

HÀM SỐ PHƯƠNG TRÌNH

LƯỢNG GIÁC

$$\sin x = \frac{a}{c}$$

$$\cos x = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{a}{b} = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{b}{a} = \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\operatorname{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\operatorname{ctg}^2 x + 1 = \frac{1}{\sin^2 x}$$

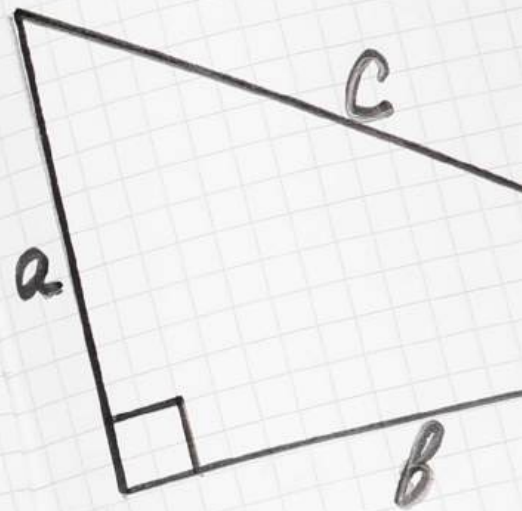
$$\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$$

$$\begin{aligned} \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x = \\ &= 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x = \\ &= \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$

$$\operatorname{ctg} 2x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{2 \operatorname{tg} x} = \frac{\operatorname{ctg}^2 x}{2 \operatorname{ctg} x}$$

TÁC GIẢ
TOÁN TỪ TÂM





MỤC LỤC

Bài 1. GÓC LƯỢNG GIÁC

A. Lý thuyết

1. Đường tròn định hướng và cung lượng giác.....	4
2. Góc lượng giác.....	5
3. Đơn vị Radian.....	5
4. Đường tròn lượng giác.....	6
5. Độ dài cung tròn.....	6

B. Các dạng bài tập

↻ Dạng 1. Mối liên hệ giữa độ và radian.....	7
↻ Dạng 2. Độ dài cung lượng giác.....	9
↻ Dạng 3. Biểu diễn góc lượng giác trên đường tròn lượng giác.....	11

C. Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm.....	14
B. Câu hỏi – Trả lời Đúng/sai.....	16
C. Câu hỏi – Trả lời ngắn.....	19

Bài 2. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA 1 GÓC LƯỢNG GIÁC

A. Lý thuyết

1. Giá trị lượng giác của một góc lượng giác.....	21
2. Hệ thức cơ bản giữa các giá trị lượng giác của một góc lượng giác.....	22
3. Mối quan hệ giữa các giá trị lượng giác của hai góc đối nhau.....	22
4. Mối quan hệ giữa các giá trị lượng giác của hai góc bù nhau.....	22
5. Mối quan hệ giữa các giá trị lượng giác của hai góc phụ nhau.....	22
6. Mối quan hệ giữa các giá trị lượng giác của hai góc hơn kém.....	22

B. Các dạng bài tập

↻ Dạng 1. Tính giá trị lượng giác của 1 góc lượng giác.....	24
↻ Dạng 2. Tính giá trị lượng giác liên quan góc đặc biệt.....	26
↻ Dạng 3. Rút gọn biểu thức lượng giác.....	28
↻ Dạng 4. Giá trị lớn nhất – giá trị nhỏ nhất.....	30

C. Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm.....	32
B. Câu hỏi – Trả lời Đúng/sai.....	34
C. Câu hỏi – Trả lời ngắn.....	37

Bài 3. CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

A. Lý thuyết

1. Công thức cộng.....	40
------------------------	----



2. Công thức nhân đôi.....	40
3. Công thức biến đổi tích thành tổng.....	40
4. Công thức biến đổi tổng thành tích.....	41
B. Các dạng bài tập	
↪ Dạng 1. Công thức cộng.....	42
↪ Dạng 2. Công thức nhân đôi.....	44
↪ Dạng 3. Công thức biến đổi tích thành tổng.....	46
↪ Dạng 4. Công thức biến đổi tổng thành tích.....	48
C. Luyện tập	
A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm.....	50
B. Câu hỏi – Trả lời Đúng/sai.....	51
C. Câu hỏi – Trả lời ngắn.....	53
Bài 4. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC	
A. Lý thuyết	
1. Định nghĩa hàm số lượng giác.....	55
2. Hàm số chẵn, hàm số lẻ, hàm số tuần hoàn.....	55
3. Đồ thị & tính chất hàm số $y = \sin x$ và $y = \cos x$	56
4. Đồ thị & tính chất hàm số $y = \tan x$ và $y = \cot x$	57
B. Các dạng bài tập	
↪ Dạng 1. Tập xác định.....	59
↪ Dạng 2. Tính chẵn – lẻ.....	61
↪ Dạng 3. Tính tuần hoàn.....	64
↪ Dạng 4. Giá trị lớn nhất – nhỏ nhất.....	66
C. Luyện tập	
A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm.....	68
B. Câu hỏi – Trả lời Đúng/sai.....	71
C. Câu hỏi – Trả lời ngắn.....	73
Bài 5. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC	
A. Lý thuyết	
1. Khái niệm phương trình tương đương.....	76
2. Phương trình $\sin x = a$	76
3. Phương trình $\cos x = a$	77
4. Phương trình $\tan x = a$ & $\cot x = a$	77
B. Các dạng bài tập	
↪ Dạng 1. Phương trình $\sin x = a$	79
↪ Dạng 2. Phương trình $\cos x = a$	81



➤ Dạng 3. Phương trình $\tan x = a$ và $\cot x = a$	83
➤ Dạng 4. Phương trình có nghiệm thuộc khoảng – đoạn.....	85
➤ Dạng 5. Bài toán thực tế liên quan phương trình lượng giác	87

C. Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm.....	88
B. Câu hỏi – Trả lời Đúng/sai.....	93
C. Câu hỏi – Trả lời ngắn	96



TOÁN TỬ TÂM



Chương 01

Bài 1.

GÓC LƯỢNG GIÁC



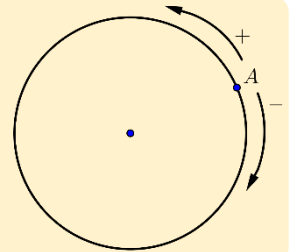
Lý thuyết

1. Đường tròn định hướng và cung lượng giác



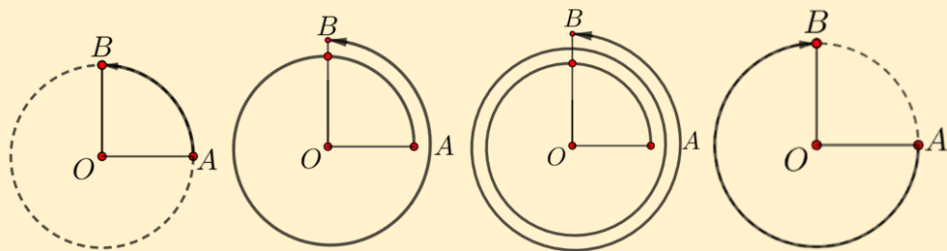
Đường tròn định hướng:

- Đường tròn định hướng là một đường tròn trên đó đã chọn **một chiều chuyển động** gọi là chiều dương, chiều ngược lại là chiều âm.
- Quy ước chọn chiều **ngược** với chiều quay của kim đồng hồ làm chiều dương.



Cung lượng giác:

- Trên đường tròn định hướng cho 2 điểm A, B . Một điểm M di động trên đường tròn luôn theo một chiều từ A đến B tạo nên một **cung lượng giác** có điểm đầu A và điểm cuối B .
- Với 2 điểm A, B đã cho trên đường tròn định hướng ta có **vô số cung lượng giác** có điểm đầu A , điểm cuối B .
- Kí hiệu \widehat{AB} .



Chú ý

Trên một đường tròn định hướng, lấy 2 điểm A, B thì:

- (1) Kí hiệu AB chỉ một cung hình học (lớn hoặc bé) hoàn toàn xác định.
- (2) Kí hiệu \widehat{AB} chỉ một cung lượng giác điểm đầu A , điểm cuối B .



2. Góc lượng giác.

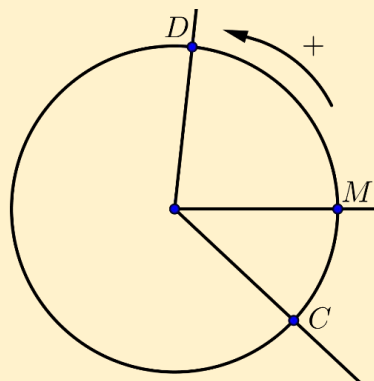


Góc lượng giác:

- Một điểm M chuyển động trên đường tròn từ C đến D tạo nên cung lượng giác \widehat{CD} .

Khi đó tia OM quay xung quanh gốc O từ vị trí OC đến OD . Ta nói tia OM tạo nên **góc lượng giác**, có tia đầu OC và tia cuối OD .

- Kí hiệu: (OC, OD) .
- Ta quy ước: chiều quay
+ ngược với chiều quay kim đồng hồ là chiều dương
+ cùng với chiều quay kim đồng hồ là chiều âm.
- Khi tia OM quay góc α thì ta nói góc lượng giác mà tia đó quét nên có số đo α .
- Số đo của **góc lượng giác** với tia đầu OC , tia cuối OD được kí hiệu là $sd(OC, OD) = \alpha$.



Nhận xét

Số đo của các góc lượng giác có cùng tia đầu OC và tia cuối OD sai khác nhau một bội nguyên của 360° nên có công thức tổng quát là: $sd(OC, OD) = \alpha^\circ + k.360^\circ$ ($k \in \mathbb{Z}$)

Thường viết là $(OC, OD) = \alpha^\circ + k.360^\circ$



Hệ thức Chasles:

Với 3 tia Oa, Ob, Oc bất kì ta có:

$$(Oa, Ob) + (Ob, Oc) = (Oa, Oc) + k.360^\circ \quad (k \in \mathbb{Z})$$

3. Đơn vị Radian.



Đơn vị Radian:

- Trên đường tròn tùy ý, cung có độ dài bằng bán kính được gọi là cung có số đo 1 rad.

Quan hệ giữa độ & radian:

- $1^\circ = \frac{\pi}{180}$ rad và $1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi}$.

Chú ý:

Khi viết số đo của một góc (cung) theo đơn vị radian, ta không viết chữ rad sau số đó.

$$\boxed{180^\circ = \pi \rightarrow 60^\circ = \frac{\pi}{3}}; \quad \boxed{180^\circ = \pi \rightarrow 45^\circ = \frac{\pi}{4}}$$

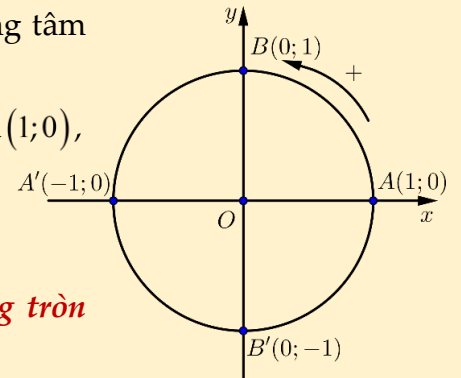


4. Đường tròn lượng giác



Đường tròn lượng giác:

- » Trong mặt phẳng Oxy , vẽ đường tròn định hướng tâm O , bán kính $R = 1$.
- » Đường tròn này cắt hai trục tọa độ tại bốn điểm $A(1;0)$, $A'(-1;0)$, $B(0;1)$, $B'(0;-1)$.
- » Ta lấy $A(1;0)$ làm điểm gốc của đường tròn.
- » Đường tròn xác định như trên được gọi là **đường tròn lượng giác** (gốc A).



5. Độ dài cung tròn.



- » Cung có số đo α rad của đường tròn bán kính R có độ dài $l = R\alpha$.

TOÁN TỪ TÂM



Các dạng bài tập

Dạng 1. Mối liên hệ giữa độ và radian



Phương pháp

Dùng mối quan hệ giữa độ và radian: $180^\circ = \pi \text{ rad}$

» Đổi cung a có số đo từ radian sang độ $a \cdot \frac{180^\circ}{\pi}$

» Đổi cung x° có số đo từ độ ra radian $x^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}$



Ví dụ 1.1.

(1) Đổi số đo của các góc sau ra radian: $72^\circ, 600^\circ, -37^\circ 45' 30''$.

(2) Đổi số đo của các góc sau ra độ: $\frac{5\pi}{18}, \frac{3\pi}{5}, -4$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 1.2.

Đổi số đo của góc $45^\circ 32'$ sang đơn vị radian với độ chính xác đến hàng phần nghìn ?

Lời giải

.....

.....

.....

.....



➤ Dạng 2. Độ dài cung lượng giác



Phương pháp

Cung tròn bán kính R có số đo α ($0 \leq \alpha \leq 2\pi$), có số đo độ a° ($0^\circ \leq a \leq 360^\circ$) và có độ dài

$$l \text{ thì: } l = R\alpha = \frac{\pi a}{180} \cdot R \text{ do đó } \frac{\alpha}{\pi} = \frac{a}{180}$$

► **Đặc biệt:** $1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ, 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$



Ví dụ 2.1.

Một đường tròn có bán kính 36 m. Độ dài của cung trên đường tròn đó có số đo là

(1) $\frac{3\pi}{4}$

(2) 51°

(3) $\frac{1}{3}$

✎ *Lời giải*

.....
.....
.....
.....
.....



Ví dụ 2.2.

Một hải lí là độ dài cung tròn xích đạo có số đo $\left(\frac{1}{60}\right)^\circ = 1'$. Biết độ dài xích đạo là 40.000km, hỏi một hải lí dài bao nhiêu km?

✎ *Lời giải*

.....
.....
.....
.....
.....
.....



Ví dụ 2.3.

Cho hình vuông $A_0A_1A_2A_3$ nội tiếp đường tròn tâm O (các đỉnh được sắp xếp theo chiều ngược chiều quay của kim đồng hồ). Tính số đo của các cung lượng giác

$$\widehat{A_0A_i}, \widehat{A_iA_j} (i, j = 0, 1, 2, 3, i \neq j)$$

✎ *Lời giải*



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....





➤ Dạng 3. Biểu diễn góc lượng giác trên đường tròn lượng giác



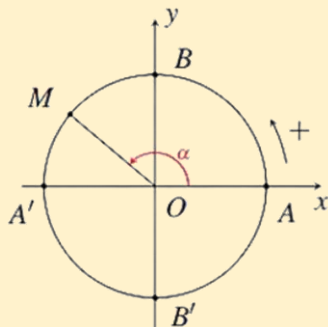
Phương pháp

Để biểu diễn góc lượng giác có số đo a trên đường tròn lượng giác ta cần thực hiện các bước sau:

- » **Bước 1:** Vẽ đường tròn lượng giác. Chọn gốc $A(1;0)$ làm điểm đầu.
- » **Bước 2:** Chọn điểm cuối M trên đường tròn lượng giác sao cho $(OA, OM) = \alpha$.
Điểm cuối M chính là điểm biểu diễn của góc lượng giác có số đo a .

** Kiến thức cần lưu ý:

- ✓ Đường tròn lượng giác là đường tròn có tâm tại gốc tọa độ, bán kính bằng 1, được định hướng với:
 - » Chiều quay dương (ngược chiều quay của kim đồng hồ),
 - » Chiều quay âm (cùng chiều quay của kim đồng hồ).
 - » Lấy điểm $A(1;0)$ làm điểm gốc của đường tròn.



Các điểm $B(0;1), A(1;0), B'(0;-1)$ nằm trên đường tròn lượng giác.

- ✓ Nếu $|a| > 2\pi$ (hoặc $|a| > 360^\circ$) ta phân tích $\alpha = \beta + k2\pi$ hoặc $\alpha = \beta + k360^\circ$ với $-\pi < \beta < \pi$. Khi đó, điểm biểu diễn của góc lượng giác có số đo α sẽ trùng với điểm biểu diễn của góc lượng giác có số đo là β .
- ✓ $a > 0$ thì góc a quay theo chiều dương, $a < 0$ thì góc a quay theo chiều âm.



Ví dụ 3.1.

Xác định điểm M trên đường tròn lượng giác biểu diễn góc lượng giác có số đo bằng

(1) 45°

(2) $-\frac{9\pi}{4}$

➤ Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Luyện tập

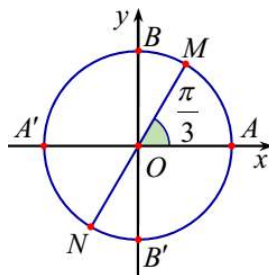
A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm

- » **Câu 1.** Góc có số đo $\frac{\pi}{24}$ đổi sang độ bằng
A. 7° . **B.** $7^\circ 30'$. **C.** 8° . **D.** $8^\circ 30'$.
- » **Câu 2.** Một đường tròn có đường kính là 50(cm). Độ dài của cung tròn trên đường tròn có số đo là $\frac{\pi}{4}$ bằng (làm tròn đến hàng đơn vị):
A. 40(cm). **B.** 39(cm). **C.** 19(cm). **D.** 20(cm).
- » **Câu 3.** Số đo theo đơn vị radian của góc 315° là
A. $\frac{7\pi}{2}$. **B.** $\frac{7\pi}{4}$. **C.** $\frac{2\pi}{7}$. **D.** $\frac{4\pi}{7}$.
- » **Câu 4.** Cung tròn có số đo là $\frac{5\pi}{4}$. Hãy chọn số đo độ của cung tròn đó trong các cung tròn sau đây.
A. 5° . **B.** 15° . **C.** 172° . **D.** 225° .
- » **Câu 5.** Cung tròn có số đo là π . Hãy chọn số đo độ của cung tròn đó trong các cung tròn sau đây.
A. 30° . **B.** 45° . **C.** 90° . **D.** 180° .
- » **Câu 6.** Góc có số đo $\frac{2\pi}{5}$ đổi sang độ là:
A. 135° . **B.** 72° . **C.** 270° . **D.** 240° .
- » **Câu 7.** Góc có số đo 108° đổi ra radian là:
A. $\frac{3\pi}{5}$. **B.** $\frac{\pi}{10}$. **C.** $\frac{3\pi}{2}$. **D.** $\frac{\pi}{4}$.
- » **Câu 8.** Một bánh xe có 72 răng. Số đo góc mà bánh xe đã quay được khi di chuyển 10 răng là:
A. 60° . **B.** 30° . **C.** 40° . **D.** 50° .
- » **Câu 9.** Trên đường tròn với điểm gốc là A . Điểm M thuộc đường tròn sao cho cung lượng giác AM có số đo 60° . Gọi N là điểm đối xứng với điểm M qua trục Oy , số đo cung AN là
A. -120° hoặc 240° . **B.** $120^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$.
C. 120° . **D.** -240° .
- » **Câu 10.** Trên đường tròn bán kính $r = 15$, độ dài của cung có số đo 50° là:
A. $l = 15 \cdot \frac{180}{\pi}$. **B.** $l = \frac{15\pi}{180}$. **C.** $l = 15 \cdot \frac{180}{\pi} \cdot 50$. **D.** $l = 750$.
- » **Câu 11.** Trên đường tròn bán kính $r = 5$, độ dài của cung đo $\frac{\pi}{8}$ là:
A. $l = \frac{\pi}{8}$. **B.** $l = \frac{3\pi}{8}$. **C.** $l = \frac{5\pi}{8}$. **D.** $l = \frac{2\pi}{3}$.
- » **Câu 12.** Số đo của cung tròn có độ dài 75(cm) trên đường tròn có đường kính 30(cm) (lấy $\pi \approx 3,14$ và làm tròn đến phút) có dạng a^0b' ($a, b \in \mathbb{Z}$). Giá trị của biểu thức $P = 2a - b$ bằng:



- A. 533. B. 535. C. 267. D. 266.

» Câu 13. Trên hình vẽ hai điểm M, N biểu diễn các cung có số đo là:

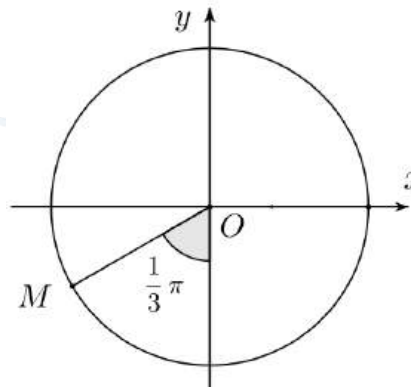


- A. $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$. B. $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$. C. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$. D. $x = \frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2}$.

» Câu 14. Trên đường tròn lượng giác gốc A, cho điểm M xác định bởi số $\widehat{AM} = \frac{\pi}{3}$. Gọi M_1 là điểm đối xứng của M qua trục Ox . Tìm số đo của cung lượng giác $\widehat{AM_1}$.

- A. số $\widehat{AM_1} = \frac{-5\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ B. số $\widehat{AM_1} = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$
C. số $\widehat{AM_1} = \frac{-\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ D. số $\widehat{AM_1} = \frac{-\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

» Câu 15. Điểm M trong hình vẽ sau là điểm biểu diễn của góc α .



Số đo của α là

- A. $\alpha = -\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. B. $\alpha = -\frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
C. $\alpha = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. D. $\alpha = -\frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

» Câu 16. Khi biểu diễn cung lượng giác trên đường tròn lượng giác, khẳng định nào dưới đây sai?

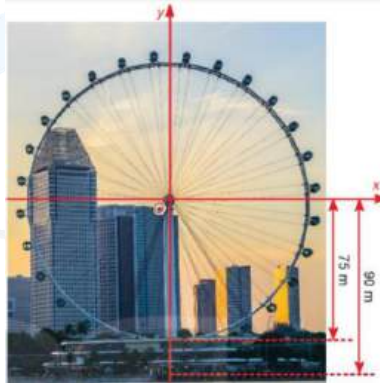
- A. Điểm biểu diễn cung α và cung $\pi - \alpha$ đối xứng nhau qua trục tung.
B. Điểm biểu diễn cung α và cung $-\alpha$ đối xứng nhau qua gốc tọa độ.
C. Mỗi cung lượng giác được biểu diễn bởi một điểm duy nhất.
D. Cung α và cung $\alpha + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ có cùng điểm biểu diễn.

» Câu 17. Một đồng hồ treo tường, kim giờ dài $10,57\text{cm}$ và kim phút dài $13,34\text{cm}$. Trong 30 phút mũi kim giờ vạch lên cung tròn có độ dài là

- A. $2,78\text{cm}$. B. $2,77\text{cm}$. C. $2,76\text{cm}$. D. $2,8\text{cm}$.



- » **Câu 18.** Trong 20 giây bánh xe của xe gắn máy quay được 60 vòng. Tính độ dài quãng đường xe gắn máy đã đi được trong vòng 3 phút, biết rằng bán kính bánh xe gắn máy bằng $6,5\text{cm}$ (lấy $\pi = 3,1416$)
A. 22043cm . **B.** 22055cm . **C.** 22042cm . **D.** 22054cm .
- » **Câu 19.** Một bánh xe đạp quay được 25 vòng trong 10 giây. Tính độ dài quãng đường mà người đi xe thực hiện được trong 2,35 phút, biết rằng bán kính bánh xe bằng 340mm . (Tính theo đơn vị mét, kết quả được làm tròn đến hàng phần trăm).
A. $314,5(m)$. **B.** $753,04(m)$. **C.** $514,8(m)$. **D.** $437,8(m)$.
- » **Câu 20.** Từ một vị trí ban đầu trong không gian, vệ tinh X chuyển động theo quỹ đạo là một đường tròn quanh Trái Đất và luôn cách tâm Trái Đất một khoảng bằng 9200km . Sau 2 giờ thì vệ tinh X hoàn thành hết một vòng di chuyển. Quãng đường vệ tinh X chuyển động được sau 1 giờ là
A. $28902,65(km)$. **B.** $29802,65(km)$. **C.** $32102,65(km)$. **D.** $28905(km)$.
- » **Câu 21.** Một chiếc đu quay có bán kính 75m , tâm của vòng quay ở độ cao 90m , thời gian thực hiện mỗi vòng quay của đu quay là 30 phút. Nếu một người vào cabin tại vị trí thấp nhất của vòng quay, thì sau 20 phút quay, người đó ở độ cao bao nhiêu mét?



- A.** $127,5(m)$. **B.** $154,3(m)$. **C.** $87,7(m)$. **D.** $157,5$.

B. Câu hỏi – Trả lời Đúng/sai

- » **Câu 22.** Đổi số đo của các góc sang radian. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$30^\circ = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$		
(b)	$\left(\frac{15}{\pi}\right)^\circ = \frac{1}{12} \text{ rad}$		
(c)	$132^\circ = \frac{11\pi}{15} \text{ rad}$		
(d)	$-495^\circ = -\frac{13\pi}{4} \text{ rad}$		

- » **Câu 23.** Đổi số đo của các góc sang độ. Khi đó:

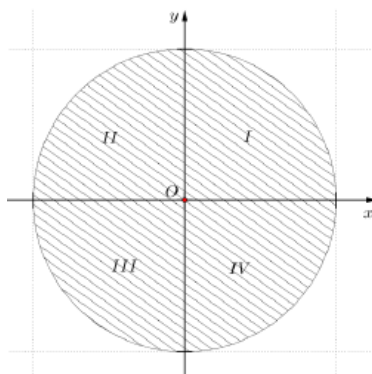
	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\frac{3\pi}{4} \text{ rad} = 135^\circ$		
(b)	$-\frac{\pi}{360} \text{ rad} = -0,5^\circ$		



(c) $\frac{31\pi}{2} \text{ rad} = 27^\circ$

(d) $-4 \text{ rad} \approx -229,18^\circ$

» Câu 24. Biểu diễn góc lượng giác trên đường tròn lượng giác. Khi đó:



Mệnh đề

Đúng

Sai

(a) 125° là điểm M thuộc góc phần tư thứ II

(b) 405° là điểm N thuộc góc phần tư thứ III

(c) $\frac{19\pi}{3}$ là điểm P thuộc góc phần tư thứ II

(d) $-\frac{13\pi}{6}$ là điểm Q thuộc góc phần tư thứ IV

» Câu 25. Biểu diễn góc lượng giác trên đường tròn lượng giác. Khi đó:

Mệnh đề

Đúng

Sai

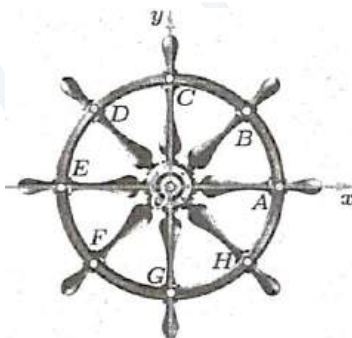
(a) $36^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$ là điểm M thuộc góc phần tư thứ II

(b) $-60^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$ là các điểm M_1, M_2 thuộc góc phần tư thứ II và IV

(c) $-\frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ là M thuộc góc phần tư thứ III

(d) $-\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ là bốn điểm M, N, P, Q thuộc góc phần tư thứ I, II, III, IV

» Câu 26. Trong hình vẽ bên, ta xem hình ảnh đường tròn trên một bánh lái tàu thủy tương ứng với một đường tròn lượng giác.



Mệnh đề

Đúng

Sai

(a) Công thức tổng quát biểu diễn góc lượng giác (OA, OB) theo đơn vị radian: $(OA, OB) = \frac{\pi}{4} + k2\pi (k \in \mathbb{Z});$



(b)	Công thức tổng quát chỉ ra góc lượng giác tương ứng với bốn điểm biểu diễn là A, C, E, G theo đơn vị radian là $k\frac{\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$		
(c)	Công thức tổng quát chỉ ra góc lượng giác tương ứng với hai điểm biểu diễn là A, E theo đơn vị độ là: $k180^\circ (k \in \mathbb{Z})$		
(d)	Công thức tổng quát biểu diễn góc lượng giác $(OA, OC) + (OC, OH)$ theo đơn vị radian: $\frac{\pi}{4} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$		

» **Câu 27.** Đường kính của một bánh xe máy là 60 (cm). Trong mỗi ý ở mỗi câu, hãy chọn đúng hay sai

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Độ dài cung 40° của một bánh xe gần bằng 20,94(cm), kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ 2.		
(b)	Mỗi bánh xe phải lăn một vòng thì người đi xe đi được quãng đường 94,2(cm), kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ 1.		
(c)	Để người đi xe đi được quãng đường 2(km) thì mỗi bánh xe phải lăn 1000 vòng		
(d)	Nếu xe chạy với vận tốc 50(km/h) thì trong 5 giây bánh xe quay được gần 36,9 vòng.		

» **Câu 28.** Trên đường tròn lượng giác tâm O và hệ trục tọa độ Oxy cho điểm M sao cho $\angle AOM = \frac{\pi}{5}$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Số đo của góc lượng giác có tia đầu là OA tia cuối là OM bằng $\frac{\pi}{5} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.		
(b)	Góc lượng giác có số đo $\frac{11\pi}{5}$ có cùng tia đầu và tia cuối với góc lượng giác (OA, OM) .		
(c)	Trên đường tròn lượng giác biểu diễn góc lượng giác có số đo $\frac{\pi}{5} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$ ta được 6 điểm.		
(d)	Khi biểu diễn góc $\alpha = \frac{\pi}{5} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ lên đường tròn lượng giác ta được tập hợp điểm là một đa giác đều thì diện tích của đa giác đều đó bằng 4.		

» **Câu 29.** Từ một vị trí ban đầu trong không gian, vệ tinh X chuyển động theo quỹ đạo là một đường tròn quanh Trái Đất và luôn cách tâm Trái Đất một khoảng bằng 9200km. Sau 2 giờ thì vệ tinh X hoàn thành hết một vòng di chuyển.

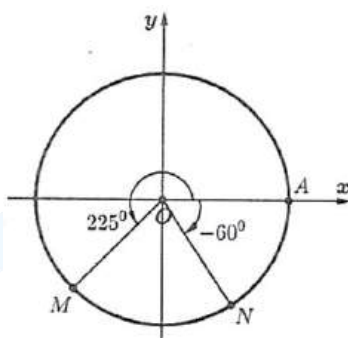
	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Quãng đường vệ tinh X chuyển động được sau 1 giờ là: $\approx 28902,65(km)$, kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ 2.		



(b)	Quãng đường vệ tinh X chuyển động được sau 1,5 giờ là: $\approx 43353,98(km)$, kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ 2.		
(c)	Sau khoảng 5,3 giờ thì X di chuyển được quãng đường $240000(km)$		
(d)	Giả sử vệ tinh di chuyển theo chiều dương của đường tròn, sau 4,5 giờ thì vệ tinh vẽ nên một góc $\frac{9\pi}{2}$ rad?		

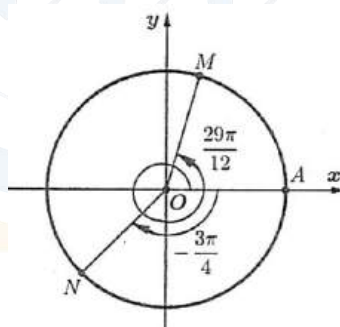
C. Câu hỏi – Trả lời ngắn

» **Câu 30.** Từ hình vẽ đường tròn lượng giác, công thức số đo tổng quát của góc lượng giác (OA, OM) ; (OA, ON) có dạng lần lượt là $n^\circ + k360^\circ$ ($k \in \mathbb{Z}$); $m^\circ + k360^\circ$ ($k \in \mathbb{Z}$) với $n; m$ là các số nguyên. Tính giá trị $S = \frac{1}{4}m^2 - n$



» **Điền đáp số:**

» **Câu 31.** Từ hình vẽ đường tròn lượng giác, công thức số đo tổng quát của góc lượng giác (OA, OM) ; (OA, ON) có dạng lần lượt là $\frac{n}{m}\pi + k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$); $-\frac{p}{q}\pi + k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) với $m; n; p; q$ là các số nguyên và $\frac{n}{m}; \frac{p}{q}$ là phân số tối giản. Tính giá trị $T = (m+p) - (n+q)$



» **Điền đáp số:**

» **Câu 32.** Một bánh xe có đường kính kể cả lốp xe là $55cm$. Nếu xe chạy với tốc độ $50km/h$ thì trong một giây bánh xe quay được bao nhiêu vòng? (Kết quả được làm tròn đến hàng phần trăm).

» **Điền đáp số:**

» **Câu 33.** Một bánh xe đạp quay được 25 vòng trong 10 giây. Tính độ dài quãng đường mà người đi xe thực hiện được trong 2,35 phút, biết rằng bán kính bánh xe bằng $340mm$. (Tính theo đơn vị mét, kết quả được làm tròn đến hàng đơn vị).

» **Điền đáp số:**



- » **Câu 34.** Một cái đồng hồ treo tường có đường kính bằng 60cm , ta xem vành ngoài chiếc đồng hồ là một đường tròn với các điểm A, B, C lần lượt tương ứng với vị trí các số $2, 9, 4$. Tính tổng độ dài các cung nhỏ AB và AC (kết quả tính theo đơn vị centimét và làm tròn đến hàng phần trăm).



Điền đáp số:

- » **Câu 35.** Gọi M, N, P là các điểm trên đường tròn lượng giác sao cho số đo các góc lượng giác $(OA, OM), (OA, ON), (OA, OP)$ lần lượt bằng $\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}$ và $MN = NP = 2$. Tính diện tích tam giác MNP . Kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ 2.

Điền đáp số:

----- Hết -----

TOÁN TỪ TÂM



Chương 01

Bài 2.

GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC LƯỢNG GIÁC

A

Lý thuyết

1. Giá trị lượng giác của một góc lượng giác

Định nghĩa:

Trên đường tròn lượng giác, gọi $M(x_M; y_M)$ là điểm biểu diễn góc lượng giác có số đo α . Khi đó:

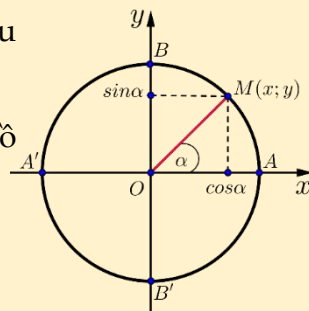
• Qui ước chọn chiều **ngược** với chiều quay của kim đồng hồ làm **chiều dương**.

• y_M điểm M gọi là sin của α . Ký hiệu là $\sin \alpha = y_M$

• x_M điểm M gọi là cosin của α . Ký hiệu là $\cos \alpha = x_M$

• Nếu $\cos \alpha = x_M \neq 0$, $\frac{y_M}{x_M} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ gọi là tang của α . Ký hiệu $\tan \alpha = \frac{y_M}{x_M} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.

• Nếu $\sin \alpha = y_M \neq 0$, $\frac{x_M}{y_M} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ gọi là côtang của α . Ký hiệu $\cot \alpha = \frac{x_M}{y_M} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$.



Chú ý

(1) Các giá trị:

1. $\sin \alpha, \cos \alpha$ xác định $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

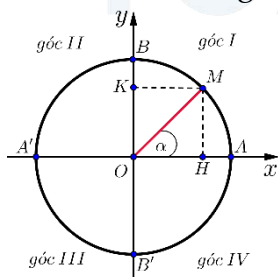
2. $\tan \alpha$ xác định $\forall \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$. 3. $\cot \alpha$ xác định $\forall \alpha \neq k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

(2) Với mọi góc lượng giác α , ta có

1. $\sin(\alpha + k2\pi) = \sin \alpha, \forall k \in \mathbb{Z}$; 3. $\tan(\alpha + k\pi) = \tan \alpha, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}$;

2. $\cos(\alpha + k2\pi) = \cos \alpha, \forall k \in \mathbb{Z}$; 4. $\cot(\alpha + k\pi) = \cot \alpha, \alpha \neq k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}$.

(3) Dấu của các giá trị lượng giác của góc α :



		Góc phần tư			
		I	II	III	IV
Giá trị lượng giác	$\cos \alpha$	+	-	-	+
	$\sin \alpha$	+	+	-	-
	$\tan \alpha$	+	-	+	-
	$\cot \alpha$	+	-	+	-



2. Hệ thức cơ bản giữa các giá trị lượng giác của một góc lượng giác



$$(1) \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$(2) \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1, \alpha \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$(3) 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$(4) 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

3. Mối quan hệ giữa các giá trị lượng giác của hai góc đối nhau

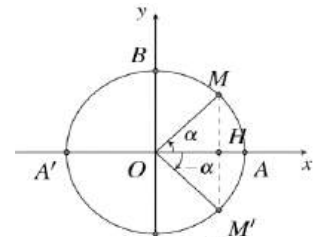
$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$$

Cos – đối



4. Mối quan hệ giữa các giá trị lượng giác của hai góc bù nhau

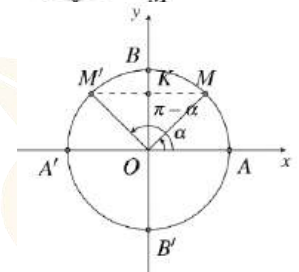
$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$$

Sin – bù



5. Mối quan hệ giữa các giá trị lượng giác của hai góc phụ nhau

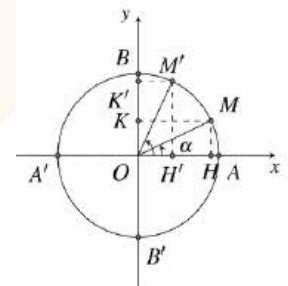
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha$$

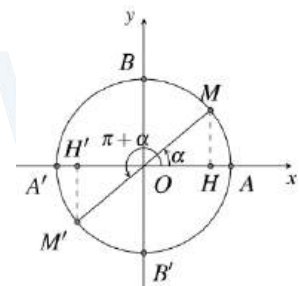
$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$$

Phụ – chéo



6. Mối quan hệ giữa các giá trị lượng giác của hai góc hơn kém

$$\begin{aligned} \sin(\pi + \alpha) &= -\sin \alpha & \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) &= \cos \alpha \\ \cos(\pi + \alpha) &= -\cos \alpha & \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) &= -\sin \alpha \\ \tan(\pi + \alpha) &= \tan \alpha & \tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) &= -\cot \alpha \\ \cot(\pi + \alpha) &= \cot \alpha & \cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) &= -\tan \alpha \end{aligned}$$





► Giá trị lượng giác của các cung đặc biệt:

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	Không xác định
$\cot \alpha$	Không xác định	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0



TOÁN TỬ TÂM



Các dạng bài tập

Dạng 1. Tính giá trị lượng giác của 1 góc lượng giác



Phương pháp

▶ Áp dụng hệ thức cơ bản:

$$(1) \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$(2) \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1, \alpha \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$(4) 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$(3) 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$(5) \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$(6) \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

▶ Đồng thời từ dữ kiện $a < \alpha < b$ ($a < b$) thì xác định cụ thể dấu của $\sin \alpha$ và/hoặc $\cos \alpha$.

▶ Từ đó tính được chính xác các giá trị lượng giác còn lại.



Ví dụ 1.1.

Cho $\cos x = \frac{2}{\sqrt{5}}$ ($-\frac{\pi}{2} < x < 0$). Tính giá trị của các giá trị lượng giác còn lại.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....



Ví dụ 1.2.

Cho $\sin x = \frac{3}{5}$ ($\frac{\pi}{2} < x < \pi$). Tính giá trị của các giá trị lượng giác còn lại.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....



Ví dụ 1.3.

Cho $\tan x = \frac{3}{4}$ $\left(-\pi < x < -\frac{\pi}{2}\right)$. Tính giá trị của các giá trị lượng giác còn lại.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....



Ví dụ 1.4.

Cho $\cot x = \frac{3}{4}$ $\left(\pi < x < \frac{3\pi}{2}\right)$. Tính giá trị của các giá trị lượng giác còn lại.

Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

TOÁN TỬ TÂM



Dạng 2. Tính giá trị lượng giác liên quan góc đặc biệt



Phương pháp

- ▶ Áp dụng các hệ thức cơ bản.
- ▶ Áp dụng mối quan hệ giữa các giá trị lượng giác.

(1) Cos – đối:

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$$

(2) Sin – bù:

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$$

(4) Phụ – chéo

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$$

(3) Hơn kém $\frac{\pi}{2}$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot \alpha$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan \alpha$$

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$$

$$\cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha$$

(5) Hơn kém π



Ví dụ 2.1.

Tính giá trị của biểu thức:

(1) $S = 3 - \sin^2 90^\circ + 2 \cos^2 60^\circ - 3 \tan^2 45^\circ$

(2) $K = \sin^2 10^\circ + \sin^2 20^\circ + \sin^2 30^\circ + \dots + \sin^2 70^\circ + \sin^2 80^\circ$

(3) $M = \cos^2 10^\circ + \cos^2 20^\circ + \cos^2 30^\circ + \dots + \cos^2 170^\circ + \cos^2 180^\circ$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 2.2.

Chứng minh

$$D = \sin\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right) + \cos(13\pi + \alpha) - 3\sin(\alpha - 5\pi) = 3\sin\alpha$$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 2.3.

Trên đường tròn lượng giác, xác định điểm M biểu diễn góc lượng giác có số đo $\frac{5\pi}{6}$.
Cho biết, khi quét góc lượng giác từ $(-1012\pi; 1012\pi)$ có bao nhiêu cặp góc đối có giá trị $|\sin|$ bằng $\sin\frac{5\pi}{6}$?

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

TOÁN TỪ TÂM



Dạng 4. Giá trị lớn nhất - giá trị nhỏ nhất



Phương pháp

▶ Áp dụng hệ thức cơ bản:

(1) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

(2) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad \alpha \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

(4) $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \quad 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$

(3) $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \quad \alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$

(5) $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

(6) $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$

▶ Áp dụng các hệ thức cơ bản.

▶ Áp dụng mối quan hệ: Cos - đối; Sin - bù; Phụ - chéo; Hơn kém $\frac{\pi}{2} / \pi$.

▶ Với mọi góc lượng giác α , ta có: $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$ và $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$

1. $\sin(\alpha + k2\pi) = \sin \alpha, \forall k \in \mathbb{Z};$

2. $\cos(\alpha + k2\pi) = \cos \alpha, \forall k \in \mathbb{Z};$



Ví dụ 4.1.

Tìm giá trị lớn nhất - nhỏ nhất của:

(1) $A = \cos(2x) + 3$

(2) $D = 1 - \sin 2x$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 4.2.

Tìm giá trị lớn nhất - nhỏ nhất của:

(1) $Z = \sqrt{2 \cos x + 3} - 4$

(2) $V = \sqrt{2 + \cos 2x}$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm

» Câu 36. Cho $\frac{\pi}{2} < a < \pi$. Kết quả đúng là

A. $\sin a > 0, \cos a > 0$.

B. $\sin a < 0, \cos a < 0$.

C. $\sin a > 0, \cos a < 0$.

D. $\sin a < 0, \cos a > 0$.

» Câu 37. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào đúng?

A. $\sin(180^\circ - a) = -\cos a$.

B. $\sin(180^\circ - a) = -\sin a$.

C. $\sin(180^\circ - a) = \sin a$.

D. $\sin(180^\circ - a) = \cos a$.

» Câu 38. Chọn đẳng thức sai trong các đẳng thức sau

A. $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$.

B. $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$.

C. $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$.

D. $\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cot x$.

» Câu 39. Cho biết $\tan \alpha = \frac{1}{2}$. Tính $\cot \alpha$

A. $\cot \alpha = 2$.

B. $\cot \alpha = \frac{1}{4}$.

C. $\cot \alpha = \frac{1}{2}$.

D. $\cot \alpha = \sqrt{2}$.

» Câu 40. Cho $\frac{\pi}{2} < a < \pi$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\sin a < 0$.

B. $\tan a > 0$.

C. $\cot a > 0$.

D. $\cos a < 0$.

» Câu 41. Biết $\tan \alpha = 2$ và $\pi < a < \frac{3\pi}{2}$. Tính $\sin \alpha$.

A. $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

B. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

C. $-\frac{\sqrt{5}}{5}$.

D. $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

» Câu 42. Biết $\tan \alpha = -3$. Tính $\tan\left(\alpha - \frac{7\pi}{2}\right)$.

A. $-\frac{1}{3}$.

B. $\frac{1}{3}$.

C. 3.

D. -3.

» Câu 43. Trong các công thức sau, công thức nào sai?

A. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

B. $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right)$.

C. $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \left(\alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \right)$.

D. $\tan \alpha + \cot \alpha = 1 \left(\alpha \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right)$.

» Câu 44. Cho $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Giá trị của $\cos \alpha$ là:

A. $\frac{4}{5}$.

B. $-\frac{4}{5}$.

C. $\pm \frac{4}{5}$.

D. $\frac{16}{25}$.

» Câu 45. Cho $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ với $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Tính $\sin \alpha$.



A. $\sin \alpha = \frac{1}{5}$. B. $\sin \alpha = -\frac{1}{5}$. C. $\sin \alpha = \frac{3}{5}$. D. $\sin \alpha = \pm \frac{3}{5}$.

» Câu 46. Rút gọn biểu thức $P = \sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(a - \frac{\pi}{4}\right)$.

A. $-\frac{3}{2}\cos 2a$. B. $\frac{1}{2}\cos 2a$. C. $-\frac{2}{3}\cos 2a$. D. $-\frac{1}{2}\cos 2a$.

» Câu 47. Giá trị biểu thức $P = \sin^2 \frac{\pi}{6} + \sin^2 \frac{\pi}{3} + \sin^2 \frac{\pi}{4} + \sin^2 \frac{9\pi}{4} + \tan \frac{\pi}{6} \cot \frac{\pi}{6}$ bằng

A. 2. B. 4. C. 3. D. 1.

» Câu 48. Cho $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Giá trị của $\cos \alpha$ là:

A. $\frac{4}{5}$. B. $-\frac{4}{5}$. C. $\pm \frac{4}{5}$. D. $\frac{16}{25}$.

» Câu 49. Cho $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ với $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Tính $\sin \alpha$.

A. $\sin \alpha = \frac{1}{5}$. B. $\sin \alpha = -\frac{1}{5}$. C. $\sin \alpha = \frac{3}{5}$. D. $\sin \alpha = \pm \frac{3}{5}$.

» Câu 50. Cho $\tan \alpha = -\frac{4}{5}$ với $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Khi đó:

A. $\sin \alpha = -\frac{4}{\sqrt{41}}$, $\cos \alpha = -\frac{5}{\sqrt{41}}$. B. $\sin \alpha = \frac{4}{\sqrt{41}}$, $\cos \alpha = \frac{5}{\sqrt{41}}$.
C. $\sin \alpha = -\frac{4}{\sqrt{41}}$, $\cos \alpha = \frac{5}{\sqrt{41}}$. D. $\sin \alpha = \frac{4}{\sqrt{41}}$, $\cos \alpha = -\frac{5}{\sqrt{41}}$.

» Câu 51. Trên nửa đường tròn đơn vị cho góc α sao cho $\sin \alpha = \frac{2}{3}$ và $\cos \alpha < 0$. Tính $\tan \alpha$.

A. $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$. B. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. C. $-\frac{2}{5}$. D. 1.

» Câu 52. Cho $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Khi đó $\cos \alpha$ có giá trị là.

A. $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$. B. $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. C. $\cos \alpha = \frac{8}{9}$. D. $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

» Câu 53. Cho $P = \frac{3\sin x - \cos x}{\sin x + 2\cos x}$ với $\tan x = 2$. Giá trị của P bằng

A. $\frac{8}{9}$. B. $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$. C. $\frac{\sqrt{8}}{9}$. D. $\frac{5}{4}$.

» Câu 54. Cho $\sin x = \frac{1}{2}$ và $\cos x$ nhận giá trị âm, giá trị của biểu thức $A = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$ bằng

A. $-2 - \sqrt{3}$. B. $2 + \sqrt{3}$. C. $-2 + \sqrt{3}$. D. $2 - \sqrt{3}$.

» Câu 55. Biểu thức $P = \frac{3}{\cos^4 x} - 2\tan^4 x$ trên $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ đạt giá trị lớn nhất tại

A. $x = 0$. B. $x = \frac{\pi}{3}$. C. $x = \frac{\pi}{6}$. D. $x = \frac{\pi}{12}$.



- » **Câu 56.** Một vật dao động điều hòa theo phương trình $x = 1,25 \cos\left(2\pi t - \frac{\pi}{12}\right)$ (cm) (t đo bằng giây). Tính quãng đường vật đi được sau thời gian $t = 2,5s$ kể từ lúc bắt đầu dao động.
A. 4,21(cm). **B.** 3,21(cm). **C.** 1,21(cm). **D.** 2,21(cm).

- » **Câu 57.** Hằng ngày, mực nước của một con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu h (m) của con kênh tính theo thời gian t (giờ) trong một ngày được cho bởi công thức:

$$h = \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi t}{8} + \frac{\pi}{4}\right) + 3, \quad 0 \leq t \leq 24.$$

Hỏi tại thời nào trong ngày thì mực nước của con kênh cao nhất?

- A.** 10(h). **B.** 12(h). **C.** 14(h). **D.** 15(h).

B. Câu hỏi – Trả lời Đúng/sai

- » **Câu 58.** Cho $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Xét được dấu của các biểu thức sau. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$A = \sin(\alpha + 90^\circ) > 0$		
(b)	$B = \cos(\alpha - 45^\circ) > 0$		
(c)	$C = \tan(270^\circ - \alpha) < 0$		
(d)	$D = \cos(2\alpha + 90^\circ) > 0$		

- » **Câu 59.** Cho $\tan x = -2$. Tính được các biểu thức $A_1 = \frac{5 \cot x + 4 \tan x}{5 \cot x - 4 \tan x}$, $A_2 = \frac{2 \sin x + \cos x}{\cos x - 3 \sin x}$, khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\cot x = -\frac{1}{2}$		
(b)	Vì $\tan x = -2$ nên $\cos x = 0$		
(c)	$A_1 = -\frac{21}{11}$		
(d)	$A_2 = \frac{3}{7}$		

- » **Câu 60.** Cho $\cot x = 2$. Tính được các biểu thức $B_1 = \frac{2 \sin x + 3 \cos x}{3 \sin x - 2 \cos x}$, $B_2 = \frac{2}{\cos^2 x - \sin x \cos x}$, khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Vì $\cot x = 2$ nên $\sin x \neq 0$.		
(b)	$B_1 = -8$		
(c)	$B_2 = -5$		
(d)	$B_1 + B_2 = -13$		

- » **Câu 61.** Từ một vị trí ban đầu trong không gian, vệ tinh X chuyển động theo quỹ đạo là một đường tròn quanh Trái Đất và luôn cách tâm Trái Đất một khoảng bằng 9200km. Sau 2 giờ thì vệ tinh X hoàn thành hết một vòng di chuyển.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Quãng đường vệ tinh X chuyển động được sau 1 giờ là: $\approx 28902,65$ (km).		



(b)	Quãng đường vệ tinh X chuyển động được sau 1,5 giờ là: $\approx 43353,98(km)$		
(c)	Sau khoảng 5,3 giờ thì X di chuyển được quãng đường 240000km		
(d)	Giả sử vệ tinh di chuyển theo chiều dương của đường tròn, sau 4,5 giờ thì vệ tinh vẽ nên một góc $\frac{9\pi}{2}$ rad		

» Câu 62. Cho $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Xét được dấu của các biểu thức sau. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$A = \cos(\alpha + \pi) < 0$		
(b)	$B = \tan(\alpha - \pi) > 0$		
(c)	$C = \sin\left(\alpha + \frac{2\pi}{5}\right) < 0$		
(d)	$D = \cos\left(\alpha - \frac{3\pi}{8}\right) < 0$		

» Câu 63. Tính được các giá trị lượng giác còn lại của góc x , biết: $\tan x = \frac{1}{3}$ với $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\cos x < 0$		
(b)	$\cos x = -\frac{\sqrt{10}}{10}$		
(c)	$\sin x = -\frac{\sqrt{10}}{10}$		
(d)	$\sin x + \cos x = -\frac{\sqrt{10}}{5}$		

» Câu 64. Tính được các giá trị lượng giác của góc α , biết: $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{4}$, $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\cos^2 \alpha = \frac{9}{16}$		
(b)	$\cos \alpha = -\frac{3}{4}$		
(c)	$\cot \alpha = -\frac{3}{\sqrt{7}}$		
(d)	$\tan \alpha + \cot \alpha = -\frac{16\sqrt{7}}{23}$		

» Câu 65. Tính được các giá trị lượng giác của góc α , biết: $\tan \alpha = 2, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Khi đó

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\cot \alpha = \frac{1}{2}$		



(b)	$\cos^2 \alpha = \frac{1}{5}$		
(c)	$\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$		
(d)	$\sin \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$		

» Câu 66. Tính được các giá trị lượng giác của góc α , biết: $\sin \alpha = \frac{2}{3}, \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\cos \alpha < 0$		
(b)	$\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$		
(c)	$\tan \alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$		
(d)	$\cot \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}$		

» Câu 67. Tính được các giá trị lượng giác của góc α , biết: $\cos \alpha = -\frac{3}{4}, -\frac{3\pi}{2} < \alpha < -\pi$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\sin \alpha < 0$		
(b)	$\sin \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{4}$		
(c)	$\tan \alpha = \frac{-\sqrt{7}}{3}$		
(d)	$\cot \alpha = -\frac{3}{\sqrt{7}}$		

» Câu 68. Tính được các giá trị lượng giác của góc α , biết: $\tan \alpha = \frac{2\sqrt{10}}{9}, \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\cot \alpha = \frac{9}{2\sqrt{10}}$		
(b)	$\cos \alpha = -\frac{9}{11}$		
(c)	$\begin{cases} \cos \alpha < 0 \\ \sin \alpha < 0 \end{cases}$		
(d)	$\sin \alpha = -\frac{2\sqrt{10}}{11}$		

» Câu 69. Tính được các giá trị lượng giác của góc α , biết: $\cot \alpha = \sqrt{2} + 1, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\begin{cases} \cos \alpha > 0 \\ \sin \alpha > 0 \end{cases}$		



(b)	$\tan \alpha = \sqrt{2} + 1$		
(c)	$\sin \alpha = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}}{2}$		
(d)	$\cos \alpha = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2}$		

C. Câu hỏi – Trả lời ngắn

» **Câu 70.** Cho $\cos x = \frac{1}{2}$. Tính giá trị biểu thức $P = 3\sin^2 x + 4\cos^2 x$.

✎ **Điền đáp số:**

» **Câu 71.** Biểu thức sau: $T = 2\sin\left(\frac{9\pi}{2} - x\right) + 3\cos(19\pi - x) = k \cos x$. Khi đó $k = ?$

✎ **Điền đáp số:**

» **Câu 72.** Biểu thức sau: $S = \frac{\sin\left(\frac{15\pi}{2} - x\right) - 2\cos(x - \pi)}{\cos\left(\frac{5\pi}{2} - x\right)} = k \cot x$. Khi đó $k = ?$

✎ **Điền đáp số:**

» **Câu 73.** Cho tam giác ABC , khi đó biểu thức $\frac{\sin^3 \frac{B}{2}}{\cos\left(\frac{A+C}{2}\right)} + \frac{\cos^3 \frac{B}{2}}{\sin\left(\frac{A+C}{2}\right)} - \frac{\cos(A+C)}{\sin B} \tan B$

bằng?

✎ **Điền đáp số:**

» **Câu 74.** Biểu thức $A = \tan\left(\frac{17\pi}{2} - x\right) + 2\cot(5\pi + x) = k \cot x$, khi đó: $k = ?$

✎ **Điền đáp số:**

» **Câu 75.** Biểu thức $B = \frac{2\sin(x - 4\pi) + \cos\left(x - \frac{5\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)} = k \tan x$, khi đó: $k = ?$

✎ **Điền đáp số:**

» **Câu 76.** Cho $\cot \alpha = \frac{1}{3}$. Tính giá trị của biểu thức $A = \frac{3\sin \alpha + 4\cos \alpha}{2\sin \alpha - 5\cos \alpha}$.

✎ **Điền đáp số:**



» **Câu 77.** Cho $\cos \alpha = \frac{3}{4}$. Tính giá trị của biểu thức $B = \frac{\tan \alpha + 3 \cot \alpha}{\tan \alpha + \cot \alpha}$. Kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ 2.

» **Điền đáp số:**

» **Câu 78.** Cho $\tan \alpha = \sqrt{2}$. Tính giá trị của biểu thức $C = \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin^3 \alpha + 3 \cos^3 \alpha + 2 \sin \alpha}$. Kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ 2.

» **Điền đáp số:**

» **Câu 79.** Biết $\sin a + \cos a = \sqrt{2}$. Tính giá trị của $\sin^4 a + \cos^4 a$.

» **Điền đáp số:**

» **Câu 80.** Đơn giản các biểu thức sau (giả sử mỗi biểu thức sau luôn có nghĩa):

$$C = \frac{\cos^2 x - \sin^2 y}{\sin^2 x \sin^2 y} - \cot^2 x \cot^2 y.$$

» **Điền đáp số:**

» **Câu 81.** Trong tam giác ABC ta có: $\cos A + \cos(B + C) + \tan \frac{A + B}{2} = k \cot \frac{C}{2}$. Khi đó: $k = ?$

» **Điền đáp số:**

» **Câu 82.** Cho biểu thức $f(x) = 3(\sin^4 x + \cos^4 x) - 2(\sin^6 x + \cos^6 x)$ tính $f(1)$

» **Điền đáp số:**

» **Câu 83.** Cho biểu thức $g(x) = \frac{-2 \cot^2 x - \cos^2 x}{\cot^2 x} + \frac{\sin x \cos x}{\cot x}$ với $x \neq 0, x \neq \frac{\pi}{2}, x \neq \pi$. Tính $g\left(\frac{2024\pi}{2023}\right)$

» **Điền đáp số:**

» **Câu 84.** Cho hai góc nhọn a và b . Biết $\cos a = \frac{1}{3}$ và $\cos b = \frac{1}{4}$. Tính giá trị của:

$$P = (\cos a \cdot \cos b)^2 - (\sin a \cdot \sin b)^2.$$

» **Điền đáp số:**

» **Câu 85.** Cho $\tan x = -\frac{4}{3}$ và $\frac{\pi}{2} < x < \pi$. Tính giá trị của biểu thức $M = \frac{\sin^2 x - \cos x}{\sin x - \cos^2 x}$. Kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ 2.

» **Điền đáp số:**

» **Câu 86.** Cho $3 \cos \alpha - \sin \alpha = 1, 0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Tính giá trị của $\tan \alpha$. Kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ 2.

» **Điền đáp số:**



» **Câu 87.** Cho biểu thức $A = \frac{(1 - \tan^2 x)^2}{4 \tan^2 x} - \frac{1}{4 \sin^2 x \cos^2 x}$ khi $x = \frac{2024\pi}{2023}$ thì A bằng bao nhiêu?

✎ **Điền đáp số:**

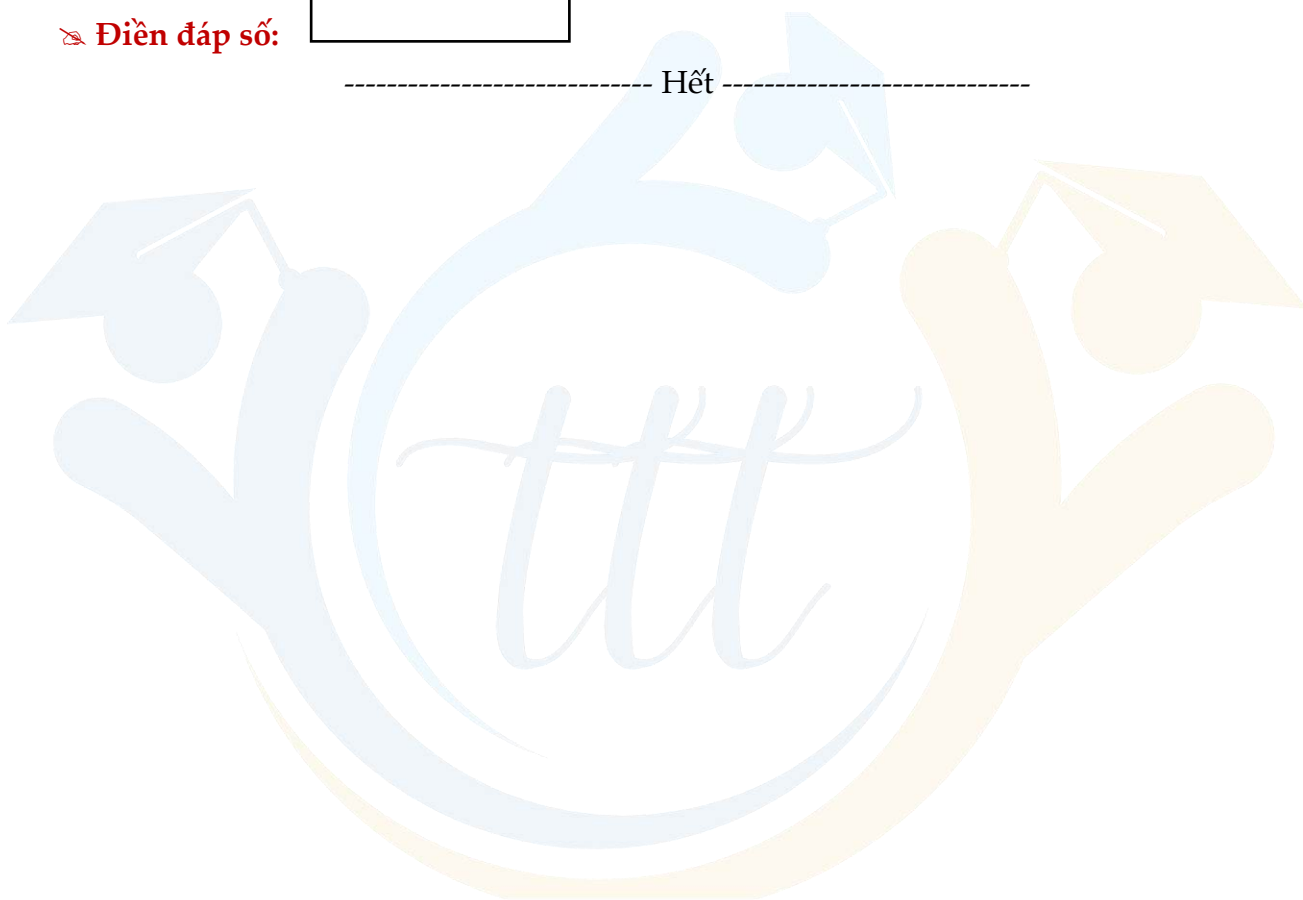
» **Câu 88.** Cho biểu thức $B = \left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin(10\pi + x) \right]^2 + \left[\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cos(8\pi - x) \right]^2$ khi $x = \frac{2024\pi}{2023}$ thì B bằng bao nhiêu?

✎ **Điền đáp số:**

» **Câu 89.** Tính $S = \sin^2 5^\circ + \sin^2 10^\circ + \sin^2 15^\circ + \dots + \sin^2 80^\circ + \sin^2 85^\circ$.

✎ **Điền đáp số:**

----- Hết -----



TOÁN TỪ TÂM



Chương 01

Bài 3.

CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

A

Lý thuyết

1. Công thức cộng



$$(1) \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$(2) \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$(3) \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$(4) \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$(5) \tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

$$(6) \tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

2. Công thức nhân đôi

Cho $a=b$ trong các công thức cộng, ta được:



Công thức nhân đôi:

$$(1) \sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

$$(2) \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$$

$$(3) \tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$$

Công thức hạ bậc:

$$(4) \cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$$

$$(5) \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$

$$(6) \tan^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{1 + \cos 2a}$$

3. Công thức biến đổi tích thành tổng



$$(1) \cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) + \cos(a+b)]$$

$$(2) \sin a \cdot \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

$$(3) \sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a-b) + \sin(a+b)]$$



4. Công thức biến đổi tổng thành tích

Từ công thức biến đổi tích thành tổng, đặt $u = a - b$, $v = a + b$ ta có



$$(1) \cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$$

$$(2) \cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}$$

$$(3) \sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$$

$$(4) \sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}$$



TOÁN TỪ TÂM



Các dạng bài tập

Dạng 1. Công thức cộng



Phương pháp

(1) $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

(2) $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

(3) $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

(4) $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

(5) $\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$

(6) $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$



Ví dụ 1.1.

Rút gọn các biểu thức:

(1) $A = \frac{\sqrt{2} \cos a - 2 \cos\left(\frac{\pi}{4} + a\right)}{-\sqrt{2} \sin a + 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + a\right)}$

(2) $B = (\tan a - \tan b) \cot(a-b) - \tan a \tan b$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 1.2.

Tính giá trị của các biểu thức sau:

(1) $A = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ biết $\sin x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ và $0 < x < \frac{\pi}{2}$

(2) $B = \cos(a+b) \cdot \cos(a-b)$ biết $\cos a = \frac{1}{3}$ và $\cos b = \frac{1}{4}$

Lời giải

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 2.3.

Cho $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, với $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$. Tính giá trị của $E = \sin 2\alpha + \tan 2\alpha$.

✎ Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....



Ví dụ 2.4.

Chứng minh biểu thức $P = \frac{1 - \cos 2x + \sin 2x}{1 + \cos 2x + \sin 2x} \cdot \cot x$ không phụ thuộc giá trị của x

✎ Lời giải

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

TOÁN TỪ TÂM



Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm

- » Câu 90. Rút gọn biểu thức $M = \cos 2x \cdot \cos x + \sin 2x \cdot \sin x$ ta được kết quả là:
A. $M = \cos x$. **B.** $M = \cos 3x$. **C.** $M = \sin x$. **D.** $M = \sin 3x$.
- » Câu 91. Rút gọn biểu thức $\cos(120^\circ - x) + \cos(120^\circ + x) - \cos x$ ta được kết quả là
A. 0. **B.** $-\cos x$ **C.** $-2\cos x$ **D.** $\sin x - \cos x$.
- » Câu 92. Biết $\sin a = \frac{5}{13}$, $\cos b = \frac{3}{5}$, $\left(\frac{\pi}{2} < a < \pi; 0 < b < \frac{\pi}{2}\right)$. Kết quả của biểu thức $\sin(a+b)$ bằng:
A. 0. **B.** $\frac{63}{65}$ **C.** $\frac{56}{65}$ **D.** $\frac{-33}{65}$.
- » Câu 93. Trong các công thức sau, công thức nào sai?
A. $\cos 6a = \cos^2 3a - \sin^2 3a$. **B.** $\cos 6a = 1 - 2\sin^2 3a$.
C. $\cos 6a = 1 - 6\sin^2 a$. **D.** $\cos 6a = 2\cos^2 3a - 1$.
- » Câu 94. Đẳng thức nào không đúng với mọi x ?
A. $\cos^2 3x = \frac{1 + \cos 6x}{2}$. **B.** $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$.
C. $\sin 2x = 2\sin x \cos x$. **D.** $\sin^2 2x = \frac{1 + \cos 4x}{2}$.
- » Câu 95. Nếu $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$ thì $\sin 2x$ bằng
A. $\frac{3}{4}$. **B.** $\frac{3}{8}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{-3}{4}$.
- » Câu 96. Biết rằng $\frac{1}{\cos^2 x - \sin^2 x} + \frac{2 \cdot \tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{\cos(ax)}{b - \sin(ax)}$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Tính giá trị của biểu thức $P = a + b$.
A. $P = 4$. **B.** $P = 1$. **C.** $P = 2$. **D.** $P = 3$.
- » Câu 97. Biết $\sin\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right) + \cos\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right) = \sqrt{2}$. Tính $\sin(\alpha + \pi) - 2\cos(\alpha - \pi)$.
A. $\frac{3}{\sqrt{2}}$. **B.** $-\frac{3}{\sqrt{2}}$. **C.** $-\frac{1}{\sqrt{2}}$. **D.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$.
- » Câu 98. Biết tam giác ABC có các góc thỏa mãn $\sin A + \sin B + \sin C = a \cos \frac{A}{b} \cos \frac{B}{b} \cos \frac{C}{b}$ với a, b nguyên. Tính $a + b$.
A. $a + b = 6$. **B.** $a + b = 4$. **C.** $a + b = 2$. **D.** $a + b = 8$.
- » Câu 99. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{2 \sin x + 2}$.
A. -1. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.
- » Câu 100. Cho tam giác ABC . Giá trị của biểu thức $P = \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C - 2 \cos A \cos B \cos C$ bằng
A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.



» **Câu 101.** Cho biểu thức $S = \sin x + \sin(x+a) + \sin(x+2a) + \sin(x+3a) + \sin(x+4a)$. Nếu $0 < a < \pi$ thì S không phụ thuộc vào x khi a nhận giá trị nào?

- A.** $a = \frac{2\pi}{5}$. **B.** $a = \frac{2\pi}{5}$ hoặc $a = \frac{4\pi}{5}$.
C. $a = -\frac{2\pi}{5}$ hoặc $a = \frac{4\pi}{5}$. **D.** $a = \frac{4\pi}{5}$.

B. Câu hỏi – Trả lời Đúng/sai

» **Câu 102.** Cho biết $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$ và các biểu thức $A = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \sin(\pi + \alpha)$;

$B = \cos(\pi - \alpha) + \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$. Khi đó

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$A = \cos \alpha - \sin \alpha$		
(b)	$B = \cos \alpha + \tan \alpha$		
(c)	$A + B = \frac{27}{20}$		
(d)	$A - B = -\frac{29}{20}$		

» **Câu 103.** Cho $0 < a < \frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2} < b < \pi$ và $\tan a = 3$; $\tan b = -2$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\tan(a + \pi) = -3$		
(b)	$\tan(a + b) = -1$		
(c)	$\cot(a - b) = 1$		
(d)	$\sin(a - b) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$		

» **Câu 104.** Cho $\sin x = -\frac{4}{5}$ và $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\cos 2x = -\frac{\sqrt{7}}{5}$		
(b)	$\sin \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$		
(c)	$\tan \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$		
(d)	$C = \frac{2 \sin 2x - \cos 2x}{\tan 2x + \cos 2x} = \frac{-287}{551}$.		

» **Câu 105.** Biết $\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{4}$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$A = \cos 2\alpha = \frac{3}{5}$		



(b)	$B = (1 + 3\sin^2 \alpha)(1 - 4\cos^2 \alpha) = \frac{17}{25}$		
(c)	$C = \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = \frac{7}{25}$		
(d)	$D = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{-7\sqrt{2}}{10}$		

» Câu 106. Cho tam giác ABC .

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$A = 180^\circ - (B + C)$		
(b)	$\sin B + \sin(A + C) = 0$		
(c)	$\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$		
(d)	$\triangle ABC$ cân khi $\sin A \cdot \sin C = \cos A \cdot \cos C$		

» Câu 107. Biết $\tan x = -\frac{1}{2}$ và $\frac{\pi}{2} < x < \pi$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

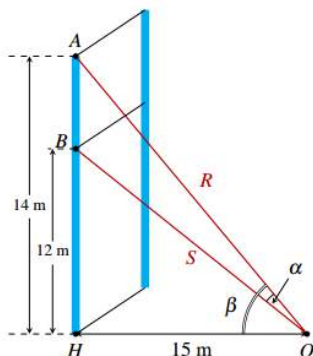
	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\cot x = -2$		
(b)	$\cos x = \frac{2\sqrt{5}}{5}$		
(c)	$\sin x + \cos x = -\frac{\sqrt{5}}{5}$		
(d)	$M = \frac{2\sin^2 x + 3\sin x \cdot \cos x - 4\cos^2 x}{5\cos^2 x - \sin^2 x} = -\frac{8}{19}$		

» Câu 108. Trong vật lý, phương trình tổng quát của một vật giao động điều hòa được cho bởi công thức $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ trong đó t là thời điểm (tính bằng giây), $x(t)$ là li độ của vật tại thời điểm t , A là biên độ dao động ($A > 0$). (Dùng cho ba ý a, b, c).

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Nếu một vật giao động theo phương trình $x(t) = 5 \cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$ thì li độ của vật ở thời điểm ban đầu là $5\sqrt{2}$.		
(b)	Một vật giao động điều hòa theo phương trình $x(t) = 10 \sin(50\pi t) \cdot \cos(50\pi t)$ thì biên độ của giao động là 5.		
(c)	Cho hai dao động điều hòa cùng phương có phương trình lần lượt là $x_1 = 5 \cos(100\pi t + \pi)$ (cm) và $x_2 = 5 \cos\left(100\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$ (cm). Khi đó phương trình dao động tổng hợp của hai dao động trên là $x = 5\sqrt{2} \cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$ (cm).		
(d)	Một sợi cáp R được gắn vào một cột thẳng đứng ở vị trí cách mặt đất 14m. Một sợi cáp S khác cũng được gắn vào cột đó ở vị trí cách mặt đất 12m. Biết rằng hai sợi cáp trên cùng được gắn với mặt đất		



tại một vị trí cách chân cột 15 m (Hình vẽ bên dưới). Gọi α là góc giữa hai sợi cáp trên khi đó $\tan \alpha = \frac{10}{131}$.



C. Câu hỏi – Trả lời ngắn

» **Câu 109.** Cho biểu thức $P = \cos 5x \cdot \cos 3x - \cos(5x + 90^\circ) \cdot \cos(-3x - 90^\circ)$. Sau khi đơn giản hóa, ta được biểu thức $P = \cos(ax)$. Giá trị của a bằng

Điền đáp số:

» **Câu 110.** Cho góc α thỏa mãn $\sin \alpha = \frac{1}{5}$. Khi đó giá trị biểu thức $P = \cos^2 2x + \cos^2 x$ bằng $\frac{a}{b}$. Tính $a+b$. Biết rằng phân số $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản.

Điền đáp số:

» **Câu 111.** Tính giá trị biểu thức: $A = \frac{\cos 10x - \cos 9x - \cos 8x + \cos 7x}{\sin 10x - \sin 9x - \sin 8x + \sin 7x}$ với $x = \frac{\pi}{34}$ (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Điền đáp số:

» **Câu 112.** Cho $\tan a = 2$ và $a \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Tính $A = 2\sqrt{2} \sin \frac{a}{2} \sin \left(\frac{a}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Điền đáp số:

» **Câu 113.** Cho $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Giá trị gần đúng của biểu thức $E = \frac{2 \tan \alpha - \cot \alpha}{\tan \alpha + 3 \cot \alpha}$ là bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

Điền đáp số:

» **Câu 114.** Cho biểu thức lượng giác sau (giả sử các biểu thức đều có nghĩa):

$A = \cos(5\pi - x) - \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cot(3\pi - x)$. Khi đó giá trị của $10A$ bằng bao nhiêu?

Điền đáp số:

» **Câu 115.** Đơn giản biểu thức $P = \left(\frac{1 - \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{1 + \cos \alpha}\right) \sin^2 \alpha$.



Điền đáp số:

» Câu 116. Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |\cos^4 x - \cos 2x + m|$ bằng 3. Tính tổng các phần tử của tập S .

Điền đáp số:

» Câu 117. Cho tam giác ABC có độ dài ba cạnh $BC = a, AC = b, AB = c$ thỏa mãn $a + c = 4b$. Tính giá trị biểu thức $P = \tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{C}{2}$.

Điền đáp số:

» Câu 118. Trong Vật lí, phương trình tổng quát của một vật dao động điều hòa cho bởi công thức $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, trong đó t là thời điểm (tính bằng giây), $x(t)$ là li độ của vật tại thời điểm t , A là biên độ dao động ($A > 0$) và $\varphi \in [-\pi; \pi]$ là pha ban đầu của dao động. Xét hai dao động điều hòa có phương trình:

$$x_1(t) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right) \text{ (cm)}, \quad x_2(t) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{3}\right) \text{ (cm)}.$$

Tìm pha ban đầu của dao động tổng hợp này. Kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ 2.

Điền đáp số:

Hết

TOÁN TỪ TÂM



Chương 01

Bài 4.

HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

A

Lý thuyết

1. Định nghĩa hàm số lượng giác



Định nghĩa:

- **Hàm số sin** là quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực x với số thực $\sin x$, ký hiệu $y = \sin x$.
- **Hàm số cos** là quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực x với số thực $\cos x$, ký hiệu $y = \cos x$.
- **Hàm số tan** là hàm số được xác định bởi công thức:

$$y = \frac{\sin x}{\cos x} \text{ với } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}), \text{ ký hiệu } y = \tan x.$$

- **Hàm số cotan** là hàm số được xác định bởi công thức:

$$y = \frac{\cos x}{\sin x} \text{ với } x \neq k\pi \ (k \in \mathbb{Z}), \text{ ký hiệu } y = \cot x.$$

Như vậy

- (1) Tập xác định của hàm số $y = \sin x$ và $y = \cos x$ là \mathbb{R}
- (2) Tập xác định của hàm số $y = \tan x$ là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \right\}$
- (3) Tập xác định của hàm số $y = \cot x$ là $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \ (k \in \mathbb{Z})\}$

2. Hàm số chẵn, hàm số lẻ, hàm số tuần hoàn



Hàm số chẵn - hàm số lẻ:

Hàm số $y = f(x)$ được gọi là

- **Hàm số chẵn** nếu $\forall x \in D$ ta có $-x \in D$ và $f(-x) = f(x)$.
- **Hàm số lẻ** nếu $\forall x \in D$ ta có $-x \in D$ và $f(-x) = -f(x)$.



Hàm số tuần hoàn:

Hàm số $y = f(x)$ được gọi là hàm số tuần hoàn nếu tồn tại số $T \neq 0$ sao cho $\forall x \in D$ ta có:

- (1) $x + T \in D$ và $x - T \in D$.
- (2) $f(x + T) = f(x)$.

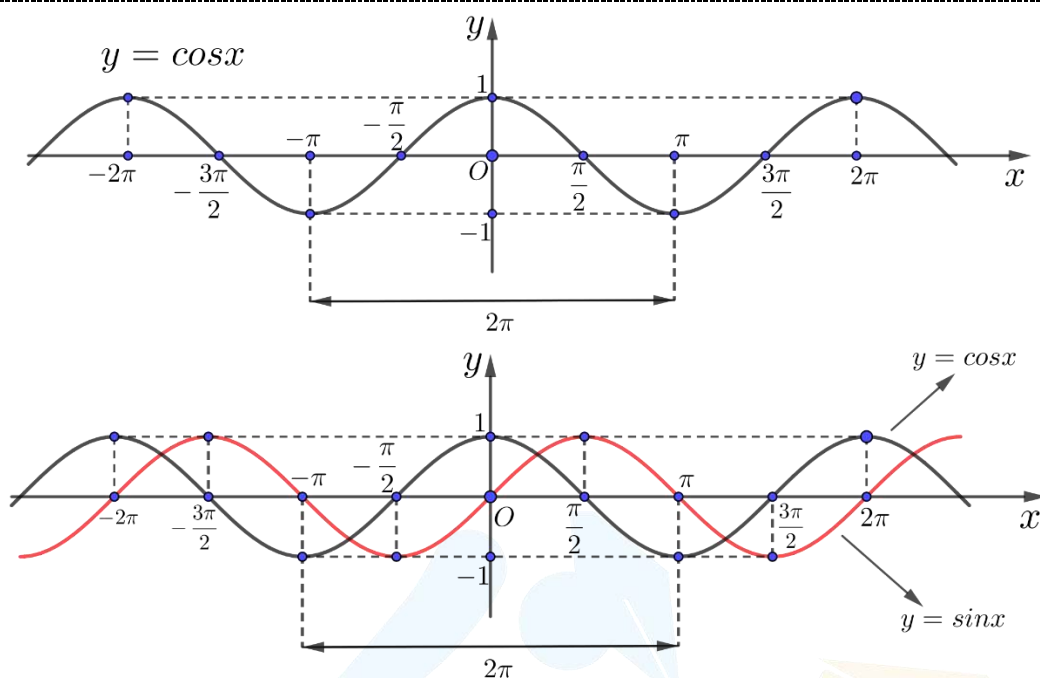
Số T dương nhỏ nhất thỏa mãn các điều kiện trên (nếu có) được gọi là **chu kì** của hàm số tuần hoàn đó.

Chú ý

- (1) Hàm số $y = \sin x$ và $y = \cos x$ là các hàm số tuần hoàn với chu kì 2π .
- (2) Hàm số $y = \tan x$ và $y = \cot x$ là các hàm số tuần hoàn với chu kì π .

3. Đồ thị & tính chất hàm số $y = \sin x$ và $y = \cos x$

	Hàm số $y = \sin x$	Hàm số $y = \cos x$
1. Định nghĩa:	Quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực x với sin của góc lượng giác có số đo x radian được gọi là hàm số sin. » Kí hiệu $y = \sin x$.	Quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực x với cos của góc lượng giác có số đo x radian được gọi là hàm số cos. » Kí hiệu $y = \cos x$.
2. Tập xác định:	$D = \mathbb{R}$	$D = \mathbb{R}$
3. Tập giá trị:	$[-1; 1]$	$[-1; 1]$
4. Tính chất	Là hàm số lẻ.	Là hàm số chẵn.
5. Chu kỳ	Chu kì 2π .	Chu kì 2π .
6. Đơn điệu	Hàm số + Đồng biến trên mỗi khoảng $(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi)$. + Nghịch biến trên mỗi khoảng $(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi)$.	Hàm số + Đồng biến trên mỗi khoảng $(-\pi + k2\pi; k2\pi)$. + Nghịch biến trên mỗi khoảng $(k2\pi; \pi + k2\pi)$.
7. Đồ thị		



8. Giá trị đặc biệt

$$\begin{aligned} \sin x = -1 &\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi . \\ \sin x = 0 &\Leftrightarrow x = k\pi . \\ \sin x = 1 &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi . \end{aligned}$$

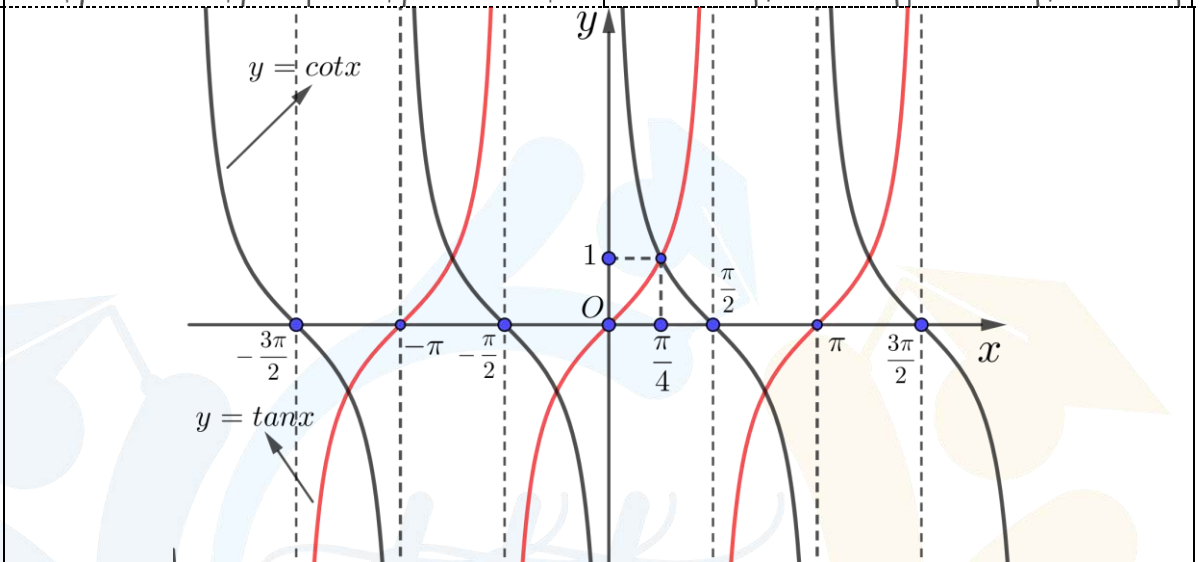
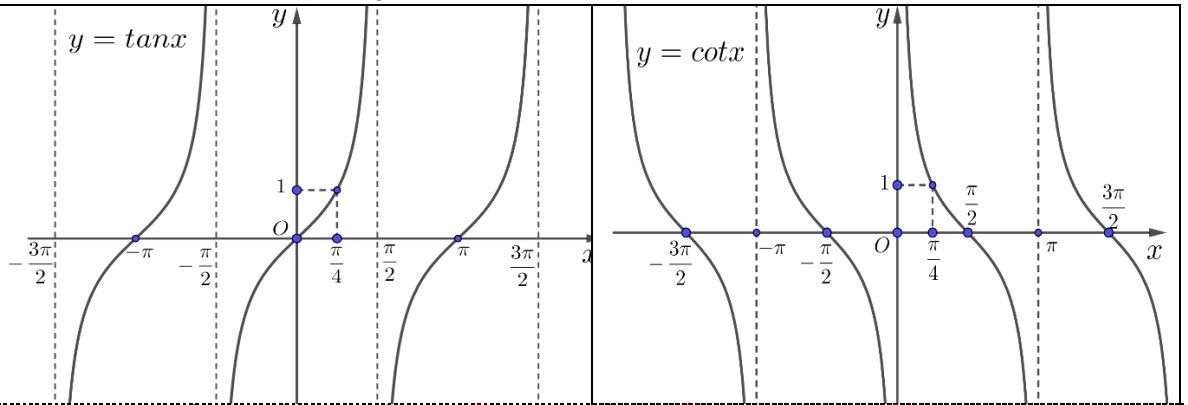
$$\begin{aligned} \cos x = -1 &\Leftrightarrow x = \pi + k2\pi . \\ \cos x = 0 &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi . \\ \cos x = 1 &\Leftrightarrow x = k2\pi . \end{aligned}$$

4. Đồ thị & tính chất hàm số $y = \tan x$ và $y = \cot x$

	Hàm số $y = \tan x$	Hàm số $y = \cot x$
1. Định nghĩa:	Hàm số tan là hàm số được xác định bởi công thức $y = \frac{\sin x}{\cos x}$ ($\cos x \neq 0$) » Kí hiệu $y = \tan x$.	Hàm số cotan là hàm số được xác định bởi công thức $y = \frac{\cos x}{\sin x}$ ($\sin x \neq 0$) » Kí hiệu $y = \cot x$.
2. Tập xác định:	$D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$	$D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
3. Tập giá trị:	$[-1; 1]$	$[-1; 1]$
4. Tính chất hàm	Là hàm số lẻ.	Là hàm số lẻ.
5. Chu kỳ	Chu kì π .	Chu kì π .
6. Đơn điệu	Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $\left(\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{3\pi}{2} + k\pi \right)$.	Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(k\pi; \pi + k\pi)$.



7. Đồ thị



TOÁN TỪ TÂM



➤ Dạng 2. Tính chẵn - lẻ



Phương pháp

- ▶ **Định nghĩa:** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên D
 - » **Hàm số chẵn** nếu $\forall x \in D$ ta có $-x \in D$ và $f(-x) = f(x)$.
 - » **Hàm số lẻ** nếu $\forall x \in D$ ta có $-x \in D$ và $f(-x) = -f(x)$.
- ▶ Để xác định **tính chẵn lẻ** của hàm số ta thực hiện theo các bước sau:
 - » **Bước 1:** Tìm tập xác định D của hàm số, khi đó:
 - ♦ Nếu D là tập đối xứng (tức là $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$), ta thực hiện tiếp **bước 2**.
 - ♦ Nếu D không là tập đối xứng (tức là $\exists x \in D$ mà $-x \notin D$), ta kết luận hàm số không chẵn cũng không lẻ.
 - » **Bước 2:** Xác định $f(-x)$, khi đó:
 - ♦ Nếu $f(-x) = f(x)$ kết luận hàm số là hàm chẵn.
 - ♦ Nếu $f(-x) = -f(x)$ kết luận hàm số là hàm lẻ.
 - ♦ Ngoài ra kết luận hàm số không chẵn cũng không lẻ.

▶ Chú ý:

- ① Với các hàm số lượng giác cơ bản, ta có:

1. Hàm số $y = \sin x$ là hàm số lẻ.	2. Hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn
3. Hàm số $y = \tan x$ là hàm số lẻ.	4. Hàm số $y = \cot x$ là hàm số lẻ.
- ② Công thức liên quan đến việc xử lí dấu “ - ”

1. Công thức hai cung đối nhau:

$$\begin{cases} \sin(-x) = -\sin x \\ \cos(-x) = \cos x \\ \tan(-x) = -\tan x \\ \cot(-x) = -\cot x \end{cases}$$

2. $|-x| = |x|$

3. $(-x)^n = \begin{cases} x^n & \text{khi } n:2 \\ -x^n & \text{khi } n \neq 2 \end{cases}$



Ví dụ 2.1.

Xét tính chẵn lẻ của các hàm số sau:

(1) $y = 3 \cos x + \sin^2 x$

(2) $y = \frac{1 + \sin^2 2x}{1 + \cos 3x}$

➤ Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Chú ý

Đôi khi người ta còn phát biểu bài toán dưới dạng:

» Với câu (1) $y = 2x \sin x$:

Chứng minh đồ thị hàm số $y = 2x \sin x$ nhận trục tung làm trục đối xứng.

» Với câu (3) $y = \frac{\cos 2x}{x}$.:

Chứng minh đồ thị hàm số $y = \frac{\cos 2x}{x}$ nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng.

» Đồ thị của hàm số lẻ nhận nhận **gốc tọa độ** làm **tâm đối xứng**.

» Đồ thị của hàm số chẵn nhận nhận **trục Oy** làm **trục đối xứng**.





➤ Dạng 3. Tính tuần hoàn



Phương pháp

► **Tính tuần hoàn** hàm số lượng giác cơ bản:

- (1) Hàm số $y = \sin x$ và $y = \cos x$ là các hàm số tuần hoàn với chu kì 2π .
- (2) Hàm số $y = \tan x$ và $y = \cot x$ là các hàm số tuần hoàn với chu kì π .

► Các kết quả có thể áp dụng:

- (1) Hàm số $y = A \cdot \sin(ax + b)$ ($A \cdot a \neq 0$) là một hàm số tuần hoàn với chu kì $T = \frac{2\pi}{|a|}$
- (2) Hàm số $y = A \cdot \cos(ax + b)$ ($A \cdot a \neq 0$) là một hàm số tuần hoàn với chu kì $T = \frac{2\pi}{|a|}$
- (3) Hàm số $y = A \cdot \tan(ax + b)$ ($A \cdot a \neq 0$) là một hàm số tuần hoàn với chu kì $T = \frac{\pi}{|a|}$
- (4) Hàm số $y = A \cdot \cot(ax + b)$ ($A \cdot a \neq 0$) là một hàm số tuần hoàn với chu kì $T = \frac{\pi}{|a|}$
- (5) Nếu hàm số $y = f(x)$ chỉ chứa các hàm số lượng giác có chu kì lần lượt là T_1, T_2, \dots, T_n thì hàm số f có chu kì T là bội chung nhỏ nhất của T_1, T_2, \dots, T_n .
- (6) Nếu hàm số $y = f(x)$ tuần hoàn với chu kì T thì hàm số $y = f(x) + c$ (c là hằng số) cũng là hàm số tuần hoàn với chu kì T .

Chú ý

Một số dấu hiệu nhận biết hàm số $y = f(x)$ không phải là hàm tuần hoàn

Hàm số $y = f(x)$ không phải là hàm tuần hoàn khi **một** trong các điều kiện sau bị vi phạm:

- (1) Tập xác định của hàm số là tập hữu hạn.
- (2) Tồn tại số a sao cho hàm số không xác định với $x > a$ hoặc $x < a$.
- (3) Phương trình $f(x) = k$ có nghiệm nhưng số nghiệm hữu hạn.
- (4) Phương trình $f(x) = k$ có vô số nghiệm sắp thứ tự:

$$\dots < x_n < x_{n+1} < \dots \text{ mà } |x_n - x_{n+1}| \rightarrow 0 \text{ hay } \infty.$$



Ví dụ 3.1.

Tìm chu kì (nếu có) của các hàm số sau:

- | | |
|---|------------------------------------|
| (1) $y = 1 - \sin 5x$ | (2) $y = \cos^2 x - 1$ |
| (3) $y = \sin\left(\frac{2}{5}x\right) \cdot \cos\left(\frac{2}{5}x\right)$ | (4) $y = \cos x + \cos(\sqrt{3}x)$ |

➤ **Lời giải**



Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm

» Câu 1. Tập xác định của hàm số $y = \tan 2x$ là

- A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.
 B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.
 C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.
 D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

» Câu 2. Tập xác định của hàm số $y = \sin x$ là

- A. $[-1; 1]$.
 B. $(-1; 1)$.
 C. $(0; +\infty)$.
 D. \mathbb{R} .

» Câu 3. Tập xác định của hàm số $y = \frac{1}{\sin x}$ là

- A. $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
 B. $D = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
 C. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
 D. $D = \mathbb{R} \setminus \{0; \pi\}$.

» Câu 4. Tập xác định của hàm số $y = \frac{1}{\sin 2x + 1}$ là

- A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
 B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
 C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
 D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

» Câu 5. Hàm số $y = \frac{\cos 2x}{1 + \tan x}$ không xác định trong khoảng nào trong các khoảng sau đây?

- A. $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{4} + k2\pi \right), k \in \mathbb{Z}$.
 B. $\left(\frac{3\pi}{4} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi \right)$.
 C. $\left(\pi + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi \right), k \in \mathbb{Z}$.
 D. $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi \right), k \in \mathbb{Z}$.

» Câu 6. Tập xác định của hàm số $y = \cot 2x - \tan x$ là:

- A. $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
 B. $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
 C. $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
 D. $\mathbb{R} \setminus \left\{ k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

» Câu 7. Chọn phát biểu đúng:

- A. Các hàm số $y = \sin x, y = \cos x, y = \cot x$ đều là hàm số chẵn.
 B. Các hàm số $y = \sin x, y = \cos x, y = \cot x$ đều là hàm số lẻ.
 C. Các hàm số $y = \sin x, y = \cot x, y = \tan x$ đều là hàm số chẵn.
 D. Các hàm số $y = \sin x, y = \cot x, y = \tan x$ đều là hàm số lẻ.

» Câu 8. Trong các hàm số sau đây, hàm số nào có đồ thị đối xứng qua trục tung?

- A. $y = \tan x$.
 B. $y = \cos x$.
 C. $y = \sin x$.
 D. $y = \cot x$.

» Câu 9. Trong các hàm số sau, hàm số nào tuần hoàn với chu kỳ 2π ?



A. $y = \sin x$. B. $y = \tan x$. C. $y = \cot x$. D. $y = \cos 2x$.

» Câu 10. Chu kì tuần hoàn của hàm số $\tan x + \sin^2 x$ là

A. $k2\pi$. B. 2π . C. π . D. 4π .

» Câu 11. Hàm số nào sau đây là hàm số lẻ?

A. $y = 2x + \cos x$. B. $y = \cos 3x$. C. $y = x^2 \sin(x+3)$. D. $y = \frac{\cos x}{x^3}$.

» Câu 12. Trong các hàm số sau, hàm số nào có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ?

A. $y = \cot 4x$. B. $y = \frac{\sin x + 1}{\cos x}$. C. $y = \tan^2 x$. D. $y = |\cot x|$.

» Câu 13. Cho hai hàm số $f(x) = \frac{\cos 2x}{1 + \sin^2 3x}$ và $g(x) = \frac{|\sin 2x| - \cos 3x}{2 + \tan^2 x}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $f(x)$ lẻ và $g(x)$ chẵn. B. $f(x)$ và $g(x)$ chẵn.
C. $f(x)$ chẵn, $g(x)$ lẻ. D. $f(x)$ và $g(x)$ lẻ.

» Câu 14. Trong các hàm số sau, hàm số nào có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ?

A. $y = \frac{1}{\sin^3 x}$. B. $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. C. $y = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$. D. $y = \sqrt{\sin 2x}$.

» Câu 15. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 3\sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) - 1$ lần lượt là:

A. 4; -2. B. 2; -4. C. 1; -1. D. 3; -3.

» Câu 16. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 6\cos 2x - 7$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{6}\right]$. Tính $M + m$.

A. -14. B. 3. C. -11. D. -10.

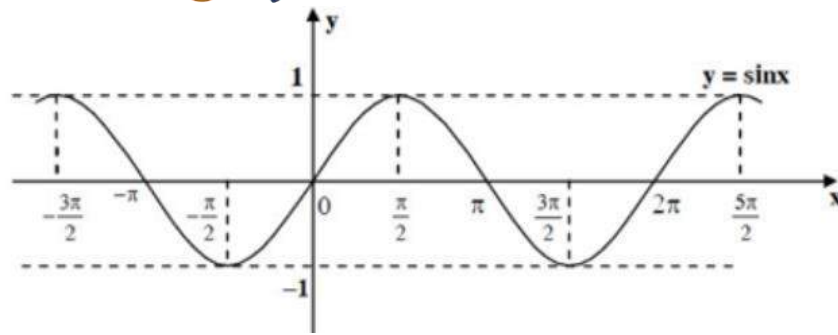
» Câu 17. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2\sin^2 x + 3\sin 2x - 4\cos^2 x$.

A. $\min y = -3\sqrt{2} - 1$; $\max y = 3\sqrt{2} + 1$. B. $\min y = -3\sqrt{2} - 2$; $\max y = 3\sqrt{2} - 1$.
C. $\min y = -3\sqrt{2}$; $\max y = 3\sqrt{2} - 1$. D. $\min y = -3\sqrt{2} - 1$; $\max y = 3\sqrt{2} - 1$.

» Câu 18. Xét sự biến thiên của hàm số $y = \tan 2x$ trên một chu kì tuần hoàn. Trong các kết luận sau, kết luận nào đúng?

A. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$ và $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$.
B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$ và nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$.
C. Hàm số đã cho luôn đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.
D. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$ và đồng biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$.

» Câu 19. Cho đồ thị hàm số lượng giác $y = \sin x$ như hình vẽ dưới đây:



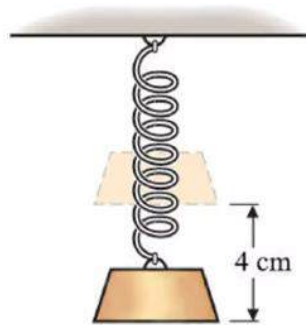
Hàm số $y = |\sin x|$ có bao nhiêu lần đạt giá trị bằng 1 trong đoạn $\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$?

- A. 5 B. 1 C. 3 D. 7

» **Câu 20.** Huyết áp là áp lực máu cần thiết tác động lên thành động mạch nhằm đưa máu đi nuôi dưỡng các mô trong cơ thể. Nhờ lực co bóp của tim và sức cản của động mạch mà huyết áp được tạo ra. Huyết áp tối đa và huyết áp tối thiểu tương ứng được gọi là huyết áp tâm thu và huyết áp tâm trương. Chỉ số huyết áp của chúng ta được tính bằng huyết áp tâm thu/huyết áp tâm trương. Giả sử huyết áp của người đó thay đổi theo thời gian được cho bởi công thức: $p(t) = 115 + 25\sin(160\pi t)$ trong đó $p(t)$ là huyết áp tính theo đơn vị mmHg (milimet thủy ngân) và thời gian t tính theo đơn vị phút. Khi đó, chỉ số huyết áp bằng

- A. $\frac{115}{90}$ B. $\frac{150}{60}$ C. $\frac{120}{80}$ D. $\frac{140}{90}$

» **Câu 21.** Một con lắc lò xo sau khi được kéo xuống dưới vị trí cân bằng 4 cm và thả ra thì nó dao động điều hòa với phương trình: $y = -4\cos 8t$ (cm) (tham khảo hình vẽ).



Biên độ A cm và chu kỳ T của dao động là

- A. $A = 4\text{ cm}; T = \frac{\pi}{4}$ B. $A = 4\text{ cm}; T = \frac{\pi}{2}$ C. $A = 8\text{ cm}; T = \frac{\pi}{4}$ D. $A = 4\text{ cm}; T = 2\pi$

» **Câu 22.** Hằng ngày mực nước của con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu h (mét) của mực nước trong kênh được tính tại thời điểm t (giờ) trong một ngày bởi công thức

$$h = 3 \cos\left(\frac{\pi t}{7=8} + \frac{\pi}{4}\right) + 12. \text{ Mực nước của kênh cao nhất khi:}$$

- A. $t = 13$ (giờ). B. $t = 14$ (giờ). C. $t = 15$ (giờ). D. $t = 16$ (giờ).

» **Câu 23.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10; 10]$ để hàm số

$$y = \sqrt{\sin^2 x - 2\sin x + m - 1} \text{ xác định trên } \mathbb{R}.$$

- A. 8. B. 9. C. 12. D. 13.



- » **Câu 24.** Số giờ có ánh sáng của một thành phố A trong ngày thứ t của năm 2021 được cho bởi một hàm số $y = 4 \sin \left| \frac{\pi}{178}(t - 60) \right| + 10$, với $t \in \mathbb{Z}$ và $0 < t \leq 365$. Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có nhiều giờ ánh sáng mặt trời nhất?
A. 28 tháng 5. **B.** 29 tháng 5. **C.** 30 tháng 5. **D.** 31 tháng 5.

B. Câu hỏi – Trả lời Đúng/sai

- » **Câu 25.** Cho hàm số $y = 3 - \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right)$, khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Hàm số có tập xác định $D = \mathbb{R}$		
(b)	Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng 2		
(c)	Giá trị lớn nhất của hàm số bằng 4		
(d)	Tập giá trị của hàm số là $T = [2; 4]$		

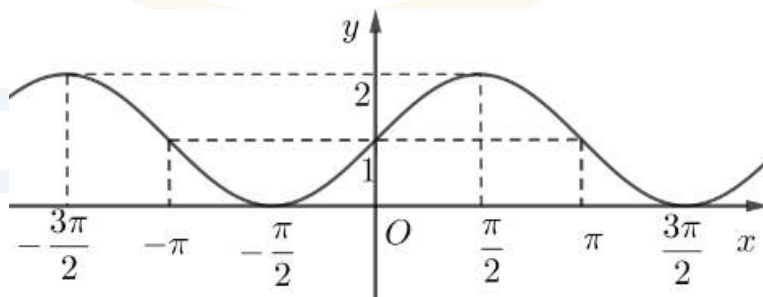
- » **Câu 26.** Cho hàm số $f(x) = \tan 2x - 1$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Giá trị của hàm số tại $x = \frac{\pi}{8}$ bằng 0		
(b)	Giá trị của hàm số tại $x = \frac{\pi}{3}$ bằng $-\sqrt{3} - 1$		
(c)	Có ba giá trị x thuộc $[0; \pi]$ khi hàm số đạt giá trị bằng -2 .		
(d)	Hàm số đã cho là hàm tuần hoàn.		

- » **Câu 27.** Cho hàm số $f(x) = |x| \sin x$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Tập xác định của hàm số: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.		
(b)	$f(-\pi) = -f(\pi)$.		
(c)	Đồ thị hàm số đã cho đối xứng qua gốc tọa độ $O(0; 0)$.		
(d)	$f(-x) = -f(x)$.		

- » **Câu 28.** Hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như sau



	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Hàm số có tập xác định $D = \left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right]$.		
(b)	Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\pi; 0)$.		



(c)	Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$.		
(d)	Tập giá trị của hàm số là $[0; 2]$.		

» Câu 29. Cho hàm số $f(x) = |\tan x| + |x^3 - 3x|$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Tập xác định của hàm số: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.		
(b)	Hàm số đã cho là hàm số chẵn.		
(c)	$f(-\pi) = -f(\pi)$		
(d)	Đồ thị hàm số đã cho đối xứng qua gốc tọa độ $O(0; 0)$		

» Câu 30. Cho hàm số $f(x) = 2\cos x + 1$ và $g(x) = \sin x + \tan x$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Tập xác định hàm số $f(x): D = \mathbb{R}$.		
(b)	Hàm số $f(x)$ là hàm tuần hoàn.		
(c)	Tập xác định hàm số $g(x): D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{3} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.		
(d)	Hàm số $g(x)$ là hàm không tuần hoàn.		

» Câu 31. Cho hàm số $f(x) = \tan x$ và $g(x) = \cot^2 x - \frac{\sin 2x}{2}$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Tập xác định hàm số $f(x): D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.		
(b)	Hàm số $f(x)$ là hàm không tuần hoàn.		
(c)	Tập xác định hàm số $g(x): D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.		
(d)	Hàm số $g(x)$ là hàm tuần hoàn.		

» Câu 32. Cho hàm số $f(x) = 2 + 3\cos x$ và $g(x) = \sin x + \cos x$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ bằng 5		
(b)	Hàm số $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $x = \pi + k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)		
(c)	Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)$ bằng $-\sqrt{2}$		
(d)	Hàm số $g(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $x = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)		

» Câu 33. Cho các hàm số sau: $f(x) = \sqrt{5 - 3\sin^2 x}$; $g(x) = \tan x - x \cos x$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Tập xác định hàm số $f(x)$ là: $D = \mathbb{R}$.		
(b)	Hàm số $f(x)$ đã cho là hàm số lẻ.		



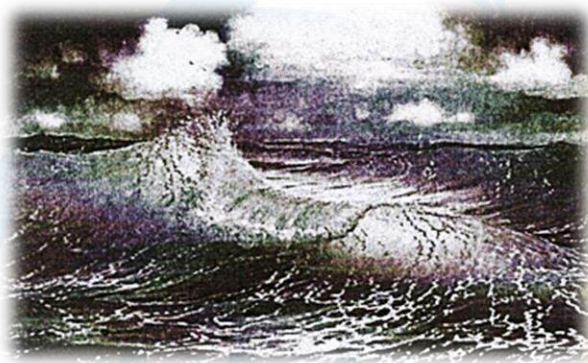
(c) Tập xác định hàm số $g(x)$ là: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

(d) Hàm số $g(x)$ đã cho là hàm số lẻ.

» Câu 34. Hằng ngày mực nước của con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu h (mét) của mực nước trong kênh tính theo thời gian t (giờ) được cho bởi công thức $h(t) = 3 \cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{4}\right) + 14$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Công thức tuần hoàn với chu kì $T = 2\pi$.		
(b)	Chiều sâu của mực nước thấp nhất là 11m.		
(c)	Chiều sâu của mực nước cao nhất là 14m.		
(d)	Thời gian để mực nước cao nhất là $t = 9$.		

» Câu 35. Chiều cao so với mực nước biển trung bình tại thời điểm t (giây) của mỗi con sóng được cho bởi hàm số $h(t) = 75 \sin\left(\frac{\pi t}{8}\right)$, trong đó $h(t)$ được tính bằng centimét.



(Tất cả kết quả được làm tròn đến hàng phần mười)

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Chiều cao của sóng tại các thời điểm 5 giây bằng 69,3 (cm)		
(b)	Chiều cao của sóng tại các thời điểm 20 giây bằng 75 (cm)		
(c)	Trong 30 giây đầu tiên (kể từ mốc $t = 0$ giây), thời điểm để sóng đạt chiều cao lớn nhất 6 giây		
(d)	Trong 30 giây đầu tiên (kể từ mốc $t = 0$ giây), thời điểm để sóng đạt chiều cao lớn nhất 18 giây		

C. Câu hỏi – Trả lời ngắn

» Câu 36. Tập giá trị của hàm số: $y = 5 + 4 \sin 2x \cos 2x$ có dạng $[a; b]$ với $a; b$ là các số nguyên.

Tính giá trị $S = a^2 - 2ab$

Điền đáp số:

» Câu 37. Tập giá trị của hàm số: $y = \sin^6 x + \cos^6 x$ có dạng $\left[\frac{a}{b}; 1\right]$ với $a; b$ là các số nguyên, $\frac{a}{b}$ là

phân số tối giản. Tính giá trị $S = a + ab^2$

Điền đáp số:



» **Câu 38.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m trong đoạn $[0;10]$ để hàm số

$$y = \sqrt{m - 2 \sin x} \text{ xác định trên } \mathbb{R}.$$

» **Điền đáp số:**

» **Câu 39.** Số giờ có ánh sáng của thành phố T ở vĩ độ 40° bắc trong ngày thứ t của một năm không nhận được cho bởi hàm số $d(t) = 3 \cdot \sin\left[\frac{\pi}{182}(t - 80)\right] + 12$ với $t \in \mathbb{Z}$ và $0 < t \leq 365$.

Bạn An muốn đi tham quan thành phố T nhưng lại không thích ánh sáng mặt trời, vậy bạn An nên chọn đi vào ngày nào trong năm để thành phố T có ít giờ có ánh sáng mặt trời nhất?

» **Điền đáp số:**

» **Câu 40.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m trong đoạn $[-10;10]$ để hàm số

$$y = \frac{\sin x - 1}{\cos x + m} \text{ có tập xác định } \mathbb{R}.$$

» **Điền đáp số:**

» **Câu 41.** Tính tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số: $y = 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 1$.

» **Điền đáp số:**

» **Câu 42.** Tính tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số: $y = \sqrt{1 + \sin x} - 3$. Kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ 2.

» **Điền đáp số:**

» **Câu 43.** Hàm số $y = 1 - 3\sqrt{1 - \cos^2 x}$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm $x = \frac{a}{b}\pi + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, với $a; b$ là các số nguyên, $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị $S = a + ab^2$

» **Điền đáp số:**

» **Câu 44.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \sqrt{\frac{m-1}{m}} - 2 \cos 4x$ xác định trên \mathbb{R} .

» **Điền đáp số:**

» **Câu 45.** Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-2024; 2024]$ để hàm số

$$y = \sqrt{\sin^2 x - 2 \sin x + 1 - m} \text{ xác định trên } \mathbb{R}?$$

» **Điền đáp số:**

» **Câu 46.** Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin x + \sqrt{3} \cos x + 3$. Tính $M + m$.

» **Điền đáp số:**



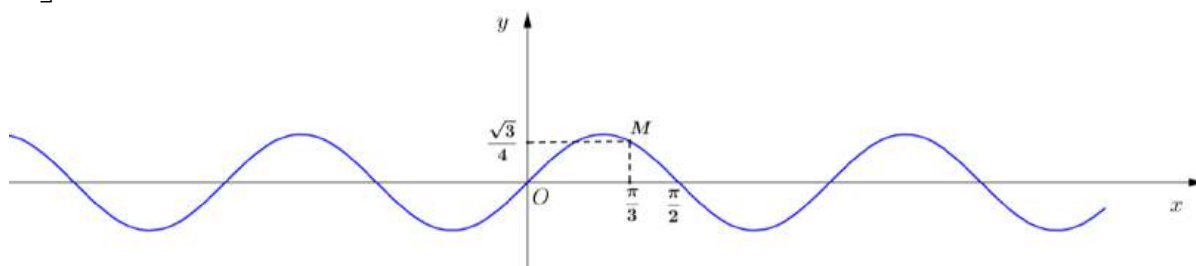
» **Câu 47.** Trong các hàm số $y = \sin 2x$, $y = \tan|x|$, $y = \tan x + \cot x$, $y = 2 \sin x + 3$ có bao nhiêu hàm số lẻ?

✎ **Điền đáp số:**

» **Câu 48.** Tìm chu kì tuần hoàn của hàm số $f(x) = \tan 2x$ (kết quả được làm tròn đến hàng phần trăm).

✎ **Điền đáp số:**

» **Câu 49.** Cho hàm số $y = k \sin(tx)$ với $k, t \in \mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số có tập giá trị là $[a, b]$. Tính $T = 2a + 6b$.



✎ **Điền đáp số:**

» **Câu 50.** Số giờ có ánh sáng của một thành phố A trong ngày thứ t của năm 2024 được cho bởi một hàm số $y = 4 \sin\left[\frac{\pi}{178}(t - 60)\right] + 10$, với $t \in \mathbb{Z}$ và $0 < t \leq 365$. Vào ngày nào trong tháng 5 năm 2024 thì thành phố A có số giờ ánh sáng mặt trời chiếu nhiều nhất?

✎ **Điền đáp số:**

----- Hết -----

TOÁN TỪ TÂM



Chương 01

Bài 5.

PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

A

Lý thuyết

1. Khái niệm phương trình tương đương



Định nghĩa:

- Hai phương trình được gọi là tương đương khi chúng có cùng tập nghiệm.
- Nếu phương trình $f(x)=0$ tương đương với phương trình $g(x)=0$ thì ta viết:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow g(x)=0$$

Chú ý

- » Để giải phương trình, ta biến đổi phương trình đó thành một phương trình tương đương đơn giản hơn. Các phép biến đổi như vậy được gọi là các phép biến đổi tương đương.
- » Ta có một số phép biến đổi tương đương thường sử dụng sau:
 - (1) **Cộng** hoặc **trừ** hai vế của phương trình với cùng 1 số hoặc cùng 1 biểu thức mà không làm thay đổi điều kiện của phương trình.
 - (2) **Nhân** hoặc **chia** hai vế của phương trình với cùng 1 số khác 0 hoặc cùng 1 biểu thức luôn có giá trị khác 0 mà không làm thay đổi điều kiện của phương trình.
- » Để chỉ sự tương đương của các phương trình, người ta dùng kí hiệu " \Leftrightarrow "

2. Phương trình $\sin x = a$



Xét phương trình $\sin x = a$ (1)

- Nếu $|a| > 1$ thì phương trình (1) vô nghiệm.
- Nếu $|a| \leq 1$ thì phương trình (1) có nghiệm
$$\begin{cases} x = \arcsin a + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin a + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$



Chú ý

» $\sin u = \sin v \Leftrightarrow \begin{cases} u = v + k2\pi \\ u = \pi - v + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

» Trường hợp đặc biệt:

(1) $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

(2) $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

(3) $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

» Phương trình $\sin x = \sin \beta^\circ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \beta^\circ + k.360^\circ \\ x = 180^\circ - \beta^\circ + k.360^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

3. Phương trình $\cos x = a$



Xét phương trình $\cos x = a$ (1)

• Nếu $|a| > 1$ thì phương trình (1) vô nghiệm.

• Nếu $|a| \leq 1$ thì phương trình (1) có nghiệm $\begin{cases} x = \arccos a + k2\pi \\ x = -\arccos a + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$.

Chú ý

» $\cos u = \cos v \Leftrightarrow \begin{cases} u = v + k2\pi \\ u = -v + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

» Trường hợp đặc biệt:

(1) $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

(2) $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

(3) $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

» Phương trình $\cos x = \cos \beta^\circ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \beta^\circ + k.360^\circ \\ x = -\beta^\circ + k.360^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

4. Phương trình $\tan x = a$ & $\cot x = a$



Phương trình	$\tan x = a$	$\cot x = a$
Điều kiện	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$	$x \neq k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$
Nghiệm	$x = \arctan(a) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$	$x = \text{arccot}(a) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$



Chú ý

$$\gg \tan u = \tan v \Leftrightarrow \begin{cases} u \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ (hay } v \neq \frac{\pi}{2} + k\pi) \\ u = v + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\gg \cot u = \cot v \Leftrightarrow \begin{cases} u \neq k\pi \text{ (hay } v \neq k\pi) \\ u = v + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

» Trường hợp đặc biệt:

$$(1) \tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$(4) \cot x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$(2) \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$(5) \cot x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$(3) \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$(6) \cot x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

» Phương trình $\tan x = \tan \beta^\circ \Leftrightarrow x = \beta^\circ + k.180^\circ, k \in \mathbb{Z}$

» Phương trình $\cot x = \cot \beta^\circ \Leftrightarrow x = \beta^\circ + k.180^\circ, k \in \mathbb{Z}$

TOÁN TỪ TÂM



B

Các dạng bài tập

Dạng 1. Phương trình $\sin x = a$



Phương pháp

Xét phương trình $\sin x = a$ (1)

» Nếu $|a| > 1$ thì phương trình (1) vô nghiệm.

» Nếu $|a| \leq 1$ thì phương trình (1) có nghiệm $\begin{cases} x = \arcsin a + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin a + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$.

Chú ý:

» $\sin u = \sin v \Leftrightarrow \begin{cases} u = v + k2\pi \\ u = \pi - v + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

» Trường hợp đặc biệt:

(1) $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

(2) $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

(3) $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

» Phương trình $\sin x = \sin \beta^\circ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \beta^\circ + k.360^\circ \\ x = 180^\circ - \beta^\circ + k.360^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$



Ví dụ 1.1.

Giải các phương trình sau

(1) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $\sin(x - 60^\circ)$

(3) $\sin 3x = -\frac{4}{3}$

(4) $\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

(5) $2 \sin(3x + 1) = 1$

(6) $\sin\left[\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right] = 0$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



➤ **Dạng 3. Phương trình $\tan x = a$ và $\cot x = a$**



Phương pháp

Xét phương trình $\cos x = a$ (1)

Phương trình	$\tan x = a$	$\cot x = a$
Điều kiện	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$	$x \neq k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$
Nghiệm	$x = \arctan(a) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$	$x = \operatorname{arccot}(a) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Chú ý:

» $\tan u = \tan v \Leftrightarrow \begin{cases} u \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ (hay } v \neq \frac{\pi}{2} + k\pi), k \in \mathbb{Z} \\ u = v + k\pi \end{cases}$

» $\cot u = \cot v \Leftrightarrow \begin{cases} u \neq k\pi \text{ (hay } v \neq k\pi), k \in \mathbb{Z} \\ u = v + k\pi \end{cases}$

» Trường hợp đặc biệt:

(1) $\tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

(4) $\cot x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

(2) $\tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

(5) $\tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

(3) $\tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

(6) $\cot x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

» Phương trình $\cot x = \cot \beta^\circ \Leftrightarrow x = \beta^\circ + k \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z}$

» Phương trình $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$



Ví dụ 3.1.

Giải các phương trình sau

(1) $\tan 2x = \tan \frac{2\pi}{7}$

(2) $\tan \frac{x}{2} = \sqrt{3}$

(3) $\tan(3x - 30^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

(4) $\cot\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$

(5) $\left(\cot \frac{x}{2} - 1\right)\left(\cot \frac{x}{2} + 1\right) = 0$

(6) $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2 \tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 1$

➤ **Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Handwriting practice area consisting of multiple horizontal dotted lines for writing.





➤ Dạng 4. Phương trình có nghiệm thuộc khoảng - đoạn



Phương pháp

Phương pháp tìm nghiệm trong khoảng, đoạn $(a;b)$ hoặc $[a;b]$ hoặc $[a;b)$ hoặc $(a;b]$:

- » **Bước 1:** Giải phương trình (đưa về phương trình cơ bản).
- » **Bước 2:** Ứng với mỗi nghiệm thuộc khoảng đoạn, tìm điều kiện của các số nguyên k thỏa mãn.

Ví dụ: Ở bước 1 ta tìm được họ nghiệm
$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{3\pi}{2} + k\pi \end{cases}$$

$$\text{Với } x = -\frac{\pi}{4} + k\pi : a < -\frac{\pi}{4} + k\pi < b \longrightarrow k = ?$$

$$\text{Với } x = \frac{3\pi}{2} + k\pi : a < \frac{3\pi}{2} + k\pi < b \longrightarrow k = ?$$

- » **Bước 3:** Kết luận nghiệm.



Ví dụ 4.1.

Giải phương trình lượng giác $\cos x = 0$ trên khoảng $(0; 2\pi)$.

✎ *Lời giải*

.....
.....
.....
.....
.....



Ví dụ 4.2.

Tìm nghiệm của phương trình $2 \sin(x + 40^\circ) = \sqrt{3}$ trên khoảng $(-180^\circ; 180^\circ)$.

✎ *Lời giải*

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....



Ví dụ 4.3.

Giải phương trình lượng giác $\tan x = -1$ trên khoảng $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 4.4.

Giải phương trình lượng giác $\cot\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$ trên khoảng $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 4.5.

Tìm nghiệm của phương trình $\frac{\sin 3x}{\cos x + 1} = 0$ trên đoạn $[2\pi; 4\pi]$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

TOÁN TỪ TÂM



➤ Dạng 5. Bài toán thực tế liên quan phương trình lượng giác



Phương pháp

- » **Bước 1:** Đọc và hiểu nội dung bài toán thực tế đã cho.
- » **Bước 2:** Phân tích bài toán để nhận diện bài toán thuộc nội dung kiến thức liên quan đến hàm số lượng giác, phương trình lượng giác nào.
- » **Bước 3:** Dùng kiến thức đã học, giải bài toán và kết luận nghiệm.



Ví dụ 5.1.

Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố A trong ngày thứ t của năm 2017 được cho bởi một hàm số $y = 4 \sin \left[\frac{\pi}{178} (t - 60) \right] + 10$ với $t \in \mathbb{Z}$ và $0 < t \leq 365$. Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có nhiều giờ có ánh sáng mặt trời nhất?

🔗 Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 5.2.

Chiều cao $h(m)$ của một cabin trên vòng quay vào thời điểm t giây sau khi bắt đầu chuyển động được cho bởi công thức $h(t) = 30 + 20 \sin \left(\frac{\pi}{25} t + \frac{\pi}{3} \right)$. Sau 2 phút kể từ khi bắt đầu chuyển động, Cabin đạt độ cao tối đa bao nhiêu lần?

🔗 Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

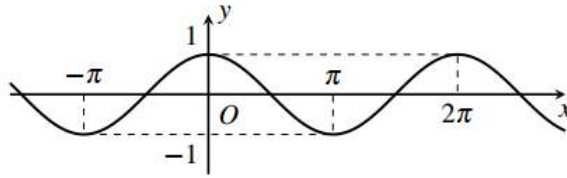
.....



Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm

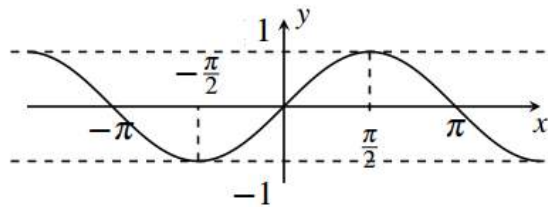
» **Câu 1.** Cho hàm số $y = \cos x$ có đồ thị như hình vẽ.



Nghiệm của phương trình $\cos x = -1$ trong khoảng $(0; 2\pi)$ là:

- A. $x = 0$. B. $x = \pi$. C. $x = 2\pi$. D. $x = \frac{\pi}{2}$.

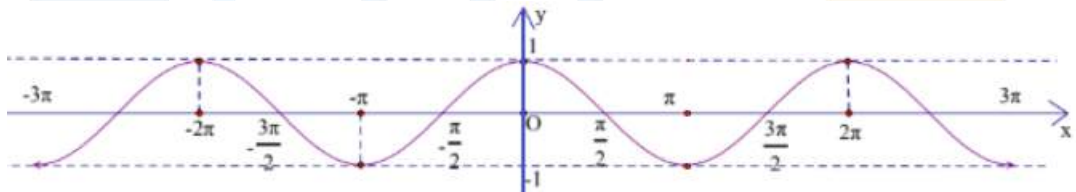
» **Câu 2.** Cho hàm số $y = \sin x$ có đồ thị như hình vẽ.



Nghiệm của phương trình $\sin x = 1$ trong khoảng $(0; \pi)$ là:

- A. $x = 0$. B. $x = \pi$. C. $x = -\frac{\pi}{2}$. D. $x = \frac{\pi}{2}$.

» **Câu 3.** Cho hàm số $y = \cos x$ có đồ thị như hình vẽ.



Tập nghiệm của phương trình $\cos x = 1$ là?

- A. $x = k\pi (k \in \mathbb{Z})$. B. $x = \pi + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.
C. $x = k2\pi (k \in \mathbb{Z})$. D. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

» **Câu 4.** Phương trình $\cos x = 0$ có nghiệm là:

- A. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$. B. $x = k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.
C. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$. D. $x = k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

» **Câu 5.** Phương trình $2.\sin x - 1 = 0$ có tập nghiệm là

- A. $S = \left\{ \frac{\pi}{6} + k2\pi; \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$. B. $S = \left\{ \frac{\pi}{3} + k2\pi; -\frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
C. $S = \left\{ \frac{\pi}{6} + k2\pi; -\frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$. D. $S = \left\{ \frac{1}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.



» **Câu 6.** Phương trình $\cos x = \cos \frac{\pi}{3}$ có tất cả các nghiệm là:

A. $x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$

B. $x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$

C. $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$

D. $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$

» **Câu 7.** Tất cả các nghiệm của phương trình $\sin x = \sin \frac{\pi}{3}$ là

A. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

B. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

C. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$

D. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

» **Câu 8.** Nghiệm của phương trình $\cos x = \frac{1}{2}$ là

A. $x = \pm \frac{\pi}{2} + k2\pi.$

B. $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi.$

C. $x = \pm \frac{\pi}{4} + k2\pi.$

D. $x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi.$

» **Câu 9.** Phương trình $\cos 2\pi x = \frac{2025}{2024}$ có bao nhiêu nghiệm trong $(-\pi; \pi)$

A. 1.

B. 0.

C. 2.

D. 5.

» **Câu 10.** Nghiệm của phương trình $2\cos(x - 15^\circ) - 1 = 0$ là

A. $\begin{cases} x = 75^\circ + k360^\circ \\ x = 135^\circ + k360^\circ \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

B. $\begin{cases} x = 60^\circ + k360^\circ \\ x = -60^\circ + k360^\circ \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

C. $\begin{cases} x = 45^\circ + k360^\circ \\ x = -45^\circ + k360^\circ \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

D. $\begin{cases} x = 75^\circ + k360^\circ \\ x = -45^\circ + k360^\circ \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

» **Câu 11.** Giải phương trình $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

A. $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$

B. $x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$

C. $x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$

D. $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$

» **Câu 12.** Nghiệm của phương trình $\cos x = \cos \frac{\pi}{12}$ là

A. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k2\pi \\ x = \frac{11\pi}{12} + l2\pi \end{cases} (k, l \in \mathbb{Z}).$

B. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{12} + l2\pi \end{cases} (k, l \in \mathbb{Z}).$

C. $x = \frac{\pi}{12} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$

D. $x = \frac{11\pi}{12} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$



» **Câu 13.** Phương trình $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$ có nghiệm là

- A. $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. B. $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. C. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. D. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

» **Câu 14.** Giải phương trình $\cos x = 1$.

- A. $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. B. $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
C. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. D. $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

» **Câu 15.** Phương trình $2 \sin x - \sqrt{3} = 0$ có tập nghiệm là:

- A. $\left\{ \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$. B. $\left\{ \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
C. $\left\{ \frac{\pi}{6} + k2\pi, \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$. D. $\left\{ \frac{\pi}{3} + k2\pi, \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

» **Câu 16.** Tổng các nghiệm của phương trình $2 \sin(x + 40^\circ) = \sqrt{3}$ trên khoảng $(-180^\circ; 180^\circ)$ là

- A. 20° . B. 100° . C. 80° . D. 120° .

» **Câu 17.** Tìm tổng các nghiệm của phương trình $\cos\left(5x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ trên $[0; \pi]$.

- A. $\frac{47\pi}{18}$. B. $\frac{4\pi}{18}$. C. $\frac{45\pi}{18}$. D. $\frac{7\pi}{18}$.

» **Câu 18.** Số nghiệm phương trình $\frac{\sin 3x}{\cos x + 1} = 0$ thuộc đoạn $[2\pi; 4\pi]$ là

- A. 7. B. 6. C. 4. D. 5.

» **Câu 19.** Với những giá trị nào của x thì giá trị của các hàm số $y = \sin 3x$ và $y = \sin x$ bằng nhau?

- A. $\begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$. B. $x = k\frac{\pi}{4} (k \in \mathbb{Z})$.
C. $x = k\frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$. D. $\begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$.

» **Câu 20.** Số nghiệm của phương trình $\sin x = 0$ trên đoạn $[0; \pi]$ là

- A. 1. B. 2. C. 0. D. 5.

» **Câu 21.** Nghiệm của phương trình $\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + 1 = 0$ là

- A. $x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. B. $x = \frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
C. $x = -\frac{7\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. D. $x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

» **Câu 22.** Tập nghiệm của phương trình $\cos 3x + \sin \frac{2\pi}{3} = 0$ là

- A. $\left\{ \pm \frac{5\pi}{16} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}$. B. $\left\{ \pm \frac{2\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.



C. $\left\{ \pm \frac{5\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

D. $\left\{ \pm \frac{5\pi}{12} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

» Câu 23. Trong các phương trình sau, phương trình nào có nghiệm?

A. $\cos x = 3$.

B. $\sin 2x = -2$.

C. $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -1$.

D. $\cos(2x - 1) = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

» Câu 24. Phương trình nào sau đây có nghiệm?

A. $\sin 2021x - 2 = 0$.

B. $\cos(2x + 2021) = 3$.

C. $\sin^2 x + 1 = 0$.

D. $\cos(2x + 2021) = -1$.

» Câu 25. Phương trình $2\sin x + \sqrt{3} = 0$ có tổng nghiệm dương nhỏ nhất và nghiệm âm lớn nhất bằng

A. $\frac{4\pi}{3}$.

B. 2π .

C. $\frac{\pi}{3}$.

D. π .

» Câu 26. Nghiệm của phương trình $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$ là

A. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi \\ x = -\frac{7\pi}{12} + 2k\pi \end{cases}$.

B. $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = -\frac{7\pi}{12} + k\pi \end{cases}$.

C. $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi \\ x = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi \end{cases}$.

D. $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{7\pi}{12} + k\pi \end{cases}$.

» Câu 27. Tập nghiệm của phương trình $\sin^2 x - 2\sin x + 1 = 0$ là?

A. $x = -\frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

D. $x = -\frac{3\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

» Câu 28. Cho phương trình $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Số nghiệm của phương trình trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ là?

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 1.

» Câu 29. Phương trình $3\cos^2 x + 7\cos x - 10 = 0$ có nghiệm là?

A. $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

D. $x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

» Câu 30. Phương trình $\cos(2x + 30^\circ) + \sin x = 0$ có nghiệm là

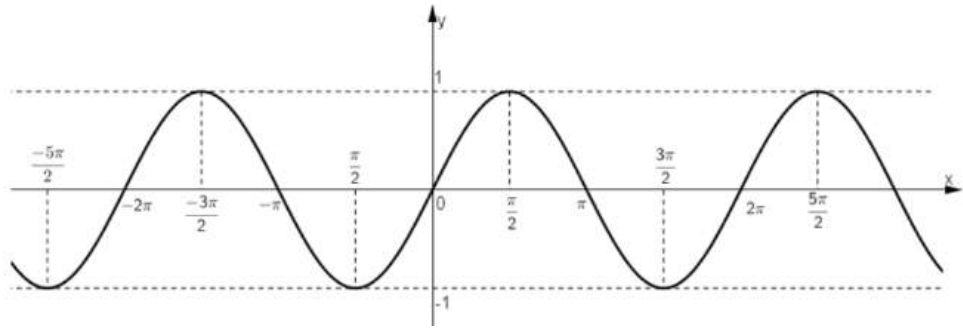
A. $\begin{cases} x = 60^\circ + k180^\circ \\ x = 40^\circ + k120^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$.

B. $\begin{cases} x = 60^\circ + k360^\circ \\ x = -40^\circ + k120^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$.

C. $\begin{cases} x = 30^\circ + k360^\circ \\ x = 15^\circ + k180^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$.

D. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$.

» Câu 31. Cho hàm số $y = \sin x$ có đồ thị như hình vẽ.



Hãy tìm tập tất cả các giá trị của m để phương trình $|\sin x| = m$ có nghiệm?

- A.** $-1 \leq m \leq 1$. **B.** $-1 \leq m \leq 0$. **C.** $-1 < m < 0$. **D.** $0 \leq m \leq 1$.

» **Câu 32.** Tìm tất cả các nghiệm của phương trình

$$\sin x \cdot \sin \frac{\pi}{3} + \cos 2x \cdot \sin \frac{\pi}{4} = \cos x \cdot \cos \frac{\pi}{3} + \sin 2x \cdot \cos \frac{\pi}{4}.$$

A.
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k2\pi \\ x = -\frac{7\pi}{36} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

B.
$$\begin{cases} x = -\frac{7\pi}{12} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{36} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

C.
$$\begin{cases} x = \frac{5\pi}{12} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

D.
$$\begin{cases} x = \frac{7\pi}{12} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{36} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

» **Câu 33.** Phương trình $\sin 5x - \sin x = 0$ có bao nhiêu nghiệm thuộc đoạn $[-2018\pi; 2018\pi]$?

- A.** 20179. **B.** 20181. **C.** 16144. **D.** 16145.

» **Câu 34.** Nghiệm của phương trình $\sin 8x - \cos 6x = \sqrt{3}(\sin 6x + \cos 8x)$ là

A.
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{7} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

B.
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

C.
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{5} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{7} + k\frac{\pi}{2} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

D.
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{9} + k\frac{\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

» **Câu 35.** Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố A ở vĩ độ 40° bắc trong ngày thứ t của một năm không nhuận được cho bởi hàm số $d(t) = 3 \sin \left[\frac{\pi}{180}(t-80) \right] + 12$ với $t \in \mathbb{Z}$ và $0 < t \leq 365$. Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có nhiều giờ có ánh sáng mặt trời nhất?

- A.** 170. **B.** 171. **C.** 172. **D.** 173.

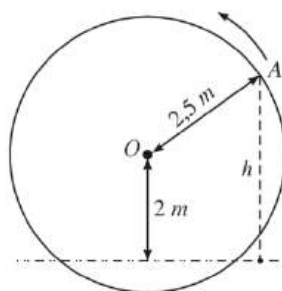
» **Câu 36.** Một chiếc guồng nước có dạng hình tròn bán kính 2,5m; trục của nó đặt cách mặt nước 2m (hình vẽ). Khi guồng quay đều, khoảng cách h (mét) từ một chiếc gàu gắn tại điểm A của guồng đến mặt nước được tính theo công thức $h = |y|$ trong đó

$$y = 2 + 2,5 \sin \left[2\pi \left(x - \frac{1}{4} \right) \right]$$

với x là thời gian quay của guồng ($x \geq 0$), tính bằng phút (quy



ước $y > 0$ khi gầu ở bên trên mặt nước và $y < 0$ khi gầu ở dưới nước). Chiếc gầu cách mặt nước 2m lần đầu tiên khi nào?



- A. 4 phút. B. $\frac{1}{4}$ phút. C. 2 phút. D. $\frac{1}{2}$ phút.

» **Câu 37.** Giồng nước (hay còn gọi là con nước) không chỉ là công cụ phục vụ sản xuất nông nghiệp, mà đã trở thành hình ảnh quen thuộc của bản làng và là một nét văn hóa đặc trưng của đồng bào dân tộc miền núi phía Bắc.



(Nguồn: <https://shutterstock.com>)

Một chiếc giồng nước có dạng hình tròn bán kính 3,5 m; trục của nó đặt cách mặt nước 3 m. Khi giồng quay đều, khoảng cách $h(m)$ từ một ống đựng nước gắn tại một điểm của giồng đến mặt nước được tính theo công thức $h = |y|$, trong đó $y = 3,5 \sin\left(2\pi x - \frac{\pi}{2}\right) + 3$, với x (phút) là thời gian quay của giồng ($x \geq 0$). Hãy chỉ ra giá trị của x nhỏ nhất để ống đựng nước cách mặt nước 3 m.

- A. $\frac{1}{4}$. B. $\frac{5}{4}$. C. $\frac{1}{8}$. D. $\frac{7}{8}$.

B. Câu hỏi – Trả lời Đúng/sai

» **Câu 38.** Cho phương trình $\sin x = a$ (1).

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Nếu $a > 1$ thì phương trình (1) vô nghiệm.		
(b)	Nếu $a = 1$ thì phương trình (1) có nghiệm $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.		
(c)	Nếu $-1 \leq a \leq 1$ thì phương trình (1) có nghiệm $\begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$ với $a = \sin \alpha$.		
(d)	Phương trình (1) có hai điểm biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác.		

» **Câu 39.** Cho phương trình lượng giác $2 \sin x - \sqrt{2} = 0$. Khi đó:

Mệnh đề	Đúng	Sai
---------	------	-----



(a)	Phương trình tương đương với phương trình $\sin x = \sin \frac{\pi}{4}$.		
(b)	Phương trình có nghiệm là $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi; x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.		
(c)	Phương trình có nghiệm âm lớn nhất là $\frac{\pi}{4}$.		
(d)	Số nghiệm của phương trình trong khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ là hai nghiệm.		

» Câu 40. Cho phương trình lượng giác $\sin 2x = -\frac{1}{2}$ (*). Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Phương trình (*) tương đương $\sin 2x = \sin \frac{\pi}{6}$		
(b)	Trong khoảng $(0; \pi)$ phương trình có 3 nghiệm		
(c)	Tổng các nghiệm của phương trình trong khoảng $(0; \pi)$ bằng $\frac{3\pi}{2}$		
(d)	Trong khoảng $(0; \pi)$ phương trình có nghiệm lớn nhất bằng $\frac{11\pi}{12}$		

» Câu 41. Cho phương trình lượng giác $2 \cos x = \sqrt{3}$, khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Phương trình có nghiệm $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$		
(b)	Trong đoạn $\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$ phương trình có 4 nghiệm		
(c)	Tổng các nghiệm của phương trình trong đoạn $\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$ bằng $\frac{25\pi}{6}$		
(d)	Trong đoạn $\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$ phương trình có nghiệm lớn nhất bằng $\frac{13\pi}{6}$		

» Câu 42. Cho phương trình $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$ (*), vậy:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Phương trình có nghiệm $\begin{cases} x = \pi + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} (k \in \mathbb{Z}). \end{cases}$		
(b)	Trong khoảng $(0; \pi)$ phương trình có 2 nghiệm		
(c)	Trong khoảng $(0; \pi)$ phương trình có 2 nghiệm âm		
(d)	Tổng các nghiệm của phương trình trong khoảng $(0; \pi)$ bằng $\frac{7\pi}{6}$		

» Câu 43. Cho phương trình lượng giác $3 - \sqrt{3} \tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$, khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai



(a)	Phương trình có nghiệm $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.		
(b)	Khi $\frac{-\pi}{4} < x < \frac{2\pi}{3}$ thì phương trình có ba nghiệm		
(c)	Phương trình có nghiệm âm lớn nhất bằng $-\frac{\pi}{3}$		
(d)	Tổng các nghiệm của phương trình trong khoảng $\left(\frac{-\pi}{4}; \frac{2\pi}{3}\right)$ bằng $\frac{\pi}{6}$		

» Câu 44. Cho hai đồ thị hàm số $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ và $y = \sin x$, khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số: $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin x$		
(b)	Hoành độ giao điểm của hai đồ thị là $x = \frac{3\pi}{8} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$		
(c)	Khi $x \in [0; 2\pi]$ thì hai đồ thị hàm số cắt nhau tại ba điểm		
(d)	Khi $x \in [0; 2\pi]$ thì tọa độ giao điểm của hai đồ thị hàm số là: $\left(\frac{5\pi}{8}; \sin \frac{5\pi}{8}\right), \left(\frac{7\pi}{8}; \sin \frac{7\pi}{8}\right)$.		

» Câu 45. Cho phương trình lượng giác $2\sin\left(x - \frac{\pi}{12}\right) + \sqrt{3} = 0$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Phương trình tương đương $\sin\left(x - \frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$.		
(b)	Phương trình có nghiệm là: $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi; x = \frac{7\pi}{12} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.		
(c)	Phương trình có nghiệm âm lớn nhất bằng $-\frac{\pi}{4}$.		
(d)	Số nghiệm của phương trình trong khoảng $(-\pi; \pi)$ là hai nghiệm.		

» Câu 46. Cho phương trình $(2\cos x - 1)(\sin 2x - m) = 0$ (1).

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$x = \frac{7\pi}{3}$ là một nghiệm của phương trình (1).		
(b)	Khi $m = 2$ thì phương trình (1) \Leftrightarrow $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + l2\pi \end{cases} \quad (k, l \in \mathbb{Z})$		



(c)	Khi $m = 1$ thì tập nghiệm của phương trình (1) có tất cả 4 điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác.		
(d)	Chỉ tìm được một giá trị của m để phương trình (1) có đúng hai nghiệm thuộc $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$.		

» **Câu 47.** Hằng ngày, mực nước của con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu $h(m)$ của mực nước trong kênh tại thời điểm $t(h)$ ($0 \leq t \leq 24$) được cho bởi công thức $h = 3 \cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) + 12$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Độ sâu của mực nước trong kênh nhỏ nhất bằng $9m$.		
(b)	Độ sâu của mực nước trong kênh lớn nhất bằng $15m$.		
(c)	Trong 1 ngày có đúng 3 thời điểm mà độ sâu của mực nước trong kênh đạt giá trị lớn nhất.		
(d)	Độ sâu của mực nước trong kênh tại thời điểm $12(h)$ bằng $13m$.		

C. Câu hỏi – Trả lời ngắn

» **Câu 48.** Họ nghiệm phương trình lượng giác: $\cos(x + 30^\circ) + 1 = 0$ có dạng $x = a^\circ + k \cdot b^\circ$ ($k \in \mathbb{Z}$), với $a; b$ là các số nguyên. Tính giá trị $S = b - a$

» **Điền đáp số:**

» **Câu 49.** Phương trình lượng giác: $\tan\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ có họ nghiệm dạng $x = \frac{\pi}{a} + k \frac{\pi}{b}$ ($k \in \mathbb{Z}$), với $a; b$ là các số nguyên. Tính giá trị $T = a(a + b)$

» **Điền đáp số:**

» **Câu 50.** Họ nghiệm phương trình lượng giác: $\sqrt{3} \tan \frac{\pi x}{2} = 3$ có dạng $x = a^\circ + k \cdot b^\circ$ ($k \in \mathbb{Z}$), với $m; n$ là các số nguyên và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Tính giá trị $P = m^n$

» **Điền đáp số:**

» **Câu 51.** Phương trình $2 \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 2 = 0$ có bao nhiêu nghiệm trên khoảng $(0; 2\pi)$

» **Điền đáp số:**

» **Câu 52.** Cho phương trình $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right)$. Tìm số nghiệm thuộc khoảng $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{8\pi}{3}\right)$ của phương trình.

» **Điền đáp số:**

» **Câu 53.** Cho phương trình $\cos x = \sin 3x$. Tính tổng các nghiệm thuộc khoảng $(0; 2\pi)$ của phương trình (làm tròn đến hàng phần chục).

» **Điền đáp số:**



» **Câu 54.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\cos x = m$ có nghiệm?

✎ **Điền đáp số:**

» **Câu 55.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\sin x - m = 1$ có nghiệm.

✎ **Điền đáp số:**

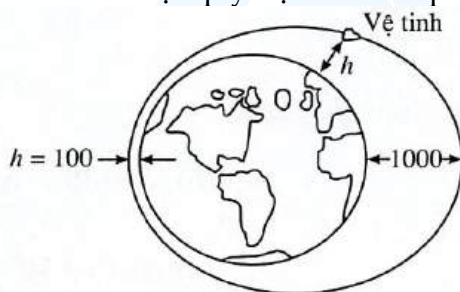
» **Câu 56.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $3\sin^2 x + \sin 2x - m\cos^2 x = 0$ có nghiệm.

✎ **Điền đáp số:**

» **Câu 57.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m trong đoạn $[-10; 10]$ $m \tan x + 2 = m$ có nghiệm.

✎ **Điền đáp số:**

» **Câu 58.** Một vệ tinh bay quanh Trái Đất theo một quỹ đạo hình Elip (như hình vẽ):



Độ cao h (tính bằng kilômét) của vệ tinh so với bề mặt Trái Đất được xác định bởi công thức $h = 550 + 450 \cdot \cos \frac{\pi}{50} t$. Trong đó t là thời gian tính bằng phút kể từ lúc vệ tinh bay vào quỹ đạo. Người ta cần thực hiện một thí nghiệm khoa học khi vệ tinh cách mặt đất 250 km . Trong khoảng 60 phút đầu tiên kể từ lúc vệ tinh bay vào quỹ đạo, hãy tìm thời điểm t để có thể thực hiện thí nghiệm đó? (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ 1)

✎ **Điền đáp số:**

» **Câu 59.** Mùa xuân ở Hội Lim (tỉnh Bắc Ninh) thường có trò chơi đu. Khi người chơi đu nhún đều, cây đu sẽ đưa người chơi đu dao động qua lại vị trí cân bằng. Nghiên cứu trò chơi này, người ta thấy khoảng cách h (mét) được tính từ vị trí chân người chơi đu đến vị trí cân bằng được biểu diễn bởi hệ thức $h = |d|$ với $d = 3 \cos \left[\frac{\pi}{3} (2t - 1) \right]$ ($t \geq 0$ và được tính bằng giây), trong đó ta quy ước $d > 0$ khi vị trí cân bằng ở về phía sau lưng người chơi đu và $d < 0$ trong trường hợp ngược lại.



Hỏi trong 3 giây đầu tiên, có tất cả bao nhiêu lần người chơi đu ở cách vị trí cân bằng 1 mét?



Điền đáp số:

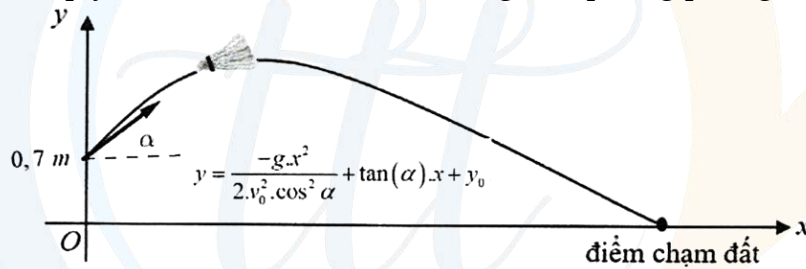
» **Câu 60.** Trong môn cầu lông, khi phát cầu, người chơi cần đánh cầu qua lưới sang phía sân đối phương và không được để cho cầu rơi ngoài biên.
Trong mặt phẳng toạ độ Oxy , chọn điểm có toạ độ $(O; y_0)$ là điểm xuất phát thì phương trình quỹ đạo của cầu lông khi rời khỏi mặt vợt là:

$$y = \frac{-g \cdot x^2}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha} + x \cdot \tan(\alpha) + y_0$$

Trong đó:

- » g là gia tốc trọng trường (thường được chọn là $9,8m/s^2$);
- » α là góc phát cầu (so với phương ngang của mặt đất);
- » v_0 là vận tốc ban đầu của cầu;
- » y_0 là khoảng cách từ vị trí phát cầu đến mặt đất.

Đây là một hàm số bậc hai nên quỹ đạo chuyển động của cầu lông là một parabol. Một người chơi cầu lông đang đứng khoảng cách từ vị trí người này đến vị trí cầu rơi chạm đất (tầm bay xa) là $6,68m$. Quan sát hình bên dưới, hỏi người chơi đã phát cầu góc khoảng bao nhiêu độ so với mặt đất? Biết cầu rời mặt vợt ở độ cao $0,7m$ so với mặt đất; vận tốc xuất phát của cầu là $8m/s$; người chơi không phát cầu quá 50° và bỏ qua sức cản của gió và xem quỹ đạo của cầu luôn nằm trong mặt phẳng phẳng đứng).



Điền đáp số:

----- Hết -----

TOÁN TỪ TÂM