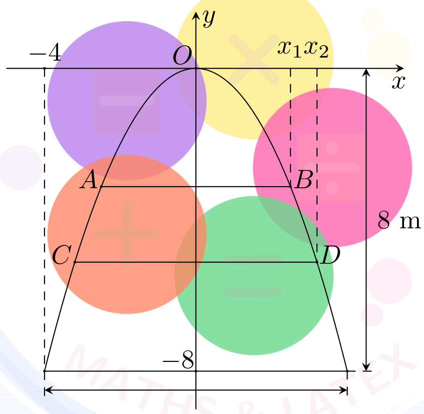
Vậy tổng số cách tạo mật khẩu thỏa yêu cầu bài toán là $2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 720 = 8\,640$.

Câu 6. Một cổng có dạng hình parabol với chiều cao 8 m, chiều rộng chân đế 8 m như hình bên. Người ta căng hai sợi dây trang trí AB, CD nằm ngang, đồng thời chia cổng thành ba phần sao cho hai phần ở phía trên có diện tích bằng nhau. Tỉ số $\dfrac{CD}{AB}$ bằng bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?



Đáp án: 1,26

Lời giải.



Gắn hệ trục tọa độ Oxy vào cổng parabol như hình bên với trục Oy trùng với đường thẳng đối xứng của parabol, gốc O nằm ở đỉnh của parabol, đơn vị trên mỗi trục tính theo mét.

Khi đó, phương trình parabol có dạng $y = ax^2$. Vì parabol đi qua điểm có tọa độ $(-4; -8)$ nên $a = -\dfrac{1}{2}$.

Suy ra phương trình parabol là $y = -\dfrac{1}{2}x^2$.

Giả sử B có hoành độ x_1, D có hoành độ x_2.

Khi đó, phương trình đường thẳng AB là $y = -\dfrac{1}{2}x_1^2$, phương trình đường thẳng CD là $y = -\dfrac{1}{2}x_2^2$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol và đường thẳng AB là

$$S_1 = 2\int_0^{x_1} \left[-\frac{1}{2}x^2 - \left(-\frac{1}{2}x_1^2\right)\right] \mathrm{d}x = 2\left(-\frac{x^3}{6} + \frac{x_1^2}{2}x\right)\Bigg|_0^{x_1} = \frac{2}{3}x_1^3 \ \left(\mathrm{m}^2\right).$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol và đường thẳng CD là

$$S_2 = 2\int_0^{x_2} \left[-\frac{1}{2}x^2 - \left(-\frac{1}{2}x_2^2\right)\right] \mathrm{d}x = 2\left(-\frac{x^3}{6} + \frac{x_2^2}{2}x\right)\Bigg|_0^{x_2} = \frac{2}{3}x_2^3 \ \left(\mathrm{m}^2\right).$$

Theo giả thiết, ta có $S_2 = 2S_1 \Leftrightarrow x_2^3 = 2x_1^3 \Leftrightarrow \dfrac{x_2}{x_1} = \sqrt[3]{2} \approx 1{,}26$.

Khi đó $\dfrac{CD}{AB} = \dfrac{2x_2}{2x_1} \approx 1{,}26$.

BẢNG ĐÁP ÁN

PHẦN I.

Câu 1. B	Câu 2. D	Câu 3. C	Câu 4. A	Câu 5. B	Câu 6. C
Câu 7. A	Câu 8. D	Câu 9. C	Câu 10. B	Câu 11. A	Câu 12. D

PHẦN II.

Câu 1. a Đ b Đ c Đ d S	Câu 2. a Đ b S c Đ d Đ
Câu 3. a Đ b S c Đ d S	Câu 4. a Đ b Đ c S d S

PHẦN III.

Câu 1. 4,5	Câu 2. 4,5	Câu 3. 20	Câu 4. 192	Câu 5. 8 640	Câu 6. 1,26

Họ và tên thí sinh: .... *Số báo danh:* .... **Mã đề: 006**

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ lựa chọn một phương án.

Câu 1. Hàm số $F(x) = \mathrm{e}^{-2x}$ là nguyên hàm của hàm số nào sau đây?

A. $f_1(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-2x}}{-2}$. **B.** $f_2(x) = -\mathrm{e}^{-2x}$. **C.** $f_3(x) = 2\mathrm{e}^{-2x}$. **D.** $f_4(x) = -2\mathrm{e}^{-2x}$.

Lời giải.

Ta có $F'(x) = \left(\mathrm{e}^{-2x}\right)' = -2\mathrm{e}^{-2x} = f_4(x)$.

Chọn đáp án D .... □

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, tọa độ của vectơ $\vec{u} = \vec{k} - \vec{j}$ là

A. $(0;-1;1)$. **B.** $(0;1;1)$. **C.** $(1;0;0)$. **D.** $(-1;0;0)$.

Lời giải.

Ta có vectơ $\vec{k} = (0;0;1)$ và $\vec{j} = (0;1;0)$ nên vectơ $\vec{u} = \vec{k} - \vec{j}$ có tọa độ là $(0;-1;1)$.

Chọn đáp án A .... □

Câu 3. Tập xác định của hàm số $y = x - 1 + \dfrac{3}{x+2}$ là

A. $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. **B.** $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. **C.** $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. **D.** $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi và chỉ khi $x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2$.

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Chọn đáp án D .... □

Câu 4. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sin x$ là

A. π. **B.** 2π. **C.** 1. **D.** -1.

Lời giải.

Với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có $-1 \leq \sin x \leq 1$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sin x$ là 1.

Chọn đáp án C .... □

Câu 5. Nếu hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ thì

A. Đồ thị hàm số có 2 tiệm cận đứng là $x = -1$ và $x = 1$.

B. Đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng là $x = -1$ và 1 tiệm cận ngang là $y = 1$.

C. Đồ thị hàm số có 1 tiệm cận ngang là $y = -1$ và 1 tiệm cận đứng là $x = 1$.

D. Đồ thị hàm số có 2 tiệm cận ngang là $y = -1$ và $y = 1$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$ hoặc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = a$ thì $y = a$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P)\colon 2x - y - 3 = 0$ có một vectơ pháp tuyến là

A. $\vec{n}_1 = (2; -1)$. **B.** $\vec{n}_2 = (2; -1; -3)$. **C.** $\vec{n}_3 = (2; -1; 0)$. **D.** $\vec{n}_4 = (-2; 1; 3)$.

Lời giải.

Ta có $\vec{n}_3 = (2; -1; 0)$ là 1 vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).

Chọn đáp án (D) □

Câu 7. Hàm số nào sau đây là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin x$.

A. $F_1(x) = \sin x$. **B.** $F_2(x) = -\sin x$. **C.** $F_3(x) = \cos x$. **D.** $F_4(x) = -\cos x$.

Lời giải.

Ta có $F(x) = \displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$ là họ nguyên hàm của hàm số $f(x)$.
Nên $F(x) = -\cos x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin x$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu có tâm $I\,(2; 1; -3)$ và bán kính 9 có phương trình là

A. $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 81$. **B.** $(x+2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 81$.

C. $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 9$. **D.** $(x+2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 9$.

Lời giải.

Phương trình mặt cầu có tâm $I\,(2; 1; -3)$ và bán kính 9 là

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 81.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách từ điểm $M\,(x_0; y_0; z_0)$ đến mặt phẳng $(P)\colon ax + by + cz + d = 0$ bằng

A. $\dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. **B.** $\dfrac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

C. $\dfrac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}$. **D.** $\dfrac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{a^2 + b^2 + c^2}$.

Lời giải.

Ta có khoảng cách từ điểm $M\,(x_0; y_0; z_0)$ đến mặt phẳng $(P)\colon ax + by + cz + d = 0$ là

$$\mathrm{d}\,(M, (P)) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 10. Khi thống kê chiều cao (đơn vị: centimét) của học sinh lớp 12A, người ta thu được mẫu số liệu ghép nhóm như bảng bên. Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm đó bằng

Nhóm	Tần số
$[155; 160)$	2
$[160; 165)$	5
$[165; 170)$	21
$[170; 175)$	11
$[175; 180)$	1
	$n = 40$

A. 25 cm. **B.** 5 cm.

C. 20 cm. **D.** 180 cm.

Lời giải.

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm là $180 - 155 = 25$ cm.

Chọn đáp án (A) .... □

Câu 11. Cho A và B là hai biến cố độc lập thỏa mãn $\mathrm{P}(A) = 0{,}5$ và $\mathrm{P}(B) = 0{,}3$. Khi đó, $\mathrm{P}(A \cap B)$ bằng

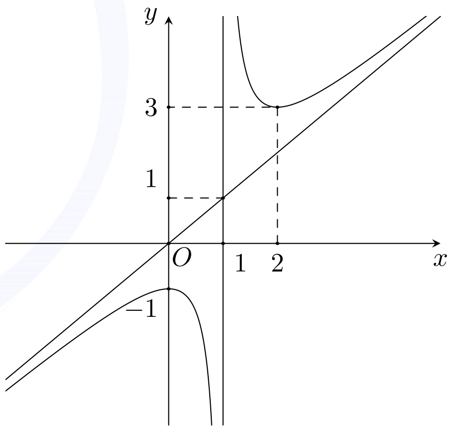
A. 0,8. **B.** 0,2. **C.** 0,6. **D.** 0,15.

Lời giải.

Do A và B là hai biến cố độc lập nên ta có $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B) = 0{,}5 \cdot 0{,}3 = 0{,}15$.

Chọn đáp án (D) .... □

Câu 12. Hàm số nào sau đây có đồ thị là đường cong như hình bên?



A. $y = x - \dfrac{1}{x-1}$. **B.** $y = -x + \dfrac{1}{x-1}$.

C. $y = -x - \dfrac{1}{x-1}$. **D.** $y = x + \dfrac{1}{x-1}$.

Lời giải.

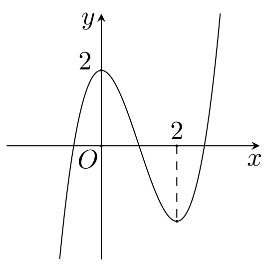
Ta có điểm $(2; 3)$ thuộc đồ thị hàm số.

Lần lượt thay $x = 2$, $y = 3$ vào các phương án, ta có điểm $(2; 3)$ chỉ thuộc đồ thị hàm số $y = x + \dfrac{1}{x-1}$.

Chọn đáp án (D) .... □

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý **a)**, **b)**, **c)**, **d)** ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Cho hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, có đồ thị như hình vẽ.



a) Hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị là 0 và 2.

b) Giá trị b bằng 0.

c) Giá trị c bằng -2.

d) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 2$.

Lời giải.

a) **Đúng**.

Từ đồ thị hàm số, suy ra hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị là $x_{\text{CD}} = 0$ và $x_{\text{CT}} = 2$.

b) **Sai**.

Ta có $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$.

Vì $x = 0$ là điểm cực đại của hàm số nên $f'(0) = 0$. Suy ra $b = 0$.

c) **Sai**.

Vì đồ thị hàm số đi qua điểm có tọa độ $(0; 2)$ nên $f(0) = 2$. Suy ra $c = 2$.

d) **Sai**.

Ta có $\begin{cases} f'(0) = 0 \\ f'(2) = 0 \\ f(0) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 0 \\ c = 2. \end{cases}$

Vậy hàm số cần tìm là $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

Chọn đáp án | a đúng | b đúng | c sai | d sai | .... □

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d đi qua hai điểm $A(1; 2; 1)$ và $B(3; 0; 1)$, mặt phẳng (α) đi qua ba điểm $M(0; 1; 0)$, $N(2; 1; 3)$, $P(4; 1; 1)$.

a) Vectơ $\overrightarrow{AB}$ không là vectơ chỉ phương của đường thẳng d.

b $\overrightarrow{MN} = (2; 0; 3)$, $\overrightarrow{MP} = (4; 0; 1)$.

c Mặt phẳng (α) có một vectơ pháp tuyến có tọa độ là $(0; -1; 0)$.

d Góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (α) bằng $45°$.

Lời giải.

a) **Sai**.

Do đường thẳng d đi qua $A(1; 2; 1)$ và $B(3; 0; 1)$ nên d nhận $\overrightarrow{AB} = (2; -2; 0)$ làm một vectơ chỉ phương.

b) **Đúng**.

Ta có $\overrightarrow{MN} = (2; 0; 3)$, $\overrightarrow{MP} = (4; 0; 1)$.

c) **Đúng**.

Ta có $\left[\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}\right] = (0; 10; 0)$.

Gọi $\vec{n}$ là một vectơ pháp tuyến của (α).

Vì M, N, P thuộc (α) nên $\vec{n} \perp \overrightarrow{MN}$ và $\vec{n} \perp \overrightarrow{MP}$. Do đó, ta có thể chọn

$$\vec{n} = -\frac{1}{10}\left[\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}\right] = (0; -1; 0).$$

d) **Đúng**.

Ta có $\sin\left(d,(\alpha)\right) = \dfrac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}\right|}{|\vec{n}|\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \dfrac{|0\cdot 2+(-1)\cdot(-2)+0\cdot 0|}{\sqrt{0^2+(-1)^2+0^2}\cdot\sqrt{2^2+(-2)^2+0^2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Suy ra $\left(d,(\alpha)\right) = 45^\circ$.

Chọn đáp án | a sai | b đúng | c đúng | d đúng | .... □

Câu 3. Cho hàm số $f(x) = \left(\sin\dfrac{x}{2}+\cos\dfrac{x}{2}\right)^2$.

a) $f(x) = 1+\sin x$.

b) $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

c) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x + \int(-\cos x)\,\mathrm{d}x$.

d) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = x+\cos x + C$.

Lời giải.

a) **Đúng**.

Ta có

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2 \\ &= \sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2} \\ &= \sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}+\sin\left(2\cdot\frac{x}{2}\right) \\ &= 1+\sin x. \end{aligned}$$

b) **Đúng**.

Hàm số $f(x) = 1+\sin x$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

c) **Sai**.

Ta có $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int(1+\sin x)\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x + \int \sin x\,\mathrm{d}x$.

d) **Sai**

Ta có $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int(1+\sin x)\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x + \int \sin x\,\mathrm{d}x = x-\cos x + C$.

Chọn đáp án | a đúng | b đúng | c sai | d sai | .... □

Câu 4. Khi kiểm tra sức khỏe tổng quát của bệnh nhân ở một bệnh viện, người ta được kết quả như sau:

- Có 40% bệnh nhân bị đau dạ dày.
- Có 30% bệnh nhân thường xuyên bị stress.
- Trong số các bệnh nhân thường xuyên bị stress có 80% bệnh nhân bị đau dạ dày.

Chọn ngẫu nhiên một bệnh nhân.

a) Xác suất chọn được bệnh nhân thường xuyên bị stress là 0,3.

b) Xác suất chọn được bệnh nhân bị đau dạ dày, biết bệnh nhân đó thường xuyên bị stress, là 0,8.

c Xác suất chọn được bệnh nhân vừa thường xuyên bị stress vừa bị đau dạ dày là 0,24.

d Xác suất chọn được bệnh nhân thường xuyên bị stress biết bệnh nhân đó bị đau dạ dày, là 0,6.

Lời giải.

Gọi A là biến cố "Chọn được bệnh nhân thường xuyên bị stress" và B là biến cố "Chọn được bệnh nhân bị đau dạ dày".

Khi đó, ta có $\mathrm{P}(A) = 0{,}3$; $\mathrm{P}(B) = 0{,}4$ và $\mathrm{P}(B|A) = 0{,}8$.

a) **Đúng**.

Xác suất chọn được bệnh nhân thường xuyên bị stress là

$$\mathrm{P}(A) = 0{,}3.$$

b) **Đúng**.

Xác suất chọn được bệnh nhân bị đau dạ dày, biết bệnh nhân đó thường xuyên bị stress, là

$$\mathrm{P}(B|A) = 0{,}8.$$

c) **Đúng**.

Xác suất chọn được bệnh nhân vừa thường xuyên bị stress vừa bị đau dạ dày là

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B|A) = 0{,}3 \cdot 0{,}8 = 0{,}24.$$

d) **Đúng**.

Xác suất chọn được bệnh nhân thường xuyên bị stress biết bệnh nhân đó bị đau dạ dày, là

$$\mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{0{,}24}{0{,}4} = 0{,}6.$$

Chọn đáp án | a đúng | b đúng | c đúng | d đúng | .... □

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

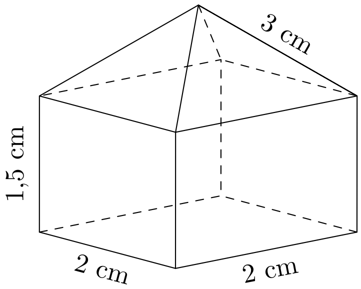
Câu 1. Cho $\int\limits_a^b |x|\,\mathrm{d}x = ma^2 + nb^2$ với m, n, a, b là các hằng số thực và $a < 0 < b$. Giá trị của biểu thức $m + n$ bằng bao nhiêu? Đáp án: 1

Lời giải.

$$\begin{aligned} ma^2 + nb^2 &= \int\limits_a^b |x|\,\mathrm{d}x \\ &= \int\limits_a^0 (-x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^b x\,\mathrm{d}x \\ &= -\left.\frac{x^2}{2}\right|_a^0 + \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^b \\ &= \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2. \end{aligned}$$

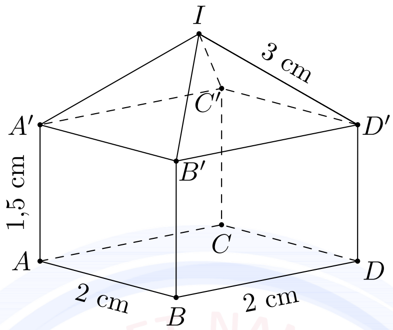
Khi đó $m = \frac{1}{2}$ và $n = \frac{1}{2}$. Suy ra $m + n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

Câu 2. Người ta thiết kế một thiết bị kim loại có dạng như hình bên (giá tiền mua kim loại là $2\,500$ đồng/cm^3). Thiết bị gồm 2 phần, phần dưới là khối lăng trụ tứ giác đều, phần trên là khối chóp tứ giác đều. Số tiền mua kim loại dùng để làm thiết bị đó là bao nhiêu nghìn đồng (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?



Đáp án: 24

Lời giải.



Thể tích khối lăng trụ tứ giác đều là

$$V_1 = 1{,}5 \cdot 2^2 = 6\,\text{cm}^3.$$

Độ dài đường chéo mặt đáy của khối chóp tứ giác đều là

$$\sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}\,\text{cm}.$$

Khối chóp tứ giác đều có chiều cao là

$$\sqrt{3^2 - \left(\frac{2\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{7}\,\text{cm}.$$

Thể tích khối chóp tứ giác đều là

$$V_2 = \frac{1}{3} \cdot 2^2 \cdot \sqrt{7} = \frac{4\sqrt{7}}{3}\,\text{cm}^3.$$

Vậy, số tiền để mua kim loại dùng để làm thiết bị đó là $2{,}5 \cdot \left(6 + \dfrac{4\sqrt{7}}{3}\right) \approx 24$ (nghìn đồng).

Câu 3. Có 40 tấm thẻ kích thước như nhau và đánh số thứ tự lần lượt từ 1 đến 40 (mỗi tấm thẻ chỉ ghi một số nguyên dương, hai thẻ khác nhau ghi hai số khác nhau). Một người lần lượt rút hai thẻ (rút không hoàn lại). Tính xác suất lần thứ hai rút được thẻ ghi số nguyên tố. Đáp án: 0,3

Lời giải.

Xét các biến cố:

- A: "Lần thứ nhất rút được thẻ ghi số nguyên tố";

- B: "Lần thứ hai rút được thẻ ghi số nguyên tố".

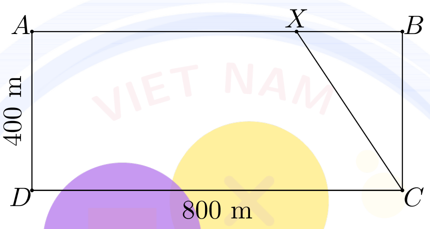
Từ 1 đến 40 có 12 số nguyên tố nên $\mathrm{P}(A)=\dfrac{12}{40}=0{,}3$.
Rút được thẻ không phải là số nguyên tố $\mathrm{P}(\overline{A})=1-0{,}3=0{,}7$.
Vì rút ra không hoàn lại nên lần thứ hai rút được thẻ có ghi số nguyên tố thì

$$\mathrm{P}(B\,|\,A)=\frac{11}{39} \text{ và } \mathrm{P}(B|\overline{A})=\frac{12}{39}=\frac{4}{13}.$$

Theo công thức xác suất toàn phần, ta có

$$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A)\cdot\mathrm{P}(B|A)+\mathrm{P}\left(\overline{A}\right)\cdot\mathrm{P}\left(B|\overline{A}\right)=0{,}3\cdot\frac{11}{39}+0{,}7\cdot\frac{4}{13}=0{,}3.$$

Câu 4. Một vận động viên thể thao hai môn phối hợp luyện tập với một bể bơi hình chữ nhật rộng 400 m, dài 800 m. Vận động viên chạy phối hợp với bơi như sau: Xuất phát từ điểm A chạy đến điểm X và bơi từ điểm X đến điểm C (tham khảo hình vẽ).



Hỏi nên chọn điểm X cách A gần bằng bao nhiêu mét để vận động viên đến C nhanh nhất (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)? Biết rằng vận tốc chạy là 30 km/h, vận tốc bơi là 6 km/h.

Đáp án: 718

Lời giải.

Đặt $BX=x$ (km), khi đó $AX=0{,}8-x$ (km).
$\Rightarrow XC=\sqrt{BX^2+BC^2}=\sqrt{x^2+0{,}4^2}=\sqrt{x^2+0{,}16}$ (km).
Đặt $T(x)$ là thời gian vận động viên đi từ A đến X rồi đến C.
Khi đó, ta có
$T(x)=\dfrac{0{,}8-x}{30}+\dfrac{\sqrt{x^2+0{,}16}}{6}=\dfrac{1}{30}\left(0{,}8-x+5\sqrt{x^2+0{,}16}\right)$ với $0\le x<0{,}8$.
$T'(x)=\dfrac{1}{30}\left(-1+\dfrac{5x}{\sqrt{x^2+0{,}16}}\right)$.
$T'(x)=0\Leftrightarrow -1+\dfrac{5x}{\sqrt{x^2+0{,}16}}=0\Leftrightarrow 5x=\sqrt{x^2+0{,}16}\Leftrightarrow 25x^2=x^2+0{,}16\Rightarrow x=\dfrac{\sqrt{6}}{30}$.
Bảng biến thiên của hàm số $T(x)$ như sau:

x	0		$\frac{\sqrt{6}}{30}$		$0{,}8$
$T'(x)$		$-$	0	$+$	
$T(x)$	$\frac{7}{75}$	$\searrow$	$T\left(\frac{\sqrt{6}}{30}\right)$	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{5}}{15}$

Vậy $T(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $T\left(\dfrac{\sqrt{6}}{30}\right)$ khi

$$AX = 0{,}8 - \frac{\sqrt{6}}{30} \approx 0{,}718\ (\text{km}) = 718\ (\text{m}).$$

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, đài kiểm soát không lưu sân bay có tọa độ $O(0;0;0)$, đơn vị trên mỗi trục tính theo kilômét. Một máy bay chuyển động hướng về dài kiểm soát không lưu, bay qua hai vị trí $A(-500;-250;150)$, $B(-200;-200;100)$. Khi máy bay ở gần đài kiểm soát nhất, tọa độ của vị trí máy bay là $(a;b;c)$. Giá trị của biểu thức $-3a-b-c$ là bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)? Đáp án: -11

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (300;50;-50)$.

Vậy vectơ $\overrightarrow{u} = (6;1;-1)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng AB.

Phương trình tham số của đường thẳng AB là $\begin{cases} x = -500 + 6t \\ y = -250 + t \\ z = 150 - t \end{cases}$ với $t \in \mathbb{R}$.

Gọi H là hình chiếu của điểm O lên đường thẳng AB. Khi đó OH chính là khoảng cách ngắn nhất từ máy bay đến đài kiểm soát không lưu.

Do $H \in AB \Rightarrow H(-500+6t;-250+t;150-t)$ với $t \in \mathbb{R}$.

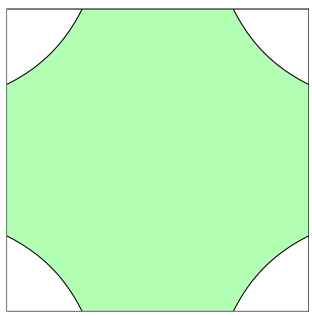
Khi đó $\overrightarrow{OH} = (-500+6t;-250+t;150-t)$.

Do $OH \perp AB$ nên $\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{u} = 0 \Leftrightarrow (6t-500)\cdot 6 + (t-250) + (t-150) = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{1700}{19}$.

Suy ra vị trí của máy bay khi đó là $\left(\dfrac{700}{19};-\dfrac{3050}{19};\dfrac{1150}{19}\right)$.

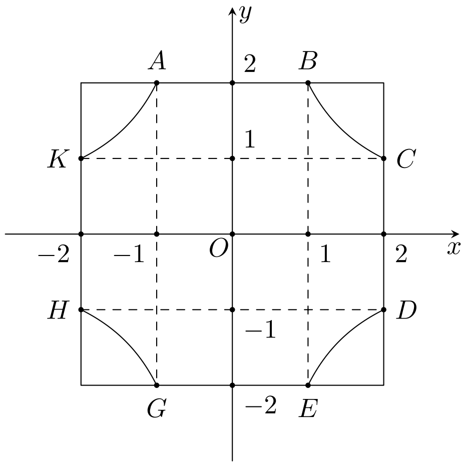
Vậy, ta có kết quả $-3a-b-c = -3\cdot\dfrac{700}{19} + \dfrac{3050}{19} - \dfrac{1150}{19} = -\dfrac{200}{19} \approx -11$.

Câu 6. Người ta thiết kế một mẫu gạch lát nền nhà có dạng hình vuông, cạnh 4 dm. Bốn góc viên gạch màu trắng, phần ở giữa màu xanh (tham khảo hình vẽ). Đường viền của phần màu xanh bao gồm 4 đoạn thẳng nằm trên các cạnh của hình vuông và bốn đường cong có tính chất: Tích khoảng cách từ một điểm bất kỳ thuộc đường cong đó đến hai trục đối xứng của viên gạch (hai đường thẳng đi qua tâm viên gạch và song song với hai cạnh vuông góc) bằng 2 dm^2.



Hãy cho biết phần màu xanh có diện tích bằng bao nhiêu decimét vuông (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)? Đáp án: 13,5

Lời giải.



Gắn hệ trục tọa độ Oxy vào viên gạch sao cho hai trục trùng với hai đường đối xứng, gốc O ở tâm hình vuông (xem hình).

Giả sử tọa độ một điểm nằm trên đường viền cong là $(x; y)$.

Theo giả thiết, ta có $|xy| = 2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = \dfrac{2}{x} \\ y = -\dfrac{2}{x}. \end{array}\right.$

Các đường viền AK, DE là một phần của đồ thị hàm số $y = -\dfrac{2}{x}$.

Các đường viền BC, GH là một phần của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2}{x}$.

Vậy, diện tích phần màu xanh là

$$\begin{aligned} S &= \int\limits_{-2}^{-1} \left| -\frac{2}{x} - \frac{2}{x} \right| \mathrm{d}x + \int\limits_{1}^{2} \left| \frac{2}{x} - \frac{-2}{x} \right| \mathrm{d}x + S_{ABEG} \\ &= \int\limits_{-2}^{-1} \left(-\frac{2}{x} - \frac{2}{x} \right) \mathrm{d}x + \int\limits_{1}^{2} \left(\frac{2}{x} + \frac{2}{x} \right) \mathrm{d}x + 8 \\ &= -4 \ln |x| \Big|_{-2}^{-1} + 4 \ln |x| \Big|_{1}^{2} + 8 \approx 13{,}5 \left(\mathrm{dm}^2 \right). \end{aligned}$$

BẢNG ĐÁP ÁN

PHẦN I.

Câu 1. B	Câu 2. D	Câu 3. C	Câu 4. A	Câu 5. B	Câu 6. C
Câu 7. A	Câu 8. D	Câu 9. C	Câu 10. B	Câu 11. A	Câu 12. D

PHẦN II.

Câu 1. a Đ b Đ c Đ d S	Câu 2. a Đ b S c Đ d Đ
Câu 3. a Đ b S c Đ d S	Câu 4. a Đ b Đ c S d S

PHẦN III.

Câu 1. 4,5	Câu 2. 4,5	Câu 3. 20	Câu 4. 192	Câu 5. 8 640	Câu 6. 1,26